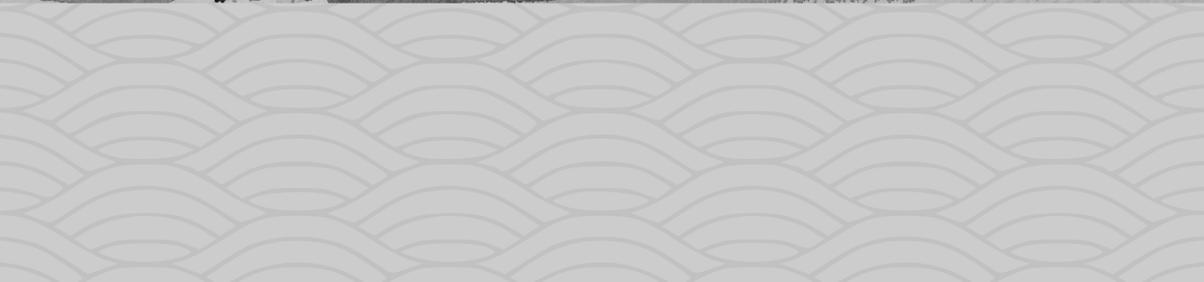


Cálculo

Para Entender e Usar

2ª. Edição



JOÃO BARCELOS NETO

Cálculo

Para Entender e Usar

2^a. Edição



Editora Livraria da Física
São Paulo | 2022

Copyright © 2022 João Barcelos Neto

Editor: JOSÉ ROBERTO MARINHO

Editoração Eletrônica: O AUTOR

Capa: HORIZON SOLUÇÕES EDITORIAIS

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Barcelos Neto, João

Cálculo: para entender e usar / João Barcelos Neto. – 2. ed. – São Paulo, SP: Livraria da Física, 2022.

Bibliografia.

ISBN 978-65-5563-263-7

1. Cálculo - Estudo e ensino 2. Matemática - Estudo e ensino I. Título.

22-128652

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Eliete Marques da Silva – Bibliotecária – CRB-8/9380

ISBN: 978-65-5563-263-7

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil • *Printed in Brazil*



Editora Livraria da Física

Fone/Fax: +55 (11) 3459-4327 / 3936-3413

www.livrariadafisica.com.br



Conselho Editorial

Amílcar Pinto Martins

Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell

Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva

Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes

UNED, Madri

Iran Abreu Mendes

Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford

Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida

Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Universidade Estadual Paulista - UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa

Universidade Federal do Ceará

Maria Luísa Oliveras

Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira

Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia

Universidade de Lisboa

Teresa Vergani

Universidade Aberta de Portugal

A todos os estudantes que tive, direta ou indiretamente.

Prefácio

Nesta segunda edição, quase quinze anos após a primeira, procurei melhorar a sequência dos capítulos e suas seções. Incluí alguns novos tópicos. Aumentei o número de exemplos e exercícios, bem como os resolvidos que estão em um dos apêndices. Coloquei ainda as respostas de todos os outros. O número de páginas também aumentou um pouco.

O objetivo continua o mesmo, ajudar o estudante do ciclo básico no uso do Cálculo, mas sempre dando ênfase à beleza do processo matemático. Para facilitar o estudo, durante o desenvolvimento vou sugerindo os exercícios que podem ser resolvidos.

Da mesma forma que fiz nos meus livros de Física Básica, publicados recentemente pela Editora Livraria da Física, escrevi como se estivesse me dirigindo ao estudante, ou em sala de aula, ou tirando alguma dúvida ou, simplesmente, só conversando. Foi muito agradável.

João Barcelos Neto

Prefácio da primeira edição

Quando dava aulas no ciclo básico sempre preferia turmas em períodos defasados, a fim de que o estudante já viesse sabendo Cálculo. Mesmo assim, notava que embora ele soubesse derivar e integrar, muitas vezes com certa desenvoltura, não sabia raciocinar com o Cálculo. Geralmente não sabia porque estava derivando ou o que estava integrando.

É esta a finalidade deste livro. Ele contém a minha experiência em procurar fazer o estudante raciocinar com o Cálculo. Embora mostre como derivar e integrar, a ênfase não está bem aí. Não há formulários. Na verdade, há poucas fórmulas. Procurei não usar nada em que não fosse mostrado sua origem. Posso até ter exagerado em fazer uma demonstração do Teorema de Pitágoras num dos apêndices e enfatizar que não há necessidade de saber uma fórmula para resolver uma equação do segundo grau. Fiz isso com o intuito de não descurar do principal objetivo do livro, que era priorizar o raciocínio em lugar do

uso irracional de fórmulas prontas. Há muitos exemplos, principalmente em Geometria e Mecânica. Neste caso, procurei refazer alguns exemplos do meu livro de Mecânica, porém usando uma linguagem mais simples.

Este livro é organizado da seguinte maneira. No Capítulo I faço uma apresentação geral do que pretendo desenvolver no livro. O Capítulo II contém uma breve introdução da matemática necessária para começar o desenvolvimento de derivadas e integrais, particularizando ao caso de funções de potência. Prefiri esse caminho a fim de que a complexidade de outros tipos de função, neste momento, não viesse a obscurecer as propriedades fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. Aproveitei a oportunidade para relembrar a relação binominal, que será de grande utilidade durante todo o livro e, particularmente, nesta fase inicial. No Capítulo III é introduzido o conceito de derivada e aplicado ao caso de funções de potência. Aproveito para falar sobre as propriedades gerais da derivação. No Capítulo IV apresento diversas aplicações. Faço menção que resolver uma equação diferencial nem sempre está associado à resolução de uma integral (caso que pretendo deixar claro no Apêndice C). No Capítulo V introduzo integrais, procurando enfatizar que integrais nada mais são do que olhar de maneira diferente uma equação diferencial de primeira ordem. Aproveito, também, para fazer a generalização para integrais duplas e triplas. Discuto várias aplicações. Acho importante mencionar que, até agora, só funções de potência foram consideradas. Derivadas e integrais envolvendo (ou usando) funções trigonométricas, bem como aplicações, estão no Capítulo VI, e o correspondente para funções exponenciais e logarítmicas, no Capítulo VII. Há seis apêndices. No Apêndice A é feita uma revisão, contendo também várias aplicações de vetores. No Apêndice B é apresentada uma demonstração geométrica do teorema de Pitágoras. O Apêndice C contém um exemplo de solução de equação diferencial e no Apêndice D mostro uma forma indutiva da expansão em série de potências. Nos Apêndices E e F há soluções e respostas de alguns exercícios.

Para finalizar, gostaria de dizer que a oportunidade de escrever este livro está relacionada, também, aos três anos em que ministrei a disciplina de Cálculo no Curso de Formação de Oficiais do Corpo de Bombeiros do Rio de Janeiro. Esta foi uma experiência muito prazerosa, ocorrida após a minha aposentadoria. Tive a oportunidade de voltar à minha juventude e fazer novas amizades. O convívio com esses excelentes e simpáticos estudantes motivaram-me a iniciar este trabalho.

Rio de Janeiro, em 24 de dezembro de 2008.

João Barcelos Neto

Sumário

1	Derivadas	15
1.1	Funções e limites	15
1.1.1	Funções	15
1.1.2	Limites	16
1.2	Conceito de derivada	19
1.2.1	Significado geométrico	19
1.2.2	Máximos e mínimos	21
1.2.3	Propriedades da derivada	23
1.3	Derivada da função de potência	26
1.3.1	Alguns exemplos	28
1.3.2	Aplicações gerais	30
1.4	Expansão em série de potências	37
1.4.1	Expansão em série	37
1.4.2	Expansão binomial	38
1.4.3	Aproximação binomial	39
1.5	Exercícios	39
2	Equações diferenciais	45
2.1	As definições de velocidade e aceleração	45
2.1.1	Exemplos de solução de equações diferenciais	46
2.1.2	Equações diferenciais pela segunda lei de Newton	50
2.2	Visão mais ampla das equações diferenciais	54
2.3	Exercícios	56
3	Integrais	59
3.1	Conceito de integração	59
3.2	Integral com função de potência	61
3.2.1	Exemplos de aplicações em geometria	62
3.2.2	Exemplos de aplicação em em Física Básica	70
3.3	Um pouco mais sobre integrais	74
3.3.1	Sobre um processo de integração	74
3.3.2	Funções simétricas e antissimétricas	76
3.4	Integrais duplas, triplas etc.	77
3.4.1	Alguns exemplos	78

3.5	Exercícios	81
4	Funções trigonométricas	87
4.1	Revisão das funções trigonométricas	87
4.1.1	Iniciando com o triângulo retângulo	87
4.1.2	Senos, cossenos, tangente etc. como funções	89
4.1.3	Relações envolvendo funções trigonométricas	90
4.1.4	Alguns valores particulares do seno e cosseno	91
4.2	Derivada de funções trigonométricas	93
4.2.1	Derivada das demais funções trigonométricas	94
4.2.2	Derivada das funções trigonométricas inversas	95
4.2.3	Exemplos	96
4.2.4	Expansão em série do seno e cosseno	100
4.3	Equações diferenciais	101
4.4	Integrais com funções trigonométricas	102
4.4.1	Exemplos do cálculo de algumas integrais	102
4.4.2	Alguns exemplos de geometria	105
4.4.3	Exemplos em Física Básica	110
4.4.4	Resolução de mais algumas integrais	115
4.5	Agulha de Buffon	117
4.6	Exercícios	119
5	Funções exponencial e logarítmica	123
5.1	Introdução	123
5.2	Derivadas	124
5.2.1	Expansões em série e Fórmula de Euler	126
5.2.2	Funções hiperbólicas	127
5.3	Equações diferenciais	128
5.3.1	Oscilador harmônico com o atrito do meio	128
5.3.2	Voltando ao caso sem atrito	129
5.4	Integrais	131
5.4.1	Exemplo em Física Básica	132
5.4.2	Exemplo em Geometria	134
5.4.3	Mais uma integral	136
5.5	Função gama	137
5.6	Sobre a convergência de séries	138
5.6.1	Série geométrica	140
5.6.2	Série harmônica	140
5.6.3	Série p	141
5.6.4	Critério geral de convergência	141
5.7	Exercícios	143

A	Vetores	147
A.1	Conceitos iniciais	147
A.1.1	Adição de vetores	147
A.1.2	Multiplicação do vetor por um escalar	148
A.1.3	Conceito de unitário	148
A.1.4	Vetor em componentes ortogonais	148
A.2	Produtos escalar e vetorial	149
A.2.1	Demonstração de algumas relações trigonométricas	151
A.3	Exercícios	154
B	Demonstrações do teorema de Pitágoras	157
B.1	Primeira demonstração	157
B.2	Segunda demonstração	158
B.3	Terceira demonstração	159
C	Resolução de alguns exercícios	161
D	Respostas dos exercícios não resolvidos	215

Capítulo 1

Derivadas

Neste capítulo veremos a derivada da função de potência. As trigonométricas aparecerão no Capítulo 4 e, no seguinte, as exponencial e logarítmica.

Como foi mencionado no prefácio, este livro corresponde à minha experiência, junto ao estudante do ciclo básico, em pensar com o Cálculo. Veremos como derivar, resolver (algumas) equações diferenciais e integrar, mas evitando o uso exagerado de fórmulas e regras práticas.

Com o intuito de não nos desviarmos do objetivo, alguns assuntos introdutórios serão apresentados de forma simplificada, como funções e limites, que estão na seção seguinte. O conceito de derivada vem logo a seguir.

1.1 Funções e limites

1.1.1 Funções

São, simplesmente, a correspondência entre um número real e outro (funções de variáveis reais). Veja, por favor, o diagrama abaixo, em que f representa a função,

$$\left(\begin{array}{c} \text{número} \\ \text{real} \end{array} \right) \xrightarrow{f} \left(\begin{array}{c} \text{outro n}^{\circ} \\ \text{real} \end{array} \right)$$

Como exemplos, temos

$$y = ax + b \quad \text{reta} \quad (1.1)$$

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{parábola} \quad (1.2)$$

sendo a , b e c parâmetros constantes. E outras funções, que correspondem a figuras geométricas conhecidas,

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{círculo} \quad (1.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elipse} \quad (1.4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{hipérbole} \quad (1.5)$$

Só trataremos de funções contínuas ou nos intervalos em que são contínuas. De forma simples, significa que não há variações bruscas quando se passa de um ponto a outro. Por exemplo, a função $f(x) = 1/x$ não é contínua em $x = 0$.

1.1.2 Limites

Começemos com a função (uma reta),

$$f(x) = 2x + 1$$

Seu valor para alguns pontos particulares são

$$f(1) = 3$$

$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = -1 \quad \text{etc.}$$

Podemos dizer, também, que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é 3, quando tende a 0 é 1 etc. Matematicamente, escrevemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= -1 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Há alguma diferença entre as duas notações? Para esses casos particulares, a resposta é não. Poderiam ser usadas indistintamente. O conceito de limite foi apresentado (de forma bem simples) como sendo o valor da função quando a variável tende certo número (coincide com a definição rigorosa nos pontos em que é contínua). A notação acima torna-se mais apropriada no caso de a variável e (ou) a função tenderem a um símbolo e não a um número. Por exemplo, considerando a mesma função inicial, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Seja, agora, o seguinte exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

A quantidade $0/0$ não está associada, de forma absoluta, a nenhum número. Não é 1 (ou pode não ser 1). Sabemos que zero dividido por qualquer número (diferente de zero) é zero, mas qualquer número (diferente de zero) dividido por zero dá infinito. Assim, $0/0$ pode ser qualquer número entre zero e infinito. É uma quantidade indeterminada, chamada *símbolo de indeterminação*. Existem outros (já veremos). O valor a que $0/0$ está relacionado vai depender do tipo de função e do ponto considerado. Para o caso acima, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2\end{aligned}$$

O limite estava escondido devido à presença do fator $x - 1$ no numerador e denominador. O que fizemos foi identificar a origem da indeterminação e fazer a simplificação. Só enfatizando, não quer dizer que $0/0$ seja igual a 2. Não é igual a nada (é uma quantidade indeterminada). Mostramos que é 2 para o caso particular da função quando a variável tende a 1. Em outros casos, o resultado pode ser outro. Vejamos,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{0}{0}$$

Como -2 é raiz de $x^3 + 8$, podemos reescrevê-lo através do fator $(x + 2)$. Assim, o primeiro termo do outro fator deve ser x^2 para gerar o x^3 ; e o último, 4 para gerar o 8. Vemos que não podem gerar termos em x e x^2 . Para evitar aqueles com x , este fator deve também conter $-2x$, que cancelará o que vai ser gerado ao multiplicar x por 4 e ele por 2. À mesma conclusão chegaríamos pensando no cancelamento de termos com x^2 .

Para não deixar nenhuma dúvida, logo no início do livro, façamos a verificação de maneira mais formal, partindo de

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 + ax + 4)$$

em que a é um parâmetro a ser determinado. Desenvolvamos o lado direito,

$$\begin{aligned}x^3 + 8 &= (x + 2)(x^2 + ax + 4) \\ &= x^3 + ax^2 + 4x + 2x^2 + 2ax + 8 \\ &= x^3 + (a + 2)x^2 + 2(2 + a)x + 8\end{aligned}$$

Como vemos, realmente, para $a = -2$ haverá o cancelamento de termos em x e x^2 (que não aparecem no lado esquerdo).

Assim, completamos a obtenção do limite,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = 12\end{aligned}$$

Uma observação

A maneira como procedemos não significa que tenha de ser a mesma em todos os casos. O próprio exemplo anterior admite um tratamento até mais simples, mudando a variável para que a nova tenda a zero. Façamos, então, $x + 2 = u$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u - 2)^3 + 8}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3 - 6u^2 + 12u}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{12u}{u} = 12\end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha, foi feito o desenvolvimento de $(u - 2)^3$ usando, por exemplo, que $(u - 2)^3 = (u - 2)^2(u - 2)$. Na passagem seguinte, desprezaram-se u^3 e $-6u^2$ perante $12u$ porque, quando $u \rightarrow 0$, os termos cúbicos e quadráticos tendem a zero mais rapidamente que os lineares.

Naturalmente, em lugar de desprezar u^3 e $-6u^2$ da segunda para a terceira linha, poderíamos ter feito a simplificação do u ,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u - 2)^3 + 8}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3 - 6u^2 + 12u}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} (u^2 - 6u + 12) = 12\end{aligned}$$

Outro símbolo de indeterminação

Vejam os mais um exemplo com outro tipo de indeterminação,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{8x^2 + 5x + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Também, ∞/∞ pode ser qualquer valor entre zero e infinito. Vamos resolver a indeterminação usando procedimento semelhante ao anterior. Quando $x \rightarrow \infty$, os termos quadráticos divergem mais rapidamente que os demais. Podemos, então, manter apenas os termos quadráticos. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{8x^2 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{8x^2} = \frac{3}{8}$$

Os símbolos de indeterminação

Os que lidamos até agora foram $0/0$ e ∞/∞ . Existem outros, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 e 1^∞ , que aparecerão quando estudarmos outras funções. A quantidade 0^∞ não é indeterminação (qualquer número menor que 1 elevado a infinito

dá zero, logo $0^\infty = 0$). Acho só oportuno fazer um comentário sobre o símbolo de indeterminação 1^∞ . Não há indeterminação para o caso de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1$$

Entretanto, poderia ser qualquer valor se tivéssemos,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)^x = 1^\infty$$

Antes de passar para a seção seguinte, sugiro ao estudante fazer o exercício 1.

1.2 Conceito de derivada

Seja $f(x)$ uma função contínua. Tomemos $f(x)$ num ponto deslocado de Δx . A variação Δf entre x e $x + \Delta x$ é

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (1.6)$$

A derivada de $f(x)$ no ponto x , que é denotada por $f'(x)$ ou df/dx , é definida pelo limite de $\Delta f/\Delta x$ quando Δx tende a zero,

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.7)$$

Na segunda notação, df e dx podem ser vistos como variações infinitesimais. Nota-se que a definição de derivada leva à indeterminação $0/0$. Veremos como resolvê-la para cada tipo de função que formos estudando. Neste capítulo, ficaremos restritos à função de potência.

Logo no início da Física Básica, o conceito de derivada aparece nas definições de velocidade e aceleração. Veremos um pouco mais de detalhes no final do capítulo. Seu uso no tratamento de alguns princípios físicos será apresentado no Capítulo 2. Falemos, agora, do seu significado geométrico.

1.2.1 Significado geométrico

Veja, por favor, a Figura 1.1. A razão $\Delta f/\Delta x$ é a tangente do ângulo formado pelo segmento de reta \overline{PQ} com o eixo x (ângulo β). Chamemos esta tangente, simplesmente, de *inclinação* da reta que passa por PQ .

Quando fazemos $\Delta x \rightarrow 0$, o ponto Q aproxima-se de P e, consequentemente, a reta que passa por PQ tende à tangente à curva em P , como aparece ilustrado na Figura 1.2 (o ângulo β tende ao ângulo α). Assim, geometricamente, a derivada no ponto P corresponde à inclinação da curva neste ponto. É a tangente do ângulo que a reta tangente faz com o eixo x .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \tan \alpha \quad (1.8)$$

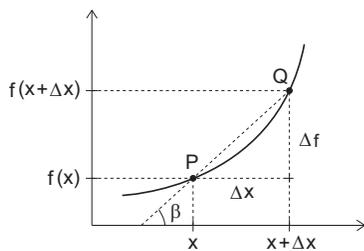


Figura 1.1: Gráfico de certa função $f(x)$ versus x

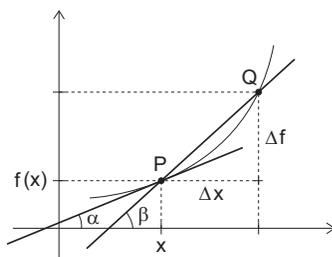


Figura 1.2: Significado geométrico da derivada