Álgebra Abstrata Básica

Volume I

Textuniversitários 8

Vandenberg Lopes Vieira

Álgebra Abstrata Básica

Volume I

Editora Livraria da Física
São Paulo – 2021

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Vieira, Vandenberg Lopes
Álgebra abstrata básica : volume I / Vandenberg Lopes Vieira. – 1. ed. – São Paulo : Livraria da Física, 2021. – (Textuniversitários ; 8)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-087-9

1. Álgebra - Estudo e ensino 2. Matemática I. Título II. Série.

21-61740 CDD-512

Índices para catálogo sistemático:

1. Álgebra : Matemática 512

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

ISBN 978-65-5563-087-9

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafísica.com.br

À minha esposa Kátia e à minha filha Heloísa

DEDICO

Prefácio

Quando ensinamos um componente de Álgebra Abstrata, em qualquer nível, básico ou avançado, somos frequentemente indagados sobre possíveis aplicações dos assuntos abordados em problemas reais, do cotidiano. Não muito tempo atrás, nós, professores, limitaríamos a destacar aplicações a outros ramos da Matemática. Isto, de fato, confrontava-se com o que se observa na Álgebra Linear, com suas aplicações em outras áreas, além daquelas consideradas na própria Matemática, é claro. No entanto, nos dias atuais, com o avanço da tecnologia e das ciências, elementos de estruturas algébricas têm se mostrado extremamente importantes para o conhecimento científico. Isto se torna evidente por suas aplicações em áreas importantes, tais como em Ciência da Computação, Física e Teoria dos Códigos, por exemplo. Neste contexto, destaca-se a relação de resultados que une a Álgebra e a Teoria dos Números. Tal relação desempenha um papel cada vez mais importante na computação e nas comunicações, conforme evidenciado pelas aplicações desses resultados na Criptografia e na Teoria da Codificação. Em particular, na Teoria dos Códigos Clássicos, alguns resultados sobre grupos e anéis têm sido aplicados na construção de códigos corretores de erros no plano Euclidiano, como podemos constatar nas referências [26], [27] e [35]. Também, mais recentemente, na computação quântica, há o processo de construção de determinados grupos (discretos) a partir de polígonos hiperbólicos regulares. Neste caso, elementos geométricos (hiperbólicos) e algébricos (grupos) se completam de forma a construir códigos quânticos topológicos, como podemos comprovar em [1] e [28].

Depois que o livro *Álgebra Abstrata para Licenciatura*, uma obra de nossa autoria, foi lançado em 2013 (já em sua segunda edição, 2015), sentimos a necessidade de escrever um texto que contemplasse temas mais substanciais em estruturas algébricas que, em geral, não são estudados em cursos de Licenciatura em Matemática. Tal necessidade deu-se por meio de inúmeras sugestões que recebemos de leitores: alunos e professores. Obviamente, os temas sugeridos, por motivos justificáveis, não devem, a nosso ver, ser abordados em textos destinados ao estudo inicial de grupos e anéis, como, por exemplo, tópicos sobre grupos solúveis e Teoria de Galois. Por esta razão, este livro se resulta de acréscimo de alguns temas importantes à obra supracitada. Mesmo que não haja um consenso sobre quais assuntos devem compor um texto de Álgebra com tópicos, digamos assim, mais avançados, contemplamos aqueles que julgamos indispensáveis para uma formação sólida matemática. Também incluímos tópicos básicos e específicos da Álgebra Linear, o ambiente natural de estudo de espaços vetoriais.

Objetivos do livro

A Matemática é cercada de rigor e formalismo peculiares que lhe dão uma beleza à parte. Particularmente, em Álgebra Abstrata, manipulação de teoremas, símbolos e expressões são coisas que ocorrem frequentemente e, às vezes, o nível de abstração de um determinado conteúdo é um obstáculo ao aprendizado, principalmente àqueles estudantes que têm mais afinidade com disciplinas de Cálculo. Ciente disto, cercamo-nos de alguns cuidados a fim de que o livro atinja seus objetivos, cuidados esses que, sob nossa ótica, devem nortear um texto que tenha um caráter didático, ou ao menos se proponha a tê-lo. Acreditamos que isso possa fazer com que cada leitor tenha uma leitura agradável e que se sinta confortável com o formalismo matemático.

Ao escrevermos este livro, tivemos a intenção de apresentar um texto básico que abordasse os principais tópicos de Álgebra Abstrata, apresentados de forma mais didática e acessível que conseguíssemos, tanto para alunos de Matemática (licenciatura e/ou bacharelado) quanto para alunos de Ciência da Computação e Engenharia Elétrica que, de alguma forma, tenham interesse em estudar tópicos comuns de suas respectivas áreas. Isto implica estruturar o livro com assuntos elementares das Teorias de Grupos e Anéis, os que são destacados logo em seus capítulos iniciais. Desta maneira, o livro servirá como texto base aos alunos que irão estudar Álgebra Abstrata pela primeira vez, àqueles que estão em fase inicial e, de certa forma, para os pós-graduandos. Essencialmente, o livro objetiva estudar tópicos básicos com foco na Licenciatura e Bacharelado em Matemática, dando suporte também aos alunos do Mestrado.

Os pré-requisitos necessários para a leitura do livro são basicamente alguns tópicos sobre álgebra matricial e sistemas lineares, usados amplamente na Álgebra Linear. Decidimos não colocar nenhuma seção a respeito. Daremos aqui dois motivos para isto. Primeiramente, o livro não é específico em Álgebra Linear, mesmo que aborde uma parte considerável dos assuntos tratados nela. O segundo é que, geralmente, um componente curricular de Álgebra Linear tem como pré-requisito outro componente que versa sobre álgebra matricial juntamente com sistemas lineares. Isto poderia também ser aplicado aos conceitos de função e conjunto. No entanto, consideramos um capítulo introdutório com estes conceitos, pois, o que nele se estuda vai além de simples contas e definições. Resumidamente, o leitor terá mais proveito se tiver maturidade matemática de um estudante de segundo ano de curso. Melhor ainda, se ele já tiver feito um curso de introdução em Teoria dos Números.

A Álgebra Linear aborda assuntos ideais para o estudante aprender como desenvolver um tópico com precisão, com o rigor exigido pela Matemática. Em muitas situações, é o primeiro contato do aluno com definições, teoremas e provas, formalmente apresentados. Isto, de fato, era feito nos Cursos de Cálculo Diferencial. No entanto, parece que essas questões escaparam desses cursos. Por outro lado, um curso básico em Teoria dos Números, componente obrigatório na grade curricular da maioria dos cursos de Matemática, auxilia significativamente o leitor a assimilar os resultados necessários de aritmética (incluindo a modular). Eles são essenciais para o estudo de grupos finitos.

Outra coisa importante refere-se às definições e resultados. Em geral, após cada um deles, há uma quantidade considerável de exemplos. Existem mais de 650 deles ao longo de todo o livro (incluindo os três volumes). O objetivo disso é fazer com que o leitor possa assimilar as ideias dadas em cada definição e resultado. Eles são dispostos seguindo um determinado grau de dificuldade, e são solucionados com detalhes suficientes a fim de auxiliar o leitor na resolução dos exercícios propostos. Isto também é verdade para as demonstrações dos teoremas, lemas e proposições. Acreditamos que essas questões são indispensáveis para que o livro seja útil ao fim que lhe é designado.

O conteúdo do livro

Visto que o livro contém mais de 1600 páginas, preferimos dividi-lo em três volumes. O Volume I é dividido em três partes, e é composto de nove capítulos. Por isso, ele abrange a parte preliminar, composta pelos dois primeiros capítulos, e toda a parte dedicada à Teoria dos Grupos. O Volume II vai do Capítulo 10 ao Capítulo 17 e contempla a parte da Teoria dos Anéis, Teoria dos Módulos e Espaços Vetoriais. Por fim, o Volume III inicia com o Capítulo 18, indo até o Capítulo 20 e contém a parte mais avançada da Teoria dos Corpos. Vejamos a seguir uma descrição de cada um dos capítulos.

O Capítulo 1 traz uma revisão dos conceitos e resultados básicos de conjunto, relação e função. Já o Capítulo 2 apresenta os resultados principais sobre os números inteiros e os números complexos. A seção dedicada ao conjunto dos números inteiros descreve resultados relevantes que frequentemente são usados em outros capítulos. Destacam-se, especialmente, o Princípio da Boa Ordenação, o Princípio de Indução Finita, o conceito de divisibilidade (incluindo o máximo divisor comum) e, como não poderia deixar de ser, o Algoritmo da Divisão e resultados básicos sobre números primos. O leitor que porventura venha a estudar outros capítulos se convencerá da importância de tais conceitos. Quanto ao conjunto dos números complexos, abordamos resultados que, em geral, são vistos em um curso básico. Especialmente, consideramos o conjunto das raízes n-ésimas da unidade. Estes dois capítulos compõem a Parte I.

No Capítulo 3, iniciamos o estudo sobre estruturas algébricas, considerando, inicialmente, o conceito de grupo. Antes deste, há uma seção que aborda o que de fato é necessário ao desenvolvimento do capítulo. Referimo-nos ao conceito de operação binária, apresentado juntamente com algumas notações que são frequentemente usadas para representá-las. Também, destacamos as principais propriedades relacionadas às operações, tais como associatividade, distributividade, existência de elemento neutro e elementos invertíveis. Após isso, o conceito de grupo segue naturalmente.

Dedicamos o Capítulo 4 ao estudo de subgrupos. Seria até possível unir os resultados deste capítulo aos do anterior. No entanto, por uma questão de ordem didática (considerando a quantidade de resultados em um só capítulo), decidimos tratá-los em capítulos distintos. Ele se inicia com os resultados básicos e indo até grupos quocientes.

No Capítulo 5, tratamos dos conceitos relativos a homomorfismo de grupos. Os resultados principais sobre o assunto, especificamente, aqueles sobre o Teorema Fundamental dos Homomorfismos, foram trabalhados de forma detalhada a fim de que o leitor obtenha familiaridade com o processo de construção do epimorfismo inicial. Após isso, apresentamos quatro seções que abordam grupos simples, produtos direto e externo de grupos, grupo de automorfismos de um grupo e produto semidireto de dois grupos, esta última bastante sucinta.

O Capítulo 6 apresenta os grupos alternados (ou grupo das permutações pares). É um capítulo que aborda temas importantes da Teoria dos Grupos, imprescindível no estudo sobre solubilidade de equações algébricas por radicais, por exemplo. Ele também é uma forma de aprofundar o estudo sobre grupos de permutações. Isto finaliza a Parte II.

No Capítulo 7, apresentamos resultados básicos sobre grupos abelianos, sendo o Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitamente Gerados o principal deles. Já no Capítulo 8, consideramos os Teoremas de Sylow, resultados essenciais no estudo dos grupos finitos. Por fim, dedicamos o Capítulo 9 ao estudo dos tópicos interessantes relativos a grupos solúveis e grupos nilpotentes. Com estes três últimos capítulos, encerramos a Parte III e, por conseguinte, o Volume I.

No Capítulo 10, o primeiro do Volume II, iniciamos o estudo básico sobre anéis. Seu desenvolvimento é bastante similar aos dos Capítulos 3, 4 e 5. A partir do conceito de anel, há uma sequência natural de outros relacionados, tais como subanel, domínio, corpo, homomorfismo de anéis, ideal e anel quociente.

No Capítulo 11, estudamos anéis de polinômios, como uma continuação do Capítulo 10. A importância deste tema e os detalhes apresentados justificam o fato de ele ter sido destacado em um capítulo à parte. Apresentamos resultados clássicos sobre raízes, fatores de polinômios e polinômios irredutíveis sobre corpos. Ao estudá-lo, o leitor irá perceber que certos resultados relacionados a polinômios irredutíveis são similares a alguns sobre os números primos: existência de máximo divisor comum de polinômios, Identidade de Bachet-Bézout e fatoração de um dado polinômio como produto de polinômios irredutíveis levarão o leitor a recordar o Capítulo 2. Estes dois capítulos constituem a Parte IV.

No Capítulo 12, o único da Parte V, há resultados mais substanciais da Teoria dos Anéis, no qual consideramos três importantes tipos de domínios: domínio de ideais principais (DIP), domínio de fatoração única (DFU) e domínio Euclidiano (DE). Iniciamos com domínios de ideais principais com resultados similares a alguns obtidos sobre o conjunto dos números inteiros (um exemplo importante deles). Nesta parte, destaca-se, especialmente, o tratamento dado aos domínios quadráticos, dotados da função norma. Em seguida, são considerados os domínios de fatoração única, começando com um breve histórico destacando a importância desses domínios, não apenas para a Álgebra em si, mas também para a Teoria dos Números. Seu desenvolvimento se dá objetivando mostrar que todo DIP é um DFU, e que a propriedade de fatoração única em um domínio pode ser estendida para anéis de polinômios. O estudo dele se completa com domínios Euclidianos.

A Parte VI contém cinco capítulos. No Capítulo 13, iniciamos o estudo sobre $\mathcal{A}$-módulos. É um ensaio introdutório, mas que aborda temas importantes para uma análise mais avançada. Tomando por base resultados deste capítulo, dedicamos o Capítulo 14 ao estudo de espaços vetoriais e o Capítulo 15, que aborda temas sobre autovetores e autovalores, é uma continuidade do Capítulo 14; assim como é o Capítulo 16, no qual estudamos as principais formas canônicas de operadores lineares. Por fim, no Capítulo 17, retornamos ao estudo sobre módulos, considerando-os sobre domínios de ideais principais. Isto finaliza o Volume II.

O Volume III é composto apenas pela Parte VII, que contém os três últimos Capítulos. No Capítulo 18, tratamos de conceitos mais avançados da Teoria dos Corpos. Abordamos resultados sobre extensões de corpos e finalizamos com aplicações de alguns desses resultados a problemas geométricos importantes. O Capítulo 19 dá continuidade ao anterior. Nele, estudamos, resumidamente, anéis de inteiros algébricos, destacando, especialmente, os anéis de inteiros de corpos quadráticos e corpos ciclotômicos. Finalmente, no Capítulo 20, consideramos os elementos básicos da Teoria de Galois.

Cabe ainda uma palavra adicional sobre a citação de cada resultado ao longo dos três volumes. A fim de que o leitor possa localizar com mais agilidade os resultados citados por referência cruzada, decidimos incluir também a página na qual o resultado está localizado, a menos que ele se encontre no mesmo capítulo no qual foi referenciado. Por exemplo, ao mencionar, no Capítulo 5, o Exemplo 4.12, escrevemos: pelo Exemplo 4.12 (pág. 203). Por outro lado, ao citar este mesmo exemplo no Capítulo 4, escrevemos: pelo Exemplo 4.12.

Os exercícios propostos e soluções

Queremos aqui dizer algo sobre os exercícios propostos. Existem mais de 1300 ao longo dos três volumes. Como de costume, a maioria deles tem a finalidade de fixar a aprendizagem, enquanto uma pequena parte surge como uma forma de acrescentar algo à teoria apresentada no texto.

Quando se estuda por um determinado livro — e este não é exceção —-, o leitor é praticamente levado a seguir o caminho estabelecido pelo autor. As divisões dos capítulos, as ordens com que as seções foram dispostas, a demonstração ou não de um dado teorema, são a forma de guiar o leitor ao longo do livro. No entanto, isso não ocorre com as seções dos exercícios propostos. Uma de suas características é fazer com que o estudante possa caminhar com relativa independência.

Os exercícios são, essencialmente, apresentados em três níveis: fácil, médio e difícil. A variedade deles tem como objetivo preponderante fazer o leitor assimilar, gradativamente, os resultados abordados. Ao iniciar a resolução dos problemas propostos, o leitor terá condições de perceber até que ponto está sabendo usar os conceitos e teoremas.

A distribuição dos exercícios relacionados a cada tópico foi feita buscando dispô-los em uma ordem crescente com respeito ao nível de dificuldade. Há de certa forma uma coerência entre eles e os exemplos que foram trabalhados ao longo do texto, no sentido de que, no texto, o nível aumenta gradativamente, exigindo do leitor um pouco mais de atenção à medida que ele avança na leitura. Pela boa didática, é natural que se inicie uma sequência de exemplos simplificados de modo a motivar propostas mais complexas. Entendemos que um exercício de fácil solução seja uma boa forma de estimular o leitor a prosseguir. Foi nessa linha de raciocínio que elaboramos e dispomos os exercícios. Alguns contêm mais de seis itens, o que pode tornar algo repetitivo e enfadonho, todavia, resolver todos ou não é uma decisão que só cabe ao estudante. Se ele já se sente seguro sobre os conceitos exigidos em um dado exercício, então, não vemos motivos para que todos os itens sejam resolvidos.

Os exercícios marcados com asterisco ($*$) são os que exigirão um pouco mais de empenho do aluno, forçando-o a obter mais familiaridade no trato dos conceitos relacionados. O fato é que alguns poderiam até ser destacados com dois asteriscos, ($**$). Contudo, acreditamos que alguns leitores acharão que determinados problemas sem a estrelinha deveriam ser destacados com ela e vice-versa. Em linhas gerais, há exercícios desafiadores (em pouca quantidade) e sabemos que eles podem levar o leitor a certo pânico, mas, francamente, eles não têm esse objetivo. Pelo contrário, ao selecioná-los, pensamos naqueles leitores que desejam gastar um pouco mais de energia.

Muitas vezes nos dedicamos exaustivamente na solução de um problema considerado difícil. Mesmo assim podemos não resolvê-lo. É claro que isso pode trazer desânimo, mas quando se dedica um tempo extra na solução de um exercício dessa natureza, mesmo que não se tenha "sucesso", é inegável que algo da teoria envolvida é assimilada, e isso será útil em ocasião oportuna. Desse modo, o leitor não deve se sentir desencorajado a encarar os exercícios marcados com a famosa estrelinha. Após analisar o grau de dificuldade de todos, estamos convictos de que a maioria pode ser resolvida pelo estudante que é habituado a estudar algo a mais, que não se acostumou a estudar apenas para fazer provas e garantir aprovação.

No final de cada volume estão as soluções e/ou respostas dos exercícios ímpares. Entretanto, cabe-nos chamar a atenção daquele que muito se apressa em conferir respostas. É aconselhável que uma consulta a essa parte seja considerada como último recurso e que seja feita após algumas tentativas de solução. Não é conveniente que o estudante, ao menor sinal de dificuldade, recorra automaticamente às soluções dadas. Isso pode trazer prejuízo ao seu aprendizado, podendo conduzi-lo a mero espectador.

Uma palavra aos estudantes

A partir da nossa experiência como estudante e, principalmente, agora como professor, queremos chamar a atenção de todo aquele que porventura venha a consultar este livro. As seções dos exercícios propostos de um livro-texto são a parte que desperta muito interesse nos alunos, sendo um atrativo à parte; elas são um ambiente adequado de autoavaliação. É perfeitamente compreensível que os mais ousados busquem o mais rápido possível solucionar os exercícios.

Por mais delineados que sejam ministrados os conteúdos, é quase que impossível para um professor apresentar todos os detalhes de um dado tópico em sala de aula. Não que isso seja, necessariamente, negativo, pelo contrário, isso pode ser uma excelente forma de o professor conduzir o aluno à leitura dos livros-texto. Após cada aula sobre um determinado conteúdo, é razoável que o estudante estabeleça o hábito de se fazer um estudo do que foi visto, analisando com bastante atenção os exemplos trabalhados, uma vez que, em geral, eles são uma fonte de informações que podem auxiliar nas resoluções dos problemas e ajudar a fixar, se não todas, mas as principais ideias. Em seguida, ele deve procurar resolver os exercícios propostos, começando com os mais fáceis, e quem sabe, indo até aos mais difíceis. Na medida do possível, é apropriado estabelecer um procedimento de estudo, tornando-o o mais agradável e interessante possível. Isso pode ser útil e decisivo em seu aprendizado.

Leia cada seção do texto pausadamente, reescrevendo sempre que houver necessidade cada definição e resultado. Pode ocorrer que você tenha que ler uma parte do texto mais de uma vez, revendo os exemplos, teoremas, demonstrações, etc. Se houver necessidade disso, faça com dedicação.

Agradecimentos

Algumas pessoas contribuíram para a apresentação final do livro e queremos aqui agradecê-las. Expressamos nossos sinceros agradecimentos aos colegas professores Antônio Brandão, Francisco Sibério e Gustavo Araújo, que se dispuseram a ler partes do texto. Suas sugestões e críticas contribuíram de forma significativa. Cabe-nos, ainda, agradecer o professor Thiago Dourado pelas sugestões técnicas, bem como o colega João Eudes. Quanto às ilustrações gráficas, agradecemos os colegas Weiller Barboza e Cícero

José. Finalmente, nossa gratidão à Editora Livraria da Física pela parceria e confiança, bem como a todos os autores dos livros que foram base para a elaboração do nosso texto.

Críticas e sugestões

Desde já agradecemos ao leitor que se dispuser em nos comunicar sobre os erros contidos no texto que porventura venham a ser detectados; os remeta via e-mail: `vandenberglv@uepb.edu.br`. O leitor poderá também enviar suas críticas e sugestões. Todas serão bem-vindas e analisadas com bastante atenção.

Campina Grande, março de 2021
VANDENBERG LOPES VIEIRA

Sumário