Cálculo

Para Entender e Usar

2ª. Edição

João Barcelos Neto

Cálculo
Para Entender e Usar

2ª. Edição

Editora Livraria da Física
São Paulo | 2022

Editor: José Roberto Marinho
Editoração Eletrônica: O Autor
Capa: Horizon Soluções Editoriais

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Barcelos Neto, João

Cálculo: para entender e usar / João Barcelos Neto. – 2. ed. – São Paulo, SP: Livraria da Física, 2022.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-263-7

1. Cálculo - Estudo e ensino 2. Matemática - Estudo e ensino I. Título.

22-128652 CDD–510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Eliete Marques da Silva – Bibliotecária – CRB–8/9380

ISBN: 978-65-5563-263-7

Impresso no Brasil • *Printed in Brazil*

Editora Livraria da Física
Fone/Fax: +55 (11) 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafisica.com.br

A todos os estudantes que tive, direta ou indiretamente.

Prefácio

Nesta segunda edição, quase quinze anos após a primeira, procurei melhorar a sequência dos capítulos e suas seções. Incluí alguns novos tópicos. Aumentei o número de exemplos e exercícios, bem como os resolvidos que estão em um dos apêndices. Coloquei ainda as respostas de todos os outros. O número de páginas também aumentou um pouco.

O objetivo continua o mesmo, ajudar o estudante do ciclo básico no uso do Cálculo, mas sempre dando ênfase à beleza do processo matemático. Para facilitar o estudo, durante o desenvolvimento vou sugerindo os exercícios que podem ser resolvidos.

Da mesma forma que fiz nos meus livros de Física Básica, publicados recentemente pela Editora Livraria da Física, escrevi como se estivesse me dirigindo ao estudante, ou em sala de aula, ou tirando alguma dúvida ou, simplesmente, só conversando. Foi muito agradável.

João Barcelos Neto

Prefácio da primeira edição

Quando dava aulas no ciclo básico sempre preferia turmas em períodos defasados, a fim de que o estudante já viesse sabendo Cálculo. Mesmo assim, notava que embora ele soubesse derivar e integrar, muitas vezes com certa desenvoltura, não sabia raciocinar com o Cálculo. Geralmente não sabia porque estava derivando ou o que estava integrando.

É esta a finalidade deste livro. Ele contém a minha experiência em procurar fazer o estudante raciocinar com o Cálculo. Embora mostre como derivar e integrar, a ênfase não está bem aí. Não há formulários. Na verdade, há poucas fórmulas. Procurei não usar nada em que não fosse mostrado sua origem. Posso até ter exagerado em fazer uma demostração do Teorema de Pitágoras num dos apêndices e enfatizar que não há necessidade de saber uma fórmula para resolver uma equação do segundo grau. Fiz isso com o intuito de não descuidar do principal objetivo do livro, que era priorizar o raciocínio em lugar do uso irracional de fórmulas prontas. Há muitos exemplos, principalmente em Geometria e Mecânica. Neste caso, procurei refazer alguns exemplos do meu livro de Mecânica, porém usando uma linguagem mais simples.

Este livro é organizado da seguinte maneira. No Capítulo I faço uma apresentação geral do que pretendo desenvolver no livro. O Capítulo II contém uma breve introdução da matemática necessária para começar o desenvolvimento de derivadas e integrais, particularizando ao caso de funções de potência. Preferi esse caminho a fim de que a complexidade de outros tipos de função, neste momento, não viesse a obscurecer as propriedades fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. Aproveitei a oportunidade para relembrar a relação binominal, que será de grande utilidade durante todo o livro e, particularmente, nesta fase inicial. No Capítulo III é introduzido o conceito de derivada e aplicado ao caso de funções de potência. Aproveito para falar sobre as propriedades gerais da derivação. No Capítulo IV apresento diversas aplicações. Faço menção que resolver uma equação diferencial nem sempre está associado à resolução de uma integral (caso que pretendo deixar claro no Apêndice C). No Capítulo V introduzo integrais, procurando enfatizar que integrais nada mais são do que olhar de maneira diferente uma equação diferencial de primeira ordem. Aproveito, também, para fazer a generalização para integrais duplas e triplas. Discuto várias aplicações. Acho importante mencionar que, até agora, só funções de potência foram consideradas. Derivadas e integrais envolvendo (ou usando) funções trigonométricas, bem como aplicações, estão no Capítulo VI, e o correspondente para funções exponenciais e logarítmicas, no Capítulo VII. Há seis apêndices. No Apêndice A é feita uma revisão, contendo também várias aplicações de vetores. No Apêndice B é apresentada uma demonstração geométrica do teorema de Pitágoras. O Apêndice C contém um exemplo de solução de equação diferencial e no Apêndice D mostro uma forma indutiva da expansão em série de potências. Nos Apêndices E e F há soluções e respostas de alguns exercícios.

Para finalizar, gostaria de dizer que a oportunidade de escrever este livro está relacionada, também, aos três anos em que ministrei a disciplina de Cálculo no Curso de Formação de Oficiais do Corpo de Bombeiros do Rio de Janeiro. Esta foi uma experiência muito prazerosa, ocorrida após a minha aposentadoria. Tive a oportunidade de voltar à minha juventude e fazer novas amizades. O convívio com esses excelentes e simpáticos estudantes motivaram-me a iniciar este trabalho.

Rio de Janeiro, em 24 de dezembro de 2008.

João Barcelos Neto

Sumário

Capítulo 1

Derivadas

Neste capítulo veremos a derivada da função de potência. As trigonométricas aparecerão no Capítulo 4 e, no seguinte, as exponencial e logarítmica.

Como foi mencionado no prefácio, este livro corresponde à minha experiência, junto ao estudante do ciclo básico, em pensar com o Cálculo. Veremos como derivar, resolver (algumas) equações diferenciais e integrar, mas evitando o uso exagerado de fórmulas e regras práticas.

Com o intuito de não nos desviarmos do objetivo, alguns assuntos introdutórios serão apresentados de forma simplificada, como funções e limites, que estão na seção seguinte. O conceito de derivada vem logo a seguir.

1.1 Funções e limites

1.1.1 Funções

São, simplesmente, a correspondência entre um número real e outro (funções de variáveis reais). Veja, por favor, o diagrama abaixo, em que f representa a função,

$$\begin{pmatrix} \text{número} \\ \text{real} \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \text{outro n}^{\text{o}} \\ \text{real} \end{pmatrix}$$

Como exemplos, temos

$$y = a\,x + b \qquad \text{reta} \tag{1.1}$$
$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \text{parábola} \tag{1.2}$$

sendo a, b e c parâmetros constantes. E outras funções, que correspondem a figuras geométricas conhecidas,

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \text{círculo} \tag{1.3}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{elipse} \tag{1.4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{hipérbole} \tag{1.5}$$

Só trataremos de funções contínuas ou nos intervalos em que são contínuas. De forma simples, significa que não há variações bruscas quando se passa de um ponto a outro. Por exemplo, a função $f(x) = 1/x$ não é contínua em $x = 0$.

1.1.2 Limites

Comecemos com a função (uma reta),

$$f(x) = 2x + 1$$

Seu valor para alguns pontos particulares são

$$\begin{aligned} &f(1) = 3 \\ &f(0) = 1 \\ &f(-1) = -1 \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Podemos dizer, também, que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é 3, quando tende a 0 é 1 etc. Matematicamente, escrevemos

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \\ &\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \\ &\lim_{x \to -1} f(x) = -1 \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Há alguma diferença entre as duas notações? Para esses casos particulares, a resposta é não. Poderiam ser usadas indistintamente. O conceito de limite foi apresentado (de forma bem simples) como sendo o valor da função quando a variável tende certo número (coincide com a definição rigorosa nos pontos em que é contínua). A notação acima torna-se mais apropriada no caso de a variável e (ou) a função tenderem a um símbolo e não a um número. Por exemplo, considerando a mesma função inicial, temos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Seja, agora, o seguinte exemplo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

A quantidade $0/0$ não está associada, de forma absoluta, a nenhum número. Não é 1 (ou pode não ser 1). Sabemos que zero dividido por qualquer número (diferente de zero) é zero, mas qualquer número (diferente de zero) divido por zero dá infinito. Assim, $0/0$ pode ser qualquer número entre zero e infinito. É uma quantidade indeterminada, chamada *símbolo de indeterminação*. Existem outros (já veremos). O valor a que $0/0$ está relacionado vai depender do tipo de função e do ponto considerado. Para o caso acima, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\,(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x+1) \,=\, 2 \end{aligned}$$

O limite estava escondido devido à presença do fator $x-1$ no numerador e denominador. O que fizemos foi identificar a origem da indeterminação e fazer a simplificação. Só enfatizando, não quer dizer que $0/0$ seja igual a 2. Não é igual a nada (é uma quantidade indeterminada). Mostramos que é 2 para o caso particular da função quando a variável tende a 1. Em outros casos, o resultado pode ser outro. Vejamos,

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \frac{0}{0}$$

Como -2 é raiz de x^3+8, podemos reescrevê-lo através do fator $(x+2)$. Assim, o primeiro termo do outro fator deve ser x^2 para gerar o x^3; e o último, 4 para gerar o 8. Vemos que não podem gerar termos em x e x^2. Para evitar aqueles com x, este fator deve também conter $-2x$, que cancelará o que vai ser gerado ao multiplicar x por 4 e ele por 2. À mesma conclusão chegaríamos pensando no cancelamento de termos com x^2.

Para não deixar nenhuma dúvida, logo no início do livro, façamos a verificação de maneira mais formal, partindo de

$$x^3+8=(x+2)(x^2+ax+4)$$

em que a é um parâmetro a ser determinado. Desenvolvamos o lado direito,

$$\begin{aligned} x^3+8 &= (x+2)(x^2+ax+4) \\ &= x^3+ax^2+4x+2x^2+2ax+8 \\ &= x^3+(a+2)\,x^2+2\,(2+a)\,x+8 \end{aligned}$$

Como vemos, realmente, para $a=-2$ haverá o cancelamento de termos em x e x^2 (que não aparecem no lado esquerdo).

Assim, completamos a obtenção do limite,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2} (x^2-2x+4) \,=\, 12 \end{aligned}$$

Uma observação

A maneira como procedemos não significa que tenha de ser a mesma em todos os casos. O próprio exemplo anterior admite um tratamento até mais simples, mudando a variável para que a nova tenda a zero. Façamos, então, $x+2=u$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2} &= \lim_{u\to 0}\frac{(u-2)^3+8}{u}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{u^3-6u^2+12u}{u}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{12u}{u} = 12\end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha, foi feito o desenvolvimento de $(u-2)^3$ usando, por exemplo, que $(u-2)^3=(u-2)^2(u-2)$. Na passagem seguinte, desprezaram-se u^3 e $-6u^2$ perante $12u$ porque, quando $u\to 0$, os termos cúbicos e quadráticos tendem a zero mais rapidamente que os lineares.

Naturalmente, em lugar de desprezar u^3 e $-6u^2$ da segunda para a terceira linha, poderíamos ter feito a simplificação do u,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2} &= \lim_{u\to 0}\frac{(u-2)^3+8}{u}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{u^3-6u^2+12u}{u}\\ &= \lim_{u\to 0}\left(u^2-6u+12\right) = 12\end{aligned}$$

Outro símbolo de indeterminação

Vejamos mais um exemplo com outro tipo de indeterminação,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7}{8x^2+5x+2}=\frac{\infty}{\infty}$$

Também, ∞/∞ pode ser qualquer valor entre zero e infinito. Vamos resolver a indeterminação usando procedimento semelhante ao anterior. Quando $x\to\infty$, os termos quadráticos divergem mais rapidamente que os demais. Podemos, então, manter apenas os termos quadráticos. Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7}{8x^2+5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{8x^2}=\frac{3}{8}$$

Os símbolos de indeterminação

Os que lidamos até agora foram $0/0$ e ∞/∞. Existem outros, $0\times\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 e 1^∞, que aparecerão quando estudarmos outras funções. A quantidade 0^∞ não é indeterminação (qualquer número menor que 1 elevado a infinito dá zero, logo $0^{\infty} = 0$). Acho só oportuno fazer um comentário sobre o símbolo de indeterminação 1^{∞}. Não há indeterminação para o caso de

$$\lim_{x \to \infty} 1^x = 1$$

Entretanto, poderia ser qualquer valor se tivéssemos,

$$\lim_{x \to \infty} g(x)^x = 1^{\infty}$$

Antes de passar para a seção seguinte, sugiro ao estudante fazer o exercício 1.

1.2 Conceito de derivada

Seja $f(x)$ uma função contínua. Tomemos $f(x)$ num ponto deslocado de Δx. A variação Δf entre x e $x + \Delta x$ é

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1.6}$$

A derivada de $f(x)$ no ponto x, que é denotada por $f'(x)$ ou df/dx, é definida pelo limite de $\Delta f/\Delta x$ quando Δx tende a zero,

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.7}$$

Na segunda notação, df e dx podem ser vistos como variações infinitesimais. Nota-se que a definição de derivada leva à indeterminação $0/0$. Veremos como resolvê-la para cada tipo de função que formos estudando. Neste capítulo, ficaremos restritos à função de potência.

Logo no início da Física Básica, o conceito de derivada aparece nas definições de velocidade e aceleração. Veremos um pouco mais de detalhes no final do capítulo. Seu uso no tratamento de alguns princípios físicos será apresentado no Capítulo 2. Falemos, agora, do seu significado geométrico.

1.2.1 Significado geométrico

Veja, por favor, a Figura 1.1. A razão $\Delta f/\Delta x$ é a tangente do ângulo formado pelo segmento de reta $\overline{PQ}$ com o eixo x (ângulo β). Chamemos esta tangente, simplesmente, de *inclinação* da reta que passa por PQ.

Quando fazemos $\Delta x \to 0$, o ponto Q aproxima-se de P e, consequentemente, a reta que passa por PQ tende à tangente à curva em P, como aparece ilustrado na Figura 1.2 (o ângulo β tende ao ângulo α). Assim, geometricamente, a derivada no ponto P corresponde à inclinação da curva neste ponto. É a tangente do ângulo que a reta tangente faz com o eixo x.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \tan \alpha \tag{1.8}$$

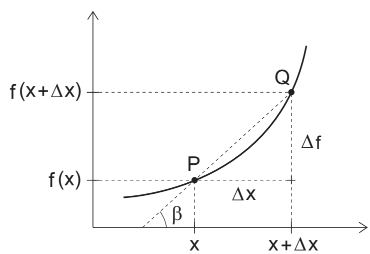

Figura 1.1: Gráfico de certa função $f(x)$ versus x

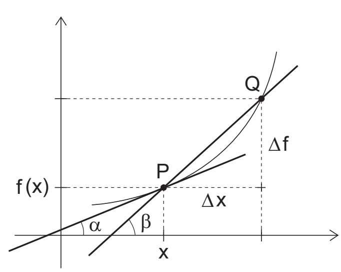

Figura 1.2: Significado geométrico da derivada