Notas de Física-Matemática

Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições

Notas de Física-Matemática

Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições

Carmen Lys Ribeiro Braga

Instituto de Física da USP
Departamento de Física Matemática

Editora Livraria da Física — São Paulo

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho

Diagramação: Roberto Maluhy Jr & Mika Mitsui

Capa: Arte Ativa

Impressão: Gráfica Paym

Dados Internacionais de Catalogação e Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Braga, Carmen Lys Ribeiro
Notas de física-matemática: equações diferencias, funções de Green e distribuições / Carmen Lys Ribeiro Braga. –1.ed.– São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

1. Equações diferencias 2. Física matemática 3. Funções de Green 4. Teoria das distribuições (Análise funcional)

I. Título.

06-2321 CDD-530.15

Índice para catálogo sistemático:

1. Física matemática 530.15

Impresso no Brasil

Editora Livraria da Física
Telefone 55 11 3816 7599 / Fax 55 11 3815 8688

www.livrariadafisica.com.br

Prefácio

A Profa. Carmen Lys Ribeiro Braga (1923–1989), foi uma das mais notáveis docentes do nosso instituto. A palavra *docente* é aqui entendida no sentido do vernáculo: “que ensina”. Ministrou durante muitos anos os cursos de Física-Matemática e de Métodos de Física Teórica, contribuindo para a formação de várias gerações de estudantes de Física e Matemática. Suas notas de aula, aqui editadas, atestam o alto nível das disciplinas por ela ministradas. Com sua edição acreditamos apresentar um texto adequado a um curso básico de Física-Matemática, voltado ao que se poderia denominar “Física-Matemática clássica” (para uma referência complementar, vide página vii).

Alguns aspectos de um curso de Física-Matemática poderiam modernamente ser ministrados sob outro ponto de vista mais avançado: toda a teoria das funções especiais adquire outro significado se vista sob o prisma da Teoria de Grupos (para uma referência, vide página vii). Esse ponto de vista não nos parece, entretanto, adequado a um primeiro contacto, que deveria visar aplicações mais básicas, como por exemplo, à Eletrodinâmica, à Óptica, ou à Teoria do Calor. Era essa também a visão da Profa. Carmen e, como o leitor poderá constatar, uma boa parte das aplicações à Eletrodinâmica Clássica, usualmente tratadas em cursos de pós-graduação será encontrada aqui. Sua abordagem, porém, contrasta com o tratamento conceitualmente inadequado, consistindo de um “amontoado de receitas”, presente até mesmo em diversas referências clássicas.

Aliás, o tratamento de numerosas aplicações da teoria sempre foi uma característica marcante das aulas da Profa. Carmen, sem dúvida em parte por influência do seu grande mestre, o Prof. Laurent Schwartz (1915–2002). Essa característica domina todo o texto, em particular, os notáveis capítulos sobre funções de Green e sobre a teoria elementar de distribuições, excepcionalmente ricos em importantes aplicações não-triviais (para uma referência, vide página vii).

A menção à docência, feita acima, não significa que a Profa. Carmen não tenha exercido atividades de pesquisa, também em alto nível. De fato, ela publicou pouco, em parte devido a seu caráter tímido e a uma forte autocrítica. Entretanto, o seu trabalho “Transformation de Fourier des Distributions Invariantes” (Rev. Bras. Fis. **11**, 67–120 (1981)) é notável e, na opinião de seu mestre Laurent Schwartz, irá permanecer. Sua tese de doutoramento intitulou-se “Sobre os Funcionais de Jaffe”, IFUSP (1971). Um de nós (W. F. W.) presenciou quando o Prof. Jorge André Swieca (1936-1980), presidente de sua banca de doutorado e, de hábito, muito econômico em elogios, afirmou que o seu trabalho era muito mais claro e transparente que o de Jaffe. Acrescenta-se ainda um bonito trabalho sobre séries formais e distribuições, com M. Schönberg ("Formal Series and Distributions", C. L. R. Braga e M. Schönberg. An. Acad. Bras. Cie. **31**, n. 3, 333-360 (1959)). O alto nível do curso por ela ministrado refletia, assim, como não poderia deixar de ser, grande maturidade científica.

O material aqui apresentado procede de notas de aula da Profa. Carmen, distribuidas a seus estudantes em diversos cursos, notas essas que elaborou ao longo de vários anos com apoio de colegas. O processo de transcrição envolveu algumas poucas correções menores e a inclusão de algumas notas explicativas, preservando a vivacidade pedagógica dos textos originais – dedicados primordialmente à leitura e estudo de seus alunos – sem carregar esses textos com a precisão própria a tratados sistemáticos. O núcleo central do presente livro são os dois capítulos finais, dedicados às funções de Green e à Teoria das Distribuições, ambos dotados de qualidades raramente encontradas na literatura.

Nos últimos anos de sua vida, acometida de doença grave, a Profa. Carmen foi assistida, com amizade e nobreza, por alguns colegas e ex-alunos que a admiravam. É nossa expectativa que a publicação desse curso contribua à perpetuação da sua memória e à preservação de uma cultura educacional legítima – em um país em que as contribuições mais importantes são rapidamente esquecidas.

Esperamos que o presente texto seja útil a docentes e estudantes! Tendo-a conhecido bem, podemos afirmar que é a essa última qualidade que ela teria atribuído o maior valor.

Agradecemos, por fim, à Profa. Ana Regina Blak, por gentilmente auxiliarnos na coleta dos textos originais, e à Sra. Silvana Maria Ramos de Oliveira e ao Sr. Pedro Tavares Paes Lopes, por auxíliar-nos na digitação de uma parte do material.

São Paulo, março de 2006
Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Walter Felipe Wreszinski
José Fernando Perez
Domingos Humberto Urbano Marchetti
João Carlos Alves Barata
Editores

Conteúdo e Leituras Complementares

O corpo central do texto versa sobre soluções de equações diferenciais de interesse em problemas físicos. Os dois primeiros capítulos abordam a função gama e a solução de equações diferenciais ordinárias pelo método de Frobenius, sendo portanto preparatórios para os capítulos seguintes. O terceiro capítulo contém uma abordagem introdutória à teoria das equações diferenciais parciais, apresentando uma classificação de equações de segunda ordem e o método de separação de variáveis.

Os dois capítulos seguintes, os capítulos quatro e cinco, tratam da equação de Laplace em coordenadas esféricas e cilíndricas, respectivamente. São introduzidas as funções de Legendre, as funções de Legendre associadas, os harmônicos esféricos, as funções de Bessel e de Neumann e são estudadas suas propriedades básicas. Aplicações à Eletrodinâmica e à propagação de calor são discutidas.

Vários exercícios envolvendo um conjunto maior de aplicações são propostos no final de cada capítulo ou em meio ao texto.

Os dois últimos capítulos, mais elaborados, tratam do método da função de Green para a resolução de diversos problemas da Física-Matemática e da teoria das distribuições. O sexto capítulo aborda inicialmente o problema de Sturm-Liouville, passando em seguida a problemas em mais que uma dimensão, com domínios limitados e ilimitados. Usos de transformadas de Fourier no cálculo de funções de Green são também explorados com a finalidade de discutir funções de Green causais em problemas de propagação de ondas. Esse capítulo serve também de motivação para o desenvolvimento da teoria de distribuições, apresentada no capítulo seguinte.

O capítulo sete contém uma excelente introdução elementar à teoria das distribuições. Inicialmente são apresentados algumas noções e exemplos. Discute-se a extensão da noção de derivação a distribuições e seu uso na solução de equações diferenciais, fazendo referência ao capítulo seis. Em seguida a noção de convergência é estendida a distribuições. É introduzida a noção transformada de Fourier de distribuições e são estudadas suas propriedades.

Concluímos esta apresentação com uma pequena lista de sugestões de leitura complementar. Outras sugestões, mais específicas, são apresentadas no final de cada capítulo.

Como texto complementar, voltado à teoria das séries e transformadas de Fourier e suas aplicações, mencionamos "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais", do Prof. Djairo Guedes de Figueiredo (Projeto Euclides, IMPA, 1977).

Para um tratamento de funções especiais do ponto de vista de teoria de grupos, veja N. Ya. Vilenkin, *Representations of Lie Groups and Special Functions*, Kluwer 1993.

Como estímulo àqueles estudantes que venham se interessar por aplicações mais avançadas (por exemplo, aos estados coerentes em Mecânica Quântica), recomendamos A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer Verlag, 1986. Para aplicações à teoria das representações do grupo de Lorentz, vide I. M. Gelfand, R. Ya. Minlos e Z. Y. Shapiro, *Representations of the Lorentz Group and their Applications.*

Para um tratamento recente da Eletrodinâmica Clássica e da Óptica que incorpora o tratamento natural da teoria de distribuições, nesse espírito, sugerimos G. Scharf, *From Electrostatics to Optics – a Concise Electrodynamics Course*, Springer Verlag, 1994.

Os editores.

Sumário

Capítulo 1

Funções Gama, Beta e Psi

1.1 A Função $\Gamma(z)$

A função $\Gamma(z)$, $z = x + iy$, embora raramente admita uma interpretação física, aparece com freqüência em problemas físicos, relacionada com outras funções com sentido físico direto. É muito usada para exprimir resultados numéricos de cálculos.

A função $\Gamma(z)$, quando $\mathrm{Re}(z) > 0$, pode ser definida pela integral de Euler:

$$\Gamma(z) \ = \ \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt \ , \tag{1.1.1}$$

que converge uniformemente para $\mathrm{Re}(z) > 0$, como se pode ver facilmente: se $0 < \alpha \leq x \leq \beta < \infty$, então

$$\left| t^{z-1} \right| \ = \ t^{x-1} \ \leq \ \begin{cases} t^{\alpha-1} \ , & 0 \leq t \leq 1 \ , \\ t^{\beta-1} \ , & t \geq 1 \ , \end{cases}$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| e^{-t} \, t^{z-1} \right| dt \ &\leq \ \int_0^1 e^{-t} \, t^{\alpha-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} \, t^{\beta-1} dt \\ &\leq \ \int_0^1 t^{\alpha-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} \, t^{\beta-1} dt \ . \end{aligned}$$

A segunda integral converge para qualquer valor de β enquanto que a primeira converge só se $\alpha > 0$. Assim, $\Gamma(z)$ fica definida por (1.1.1) no semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$. Mais ainda, e^{-t} é uma função contínua de t e t^{z-1} é uma função analítica. Conseqüentemente, $\Gamma(z)$ é uma função analítica no semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$ e suas derivadas podem ser obtidas por derivação sob o sinal de integração

$$\Gamma'(z) \ = \ \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln(t) \, dt \tag{1.1.2}$$

(derivando formalmente a integral converge uniformemente em $0 < \alpha \leq x \leq \beta < \infty$).

Da definição (1.1.1) tira-se imediatamente $\Gamma(1) = 1$ e prova-se por integração por partes e indução finita que $\Gamma(n+1) = n!$ para n inteiro ≥ 0. Para ver isso, vamos integrar $\Gamma(z+1)$ por partes:

$$\Gamma(z+1) \;=\; \int_0^\infty e^{-t} t^z dt \;=\; -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty \;+ z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \;,$$

de modo que

$$\Gamma(z+1) \;=\; z\Gamma(z)\;. \tag{1.1.3}$$

Em particular, isso implica

$$\Gamma(n+1) \;=\; n!$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Assim $\Gamma(z)$ é uma generalização do fatorial[1].

Usando a relação (1.1.3) n vezes, obtemos

$$\Gamma(z+n) \;=\; (z+n-1)(z+n-2)\;\cdots\; z\Gamma(z)\;,$$

ou seja,

$$\Gamma(z) \;=\; \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\;\cdots\; z}\;. \tag{1.1.4}$$

Como $\Gamma(z+n)$ está definida para $\mathrm{Re}(z+n) > 0$, $\Gamma(z)$ fica definida pela fórmula (1.1.4) para $\mathrm{Re}(z) > -n$. Como n é arbitrário, a fórmula (1.1.3) prolonga analiticamente $\Gamma(z)$, exceto a $z = -n$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$) que são pólos simples de $\Gamma(z)$. O resíduo de $\Gamma(z)$ no pólo $z = -n$ é dado por

$$\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) \;=\; \frac{(-1)^n}{n!}\;.$$

Assim $\Gamma(z)$ é uma função analítica no plano complexo infinito exceto a $z = 0, -1, -2 \ldots$, que são pólos simples (diz-se que $\Gamma(z)$ é uma função meromorfa).

Pela mudança da variável $t = u^2$ a integral (1.1.1) converte em

$$\Gamma(z) \;=\; 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-1}\, du\;, \tag{1.1.5}$$

[1] Um célebre teorema, devido a H. Bohr e J. P. Mollerup, garante que a função gama é a única função cujo logaritimo é convexo que satisfaz (1.1.3) e $\Gamma(1) = 1$. Vide, e.g., R. Courant and F. John, "Introduction to Calculus and Analysis", Vol. II, Springer Verlag, Berlin, (2000). [NdEs]

donde se tira

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \; = \; 2\int_0^\infty e^{-u^2} du \; = \; \sqrt{\pi}\ .$$

Usando (1.1.3) com $z = \frac{1}{2}$, obtemos $\Gamma(z)$ para z semi-inteiro:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \; = \; \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \; = \; \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \; = \; \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\ ,$$

onde foi usada a notação (fatorial duplo):

$$(2n-1)!! \; := \; 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\ ,$$

$$(2n)!! \; := \; 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\ .$$

1.2 Outras Definições

Há outras definições de $\Gamma(z)$ úteis na obtenção de algumas de suas propriedades. A primeira é como limite infinito (Euler)

$$\Gamma(z) \; = \; \lim_{n\to\infty}\frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\ . \tag{1.2.1}$$

Para mostrar que (1.1.1) e (1.2.1) são equivalentes lembremos que

$$e^{-t} \; = \; \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ ,$$

portanto

$$\Gamma(z) \; = \; \lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt\ .$$

A integral $\Gamma_n(z) = \displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$ pode ser calculada por partes:

$$\Gamma_n(z) \; = \; \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{t^z}{z}\bigg|_0^n + \frac{n}{nz}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z\, dt$$

$$= \; \frac{1}{z}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z\, dt\ .$$

Após n integrações obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_n(z) &= \frac{n!}{n^n\, z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^n t^{z+n-1} dt \\ &= \frac{n!\, n^{z+n}}{n^n\, z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \qquad (1.2.2)\end{aligned}$$

e, comparando a (1.2.1), vemos que provou-se o que se queria provar.

A segunda definição (devida a Weierstrass) é sob a forma de produto infinito uniformemente convergente

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} , \qquad (1.2.3)$$

onde γ é o limite da seqüência

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

quando $n \to \infty$. A constante γ vale $0,577215665\ldots$ e é chamada constante de Euler-Mascheroni.

Invertendo a fórmula (1.2.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_n(z)} &= \frac{n^{-z}}{n!} z(z+1)\cdots(z+n) = ze^{-z\ln(n)}(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right) \\ &= ze^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)} \prod_{s=1}^{n} \left(1+\frac{z}{s}\right) e^{\frac{z}{s}} .\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{s}\right) e^{-\frac{z}{s}} ,$$

provando (1.2.3).

Pela definição (1.2.3) vê-se que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ é uma função inteira, isto é: que $\Gamma(z)$ não tem zeros. Nota-se também que $\Gamma(z^*) = (\Gamma(z))^*$.

A definição (1.1.1) não pode ser usada quando $\mathrm{Re}(z) \leq 0$. Uma representação integral de $\Gamma(z)$, válida para todo z e que coincide com a de Euler quando $\mathrm{Re}(z) > 0$ é a de Hankel:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i\,\mathrm{sen}(\pi z)} \int_c e^{-t} \left(e^{-i\pi} t\right)^{(z-1)} dt ,$$

onde C é um caminho aberto com extremos $\infty \pm i\sigma$ que envolve a origem numa vez. C' é um caminho C deformado. Vide Fig. 1.1.

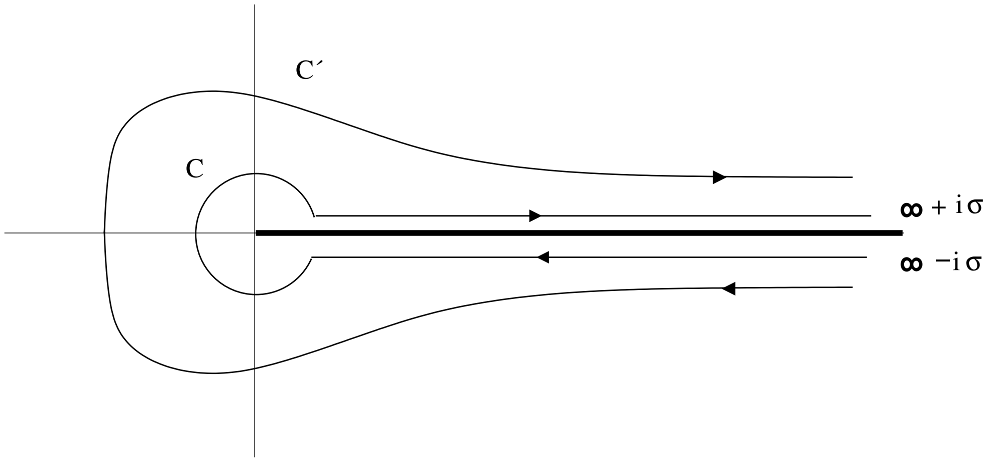

Figura 1.1. Os caminhos de integração C e C'.

1.3 Função Beta

A função $B(p,\ q)$ é definida pela integral

$$B(p,\ q) \ = \ \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt\ , \qquad \mathrm{Re}(p) > 0, \quad \mathrm{Re}(q) > 0\ . \tag{1.3.1}$$

Por mudança de variável, obtém-se representações integrais equivalentes a (1.3.1):

$$B(p,\ q) \ = \ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1}(\,\mathrm{sen}\theta)^{2q-1} d\theta\ , \qquad t \ = \ \cos^2\theta\ , \tag{1.3.2}$$

$$B(p,\ q) \ = \ \int_0^{\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\, du\ , \qquad t \ = \ \frac{u}{1+u}\ . \tag{1.3.3}$$

As funções beta e gama são ligadas pela fórmula

$$B(p,\ q) \ = \ \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.3.4}$$

que, para $\mathrm{Re}(p) > 0$, $\mathrm{Re}(q) > 0$ assim se prova:

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2p-1}du\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2q-1}dv \\ &= 4\iint\limits_{u\geq 0,\, v\geq 0} e^{-(u^2+v^2)}u^{2p-1}v^{2q-1}\,dudv\ .\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares $u = r\cos\theta$ $v = r\,\mathrm{sen}\theta$ obtemos

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,\ q)\ .$$

A fórmula (1.3.4) prolonga $B(p,\ q)$ para a região $\mathrm{Re}(p) < 0$, $\mathrm{Re}(q) < 0$ desde que p e q não sejam inteiros negativos ou zero.

Podemos usar (1.3.4) para estabelecer a chamada fórmula dos complementos para a função gama:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}\ , \tag{1.3.5}$$

válida para z não-inteiro, que pode ser escrita em forma mais simétrica pela substituição $z \to z + 1/2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \qquad \text{com } z \neq \text{ semi-inteiro}\ .$$

Usando (1.3.4) e (1.3.3) temos:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z,\ 1-z) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u}\,du\ .$$

Esta integral (para $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$) se calcula pelo método dos resíduos. A função $\frac{u^{z-1}}{1+u}$ para z fixo, é uma função multiforme tendo $u = 0$ e $u = \infty$ como pontos de ramificações e $u = -1$ como pólo simples. Consideramos o caminho fechado C cujas porções (1) e (2) (vide Fig. 1.2) são infinitamente vizinhas do eixo real positivo. Na região delimitada por C o integrando compõe-se de uma infinidade de ramos uniformes distintos, já que por definição, $u^{z-1} = e^{(z-1)\log(u)} = e^{(z-1)[\ln|u|+i\theta+2ik\pi]}$ onde θ é o argumento principal: $0 \leq \theta < 2\pi$.

Escolhemos o ramo principal, isto é, aquele em que $\log(u)$ toma sobre (1) valor real. Assim, sobre (1)

$$u^{z-1} = e^{(z-1)\ln|u|} = |u|^{z-1}$$

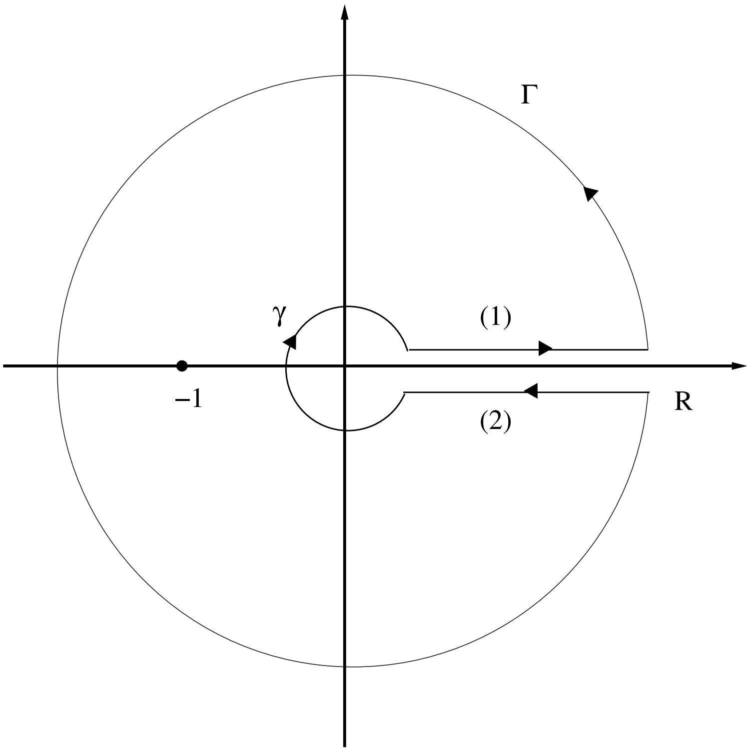

Figura 1.2. Os segmentos de integração γ, Γ, (1) e (2).

e sobre (2)

$$u^{z-1} \;=\; e^{(z-1)[\ln|u|+2i\pi]} \;=\; |u|^{z-1}e^{(z-1)2i\pi}\ .$$

Pelo teorema dos resíduos[2],

$$\begin{aligned}\int_C \frac{u^{z-1}du}{1+u} \;&=\; 2\pi i e^{i(z-1)\pi} \\ &=\; \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}} \left[\int_\gamma \frac{u^{z-1}\,du}{1+u} + \int_\Gamma \frac{u^{z-1}\,du}{1+u} + \int_\epsilon^R \frac{u^{z-1}\,du}{1+u}\ e^{2i\pi(z-1)}\right]\ .\end{aligned}$$

A primeira e a segunda integrais tendem para zero nos limites $\epsilon \to 0$,

[2]Vide e.g., V. Churchill, "Variáveis complexas e suas aplicações". McGraw-Hill do Brasil, (1975).

$R \to \infty$, quando $0 < x < 1$, já que

$$\left| \int_\gamma \frac{u^{z-1}}{1+u}\, du \right| \;\leq\; \frac{2\pi\epsilon^x e^{2\pi|y|}}{1-\epsilon} \;\lessapprox\; C\epsilon^x \,,$$

$$\left| \int_\Gamma \frac{u^{z-1}}{1+u}\, du \right| \;\leq\; \frac{2\pi R^x e^{2\pi|y|}}{R-1} \;\lessapprox\; CR^{x-1} \,.$$

As integrais sobre (1) e (2) contribuem nos limites $\epsilon \to 0$, $R \to \infty$ para o resultado:

$$\int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u}\, du \;=\; \frac{2\pi i e^{i\pi(z-1)}}{1-e^{2i\pi(z-1)}} \;=\; \frac{2\pi i}{e^{-i\pi(z-1)}-e^{i\pi(z-1)}} = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)} \,.$$

para $0 < x < 1$. Temos, pois

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) \;=\; \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)} \qquad \text{para } 0 \,<\, \mathrm{Re}(z) \,<\, 1 \,.$$

Lembremos que $\Gamma(z)\Gamma(z-1)$ é uma função analítica no plano complexo finito, exceto para z inteiro. A função $\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}$ também é analítica nessa região. Como as funções coincidem na faixa $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, podemos concluir que elas coincidem na região comum de analiticidade. Portanto, a fórmula (1.3.5) é válida para todo z finito não inteiro.

Outra fórmula bastante útil é a fórmula de duplicação de Legendre:

$$\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \;=\; \Gamma(2z) \,. \tag{1.3.6}$$

Esse resultado pode ser estabelecido com o auxílio da função beta:

$$B(z,\ z) \;=\; \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \;=\; \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\, dt \,.$$

Efetuando a mudança $t = \frac{1+s}{2}$, temos

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \;=\; \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{z-1}\, ds \;=\; \frac{2}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-s^2)^{z-1}\, ds \,.$$

Fazendo $s^2 = u$ tem-se

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \;=\; \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-u)^{z-1} u^{-\frac{1}{2}}\, du \;=\; \frac{B\left(z,\ \frac{1}{2}\right)}{2^{2z-1}} \,.$$

de onde se deduz

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2z-1}\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} ,$$

ou seja,

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} .$$

Por um argumento similar, poder-se obter uma generalização (devida a Gauss) da fórmula de Legendre:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-nz}\,\Gamma(nz) , \qquad (1.3.7)$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$.

1.4 A Função ψ

A função $\psi(z)$ é definida por

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} . \qquad (1.4.1)$$

Tomando o logaritmo da fórmula (1.2.3) e diferenciando, obtemos

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z+n)} , \qquad (1.4.2)$$

de onde se conclui que $\psi(1) = -\gamma$ (conseqüentemente $\Gamma'(1) = -\gamma$) e que $\psi(z)$ é meromorfa com pólos simples a $z = 0, -1, -2, \ldots$.

Diferenciando (1.1.3) obtem-se a seguinte equação para $\psi(z)$:

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z) ,$$

de onde se deduz

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma ,$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni introduzida acima, de modo que $\psi(n) \sim \ln(n)$ quando $n \to \infty$.

Generalizando a definição (1.1.1) da função gama, definimos as funções gama incompletas:

$$\left.\begin{aligned} \gamma(z,\ a) \quad &:= \quad \int_0^a e^{-t} t^{z-1}\, dt\ , \\ \Gamma(z, a) \quad &:= \quad \int_a^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt\ , \end{aligned}\right. \qquad \mathrm{Re}(z)\ >\ 0,\quad a\ >\ 0\ ,$$

de modo que $\gamma(z,\ a) + \Gamma(z,\ a) = \Gamma(z)$.

Muitas integrais podem ser expressas em termos das funções gama incompletas.

Complemento. Este capítulo pode ser complementado com a teoria do método de ponto de sela aplicado à função gama, originando o desenvolvimento assintótico que generaliza a fórmula de Stirling. Veja a seção 3.6 do livro J. Mathews e R. L. Walker "Mathematical Methods of Physics", W. A. Benjamin, Inc. (1965). [NdEs]