



Mecânica

Newtoniana, Lagrangiana & Hamiltoniana







João Barcelos Neto
Professor Titular
Aposentado
Instituto de Física da UFRJ

Mecânica

Newtoniana, Lagrangiana

&

Hamiltoniana





Copyright © 2013 Editora Livraria da Física
2ª Edição
Direção Editorial: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: artquantum
Capa: Antonio Manuel Alves Morais

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Barcelos Neto, João
Mecânicas newtoniana, lagrangiana e
hamiltoniana / João Barcelos Neto. -- 2. ed. --
São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

ISBN 978-85-7861-196-5

1. Hamilton, William Rowan, 1805-1865
 2. Lagrange, Joseph Louis de, 1736-1813
 3. Mecânica -
Estudo e ensino
 4. Newton, Isaac, 1642-1727
- I. Título.

13-03097

CDD-531.07

Índices para catálogo sistemático:

1. Mecânica: Física clássica: Estudo e ensino 531.07

ISBN: 978-85-7861-196-5

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.



Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Editora Livraria da Física

Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413

www.livrariadafisica.com.br





A Luzia, Aline, Cíntia, Sofia e Júlia.







Prefácio

Prefácio da primeira edição

Este livro corresponde aos cursos de Mecânica Clássica I e II que ministrei nos primeiro e segundo semestres de 2002 no Instituto de Física da UFRJ. Ele representa, também, a experiência por mim acumulada em já ter ministrado este curso em outras oportunidades, tanto na UFRJ, como, inicialmente, no Instituto de Física da UERJ. Posso dizer ainda que ele traduz também o grande aprendizado que tive em participar das equipes de Física I e II, coordenadas pelos Professores Ennio Candotti e Samuel Santos e, depois, num trabalho desenvolvido juntamente com a Professora Maria Antonieta e os Professores Marcelo Alves e Marco Pedra num curso de Física I em que começamos diretamente com as Leis de Newton. Isto significou o desenvolvimento, por nós mesmos, de fundamentos de Cálculo e Vetores no decorrer do próprio curso de Física I. Esta foi uma das experiências mais gratificantes que tive como professor.

Na elaboração do presente curso de Mecânica, tomei por base os seguintes parâmetros e pontos de vista:

(i) O estudante, em sequência normal, começa a fazer Mecânica Clássica I quando ingressa no terceiro período. Nesta oportunidade, ele já deve ter cursado as disciplinas de Físicas I e II (que correspondem aos princípios de Mecânica Newtoniana, Termodinâmica, Fluidos e Movimento Oscilatório), bem como Cálculos I e II (em que aprendeu noções fundamentais de Cálculo Diferencial e Integral, e algumas noções de Cálculo Vetorial). Embora possuidor de tais conhecimentos, tenho notado que, geralmente, ele ainda tem dificuldades de raciocinar na Mecânica Newtoniana através das leis de Newton, o que subentenderia uma familiaridade com o Cálculo e a sua utilização na Física, o que não chegou a ser adquirido no curso paralelo com a Física I. Outra deficiência é que não tem confiança de usar a notação vetorial.

(ii) Com o intuito de contornar tais problemas, fiz uma rápida revisão de cálculo e vetores (não necessariamente tudo de uma vez), que corresponde ao conteúdo dos Apêndices A e B e incluí vários exercícios comuns aos cursos de Física I e II. Minha intenção era de que eles fossem agora resolvidos de forma a pensar mais nos princípios





físicos do que na utilização direta de algumas fórmulas (um vício do curso secundário e que penetra significativamente no básico da universidade). Para ajudar neste objetivo, coloquei no Apêndice C a resolução de alguns dos exercícios propostos, que não são necessariamente os mais difíceis.

(iii) Para destacar o papel das leis de Newton e, conseqüentemente, dos referenciais inerciais, dediquei um Capítulo exclusivamente sobre o que seja movimento em referenciais não inerciais. A minha intenção é de ficar bem claro o papel das forças fictícias e o seu não aparecimento nos referenciais inerciais.

(iv) Geralmente, nos cursos de Mecânica Clássica, o estudo do pião é feito após a introdução do formalismo lagrangiano, o que pode levar a uma falsa impressão de que só este formalismo é capaz de tratar de tal assunto. Para evitar que isto pudesse acontecer, distribuí o assunto do corpo rígido por dois Capítulos, um fica no formalismo newtoniano, em que o movimento do pião é considerado, e outro no lagrangiano. Mostrei aí como se chega às mesmas relações obtidas no formalismo newtoniano e aproveitei a oportunidade para ir mais além na parte formal da teoria, com a utilização da notação matricial (o que, acredito, poderá ser de grande utilidade em cursos subsequentes, particularmente em Mecânica Quântica).

(v) Antes de iniciar os formalismos lagrangiano e hamiltoniano, dediquei um Capítulo ao cálculo variacional, a fim de ficar bem claro o princípio de Hamilton, que passa a ser o fundamento teórico a partir desta parte do curso.

(vi) Há mais dois aspectos que gostaria de destacar. O primeiro é que nesta parte da formação do estudante, ele ainda vê a Física de forma estanque, em grupos de conhecimentos isolados, como se fosse possível desenvolver uma carreira científica em que parte do conhecimento básico pudesse não ser levada em consideração. Embora sendo a Mecânica Clássica um curso bem inicial, procurei mostrar exemplos em que outros ramos da Física aparecessem, principalmente no tocante à Relatividade e ao Eletromagnetismo. Procurei também mostrar as possíveis pontes para a Mecânica Quântica, através da ideia de Feynman das integrais de caminho e da quantização canônica de Dirac.

(vii) Por fim, não posso deixar de citar que uma significativa parte da minha motivação em escrever este curso se deveu ao convívio com um grupo de excelentes estudantes, os quais fizeram várias correções em minhas notas de aula preliminares.

Prefácio da segunda edição

Depois de quase dez anos, estou apresentando a segunda edição do meu livro de Mecânica. Esta edição aparece em circunstâncias bem diferentes da primeira ou, numa linguagem mais nossa, em novas condições de contorno. Tenho três outros livros. Um deles é voltado para o estudante ainda no ciclo básico que, mesmo sabendo Cálculo,





tem dificuldades em raciocinar com ele e em usá-lo. Mesmo assim, resolvi manter o sucinto apêndice de Cálculo, para que o estudante, se necessário, possa ter uma rápida e geral visão sobre o assunto.

Meus outros dois livros são de Matemática para Físicos, indo da graduação (depois dos cursos de Cálculo) até o início da pós-graduação. Coloco aqui, nesta edição, apenas o necessário (antes de cada assunto e não mais em apêndices). As revisões matemáticas vão aparecendo gradativamente no decorrer da própria exposição. O estudante já familiarizado pode pulá-las sem nenhuma descontinuidade na sequência dos assuntos. Há, também, nesses dois livros, muitas aplicações, sendo algumas delas continuidade do que aparece aqui. Nesses casos, se houver interesse do leitor, sempre indico onde podem ser encontradas.

Procurei, também, dar uma sequência mais didática. Capítulos mudaram de lugar, bem como muito de seus assuntos foram realocados. Suprimi, também, as repetições desnecessárias. Alguns exercícios foram incorporados ao texto e outros novos foram introduzidos. Reescrevi todo o livro. Mexi em todos os parágrafos, praticamente em todas as suas linhas.

Finalmente, gostaria de agradecer ao Professor Ricardo Amorim, meu amigo e parceiro de muitos trabalhos científicos, desenvolvidos quando da nossa atividade de pesquisa no Departamento de Física Teórica do IF-UFRJ, pelos importantes comentários e valiosas sugestões.

Rio de Janeiro, em 25 de novembro de 2012.

João Barcelos Neto
jb@joaobarcelos.com.br







Conteúdo

1	Leis de Newton	17
1.1	Conhecimentos preliminares sobre vetores	18
1.1.1	Produtos escalar e vetorial	19
1.1.2	Identities vetoriais	21
1.2	Velocidade e aceleração	24
1.2.1	Velocidade e aceleração em componentes ortogonais	26
1.3	Explicações das leis de Newton	29
2	Movimento sob interação gravitacional	39
2.1	Movimento próximo à superfície da Terra	40
2.2	Movimento afastado da superfície da Terra	46
2.2.1	Movimento circular	48
2.2.2	Movimento retilíneo	49
2.3	Movimento no interior da Terra	51
3	Movimento com forças de contato	61
3.1	Força de tensão	61
3.2	Forças de contato entre superfícies	63
3.3	Atrito viscoso	69
4	Movimento sob força da mola	81
4.1	Só a mola atuando	82
4.1.1	Solução através de integração	83
4.1.2	Exemplo preliminar em Física Básica	85
4.1.3	Visão um pouco mais geral	87
4.1.4	Problema inicial novamente	87



4.2	Pêndulo simples	89
4.2.1	Pêndulo com período independente da amplitude	91
4.3	Oscilação harmônica em circuito elétrico	93
4.4	Quando também atua o atrito viscoso	95
4.5	Circuito elétrico amortecido	97
4.6	Oscilações forçadas	99
4.6.1	Ressonância	100
4.6.2	Batimento	103
4.6.3	Circuito elétrico análogo	104
5	Partícula movendo-se em campo eletromagnético	111
5.1	Campos constantes e uniformes	111
5.2	Exemplo em Relatividade Especial	114
6	Movimento em referenciais não inerciais	117
6.1	Posição, velocidade e aceleração relativas	118
6.1.1	Exemplo de movimento relativo	119
6.2	Observadores inerciais	121
6.3	Observador não inercial	126
6.4	Observador em referencial girante	128
6.4.1	Exemplo de movimento visto em referencial girante	132
6.4.2	Outro exemplo de referencial girante	138
6.4.2.1	Influência da força centrífuga	138
6.4.2.2	Influências da força de Coriolis	140
7	Princípios de conservação	149
7.1	Operadores vetoriais	150
7.1.1	Em coordenadas cartesianas	150
7.1.1.1	Demonstração de (7.11) e (7.12)	151
7.1.1.2	Demonstração de (7.13)	152
7.1.1.3	Demonstração de (7.20)	153
7.1.2	Definições gerais dos operadores vetoriais	154
7.1.2.1	Coordenadas cilíndricas:	155
7.1.2.2	Coordenadas esféricas:	155
7.1.3	Teoremas de Gauss e de Stokes	156



7.2	Conservação da energia	157
7.2.1	Trabalho e energia cinética	157
7.2.2	Força conservativa e energia potencial	159
7.2.3	Energia mecânica e sua conservação	160
7.2.4	Sobre o uso dos princípios de conservação	162
7.2.5	Sobre a extensão da conservação da energia	164
7.2.6	Pequenas oscilações	165
7.2.6.1	1º exemplo	166
7.2.6.2	2º exemplo	166
7.3	Conservação dos momentos linear e angular	168
7.3.0.3	1º exemplo	169
7.3.0.4	2º exemplo	170
7.3.0.5	3º exemplo - Movimento planetário	173
7.3.0.6	4º exemplo - Espalhamento de Rutherford	179
7.4	Outra quantidade conservada	182

8 Sistema de partículas 195

8.1	Exemplos iniciais de sistemas de partículas	195
8.1.0.7	1º exemplo	195
8.1.0.8	2º exemplo	197
8.1.0.9	3º exemplo	199
8.2	Tratamento geral de sistema de partículas	202
8.3	Dinâmica do sistema	203
8.4	Princípios de conservação	206
8.4.1	Momento linear	206
8.4.2	Momento angular	207
8.4.3	Energia mecânica	209
8.4.4	Alguns exemplos	210
8.4.4.1	1º exemplo	210
8.4.4.2	2º exemplo - Colisão elástica	211
8.4.4.3	3º exemplo - Fenômeno das marés	212
8.4.4.4	4º exemplo - Foguetes (sistemas de massa variável)	214
8.5	Sistema com duas partículas	217



9	Corpo rígido	229
9.1	Rotação do corpo rígido	230
9.1.1	Energia cinética	230
9.1.2	Momento angular	231
9.1.2.1	Exemplo	233
9.1.3	Um pouco mais sobre o momento de inércia	235
9.1.3.1	Teorema dos eixos paralelos	235
9.1.3.2	Teorema dos eixos perpendiculares	236
9.1.3.3	Anel de raio R e massa M	237
9.1.3.4	Disco de raio R e massa M	238
9.1.3.5	Esfera de raio R e massa M	238
9.1.3.6	Barra, cilindro e paralelepípedo	239
9.2	Introdução à dinâmica do corpo rígido	239
9.2.1	Máquina de Atwood	240
9.2.2	Sobre a não dissipação de energia nos rolamentos	242
9.2.3	Mecânica da bola de bilhar	243
9.2.4	Começando a estudar o giroscópio	245
9.2.5	Equilíbrio do corpo rígido (estática)	249
9.3	Vetores e tensores	252
9.3.1	Formalismo geral da mudança de base	252
9.3.1.1	Notação matricial	254
9.3.1.2	Determinantes	254
9.3.2	Algumas consequências e novos conceitos	256
9.3.2.1	Pseudovetor e pseudotensor	258
9.3.2.2	Produtos com os tensores de Levi-Civita	260
9.3.3	Detalhamento sobre a mudança de base	262
9.3.3.1	Caso geral da mudança de base	264
9.4	Rotação infinitesimal como vetor	265
9.5	Tensor de inércia	269
9.5.1	Exemplo	272
9.5.2	Energia cinética	275
9.6	Voltando ao giroscópio	276
9.6.1	Equações de Euler	276
9.6.2	Pião simétrico - estudo com curvas de potencial	279



9.6.3	Pião simétrico - estudo mais quantitativo	284
9.6.3.1	Extensão da nutação	285
9.6.3.2	Frequência da nutação	287
9.6.3.3	Velocidade de precessão:	288
9.6.3.4	Precessão sem nutação	289
9.6.3.5	Pião inicialmente na vertical	290
9.7	Teorema de Euler	292
9.8	Parâmetros de Cayley-Klein	298
10	Cálculo Variacional	317
10.1	Introdução	318
10.2	Fundamento do Cálculo Variacional	319
10.2.1	Equação de Euler-Lagrange	320
10.3	Solução do problema da braquistócrona	322
10.4	Outros exemplos	326
10.4.1	Menor distância entre dois pontos	326
10.4.2	Linha que gera superfície mínima de revolução.	327
10.5	Cálculo Variacional com vínculos	329
10.5.1	Problema isoperimétrico	330
10.5.2	Cabo flexível apoiado pelos extremos	331
11	Formulação lagrangiana	335
11.1	Princípio de Hamilton	336
11.2	Aplicações da equação de Euler-Lagrange	339
11.2.1	Pêndulo simples	339
11.2.2	Máquina de Atwood	342
11.3	A lagrangiana	344
11.3.1	Partícula livre	345
11.3.2	Partícula com interação	347
11.4	Princípios de conservação	349
11.4.1	Momento conjugado à coordenada generalizada	349
11.4.2	Hamiltoniana	350
11.5	Aplicações dos princípios de conservação	352
11.5.1	Partícula movendo-se numa superfície cônica	352



11.5.2 Exemplo com duas partículas em interação	354
11.5.3 O problema de dois corpos	355
11.5.4 Pião simétrico	358
11.6 Um pouco além da Mecânica Newtoniana	360
11.6.1 Partícula livre relativística	360
11.6.2 Partícula carregada em campo eletromagnético	362
11.7 Uma passagem para a Mecânica Quântica	365
12 Formulação hamiltoniana	369
12.1 Equações de Hamilton	369
12.2 Aplicações das equações de Hamilton	373
12.2.1 Máquina de Atwood	373
12.2.2 Partícula carregada num campo magnético	375
12.3 Mais uma ponte para a Mecânica Quântica	377
A Derivação e integração	383
A.1 Derivação	383
A.2 Integração	386
A.3 Exemplos em geometria	387
A.3.1 Primeiro exemplo	387
A.3.2 Segundo exemplo	389
B Resolução de alguns exercícios	393
C Respostas de alguns exercícios	465



Capítulo 1

Leis de Newton

Como mencionei no prefácio, vamos estudar a Mecânica partindo diretamente de suas leis. Aqui, trataremos da Mecânica Newtoniana, que se apoia nas chamadas **leis de Newton**, e que são:

- 1^a** – *Uma partícula livre (que não está sujeita a nenhuma interação) ou está em repouso ou em movimento retilíneo com velocidade constante.*
- 2^a** – *Quando uma partícula interage, seu estado de movimento é alterado da seguinte maneira*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.1)$$

em que \vec{F} é a resultante das forças que atuam sobre a partícula e \vec{p} é o seu momento linear, cuja definição (não relativística) é

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (1.2)$$

sendo m a sua massa e \vec{v} a velocidade.

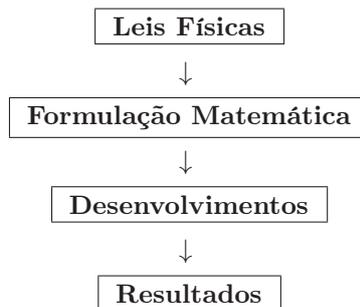
- 3^a** – *Quando duas partículas interagem, a força numa delas possui o mesmo módulo, mesma direção e sentido contrário da força que atua na outra.*

Fazer o estudo de determinada teoria, partindo de suas leis ¹, é necessário o

¹ Parece contrassenso pensar noutra possibilidade, isto é, estudar determinada teoria física sem partir diretamente de suas leis. Entretanto, às vezes opta-se em seguir um caminho mais histórico, partindo de ideias e princípios antes da formulação final da teoria. Geralmente esta postura é adotada em cursos mais básicos, para se evitar dificuldades matemáticas.



conhecimento matemático para proceder aos desenvolvimentos. O diagrama a seguir fornece, esquematicamente, os passos desta abordagem.



A Física está presente não só na primeira etapa, mas em todas. É sempre importante saber o que as equações e as passagens intermediárias estão nos dizendo, mesmo antes do resultado final. É isto que vamos fazer com as leis de Newton em toda a primeira parte deste livro, que vai até o Capítulo 9.

Neste Capítulo, vou procurar deixar bem claro o significado de cada uma dessas leis. Mas, primeiramente, tratemos da questão matemática, principalmente da que usaremos nos Capítulos iniciais. Vemos que a relação proveniente da segunda lei é expressa por uma equação diferencial (aliás, isto acontece com quase todas as leis físicas). Assim, logo de início, precisaremos do Cálculo Diferencial e Integral. Geralmente, nesta fase, o estudante já possui essa familiaridade. Mesmo assim, decidi manter o Apêndice A, que estava na edição anterior, que contém uma breve revisão desse assunto². As demais revisões matemáticas não serão mais apresentadas como apêndices, mas de forma gradativa, antes dos assuntos. O leitor já familiarizado, pode perfeitamente pulá-las e passar para as seções seguintes.

1.1 Conhecimentos preliminares sobre vetores

Vamos nos restringir à visão mais simples de vetor, através da sua representação por uma seta (em que ficam naturalmente embutidos módulo, direção e sentido) e de suas componentes em eixos ortogonais. Veja, por favor, a Figura 1.1, na

² Caso o estudante ainda tenha dificuldades com o Cálculo, e o conteúdo do Apêndice A seja insuficiente, sugiro a consulta do meu livro **Cálculo – Para Entender e Usar**, Editora Livraria da Física, que escrevi depois da primeira edição do livro de Mecânica, e é voltado diretamente para o estudante que tem dificuldades na compreensão e utilização do Cálculo.

qual o vetor \vec{V} está decomposto nos eixos x , y e z , caracterizados pelos unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} . Com isto, podemos escrever

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \quad (1.3)$$

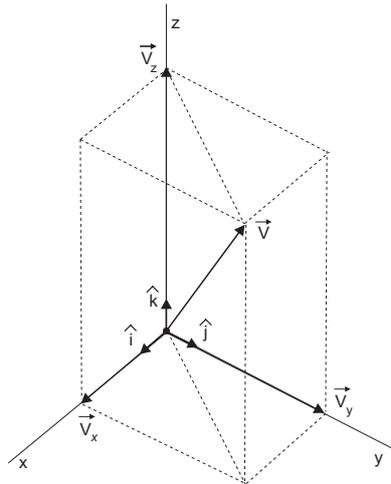


Figura 1.1: Vetor decomposto em eixos ortogonais.

1.1.1 Produtos escalar e vetorial

Sejam dois vetores \vec{A} e \vec{B} fazendo um ângulo θ entre si como mostra a Figura 1.2. O produto escalar entre eles, que denotaremos por $\vec{A} \cdot \vec{B}$, é a quantidade escalar definida por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad (1.4)$$

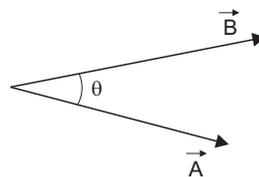


Figura 1.2: Vetores \vec{A} e \vec{B} fazendo um ângulo θ .

Já o produto vetorial, que escreveremos $\vec{A} \times \vec{B}$, é um vetor (na verdade, um

pseudovetor³). Seu módulo é

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{sen} \theta \quad (1.5)$$

e o sentido é o que aparece na Figura 1.3.

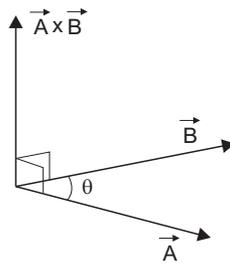


Figura 1.3: Sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$

Por essas definições, temos que o produto escalar é comutativo; e o vetorial, anticomutativo. Ambos satisfazem, também, à propriedade de distributividade em relação à soma. Em resumo,

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{A} \\ \vec{A} \times \vec{B} &= -\vec{B} \times \vec{A} \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \\ \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Considerando \vec{A} e \vec{B} através de suas componentes ortogonais,

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \\ \vec{B} &= B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \end{aligned} \quad (1.7)$$

podemos escrever os produtos escalar e vetorial como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.8)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (1.9)$$

³ Noutras oportunidades, voltaremos ao estudo de vetores de maneira um pouco mais abrangente, incluindo os conceitos de tensor e pseudotensor. No momento, fica apenas a menção apresentada.