Os Fundamentos da Aritmética

Uma Investigação Lógico-Matemática sobre o Conceito de Número

Textuniversitários 11

Comissão editorial:
Thiago Augusto Silva Dourado
Francisco César Polcino Milies
Carlos Gustavo T. de A. Moreira
Gerardo Barrera Vargas

Johann Gottlob Frege

Os Fundamentos da Aritmética

Uma Investigação Lógico-Matemática sobre o Conceito de Número

Tradução:
Luiz Henrique Lopes dos Santos

Editora Livraria da Física
São Paulo – 2021

Copyright © 2021 Editora Livraria da Física

2a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Frege, Johan Gottlob, 1848-1925

Os fundamentos da aritmética : uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número / Johan Gottlob Frege ; tradução Luiz Henrique Lopes dos Santos. – 2. ed. – São Paulo : Livraria da Física, 2021. – (Textuniversitários ; 11)

Título original: Die Grundlagen der Arithmetik

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-090-9

1. Aritmética - Estudo e ensino 2. Frege, Gottlob, 1848-1925 3. Lógica moderna - Século 19 I. Título II. Série.

21-61738 CDD-160

Índices para catálogo sistemático:

1. Lógica moderna : Século 19 160

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

ISBN 978-65-5563-090-9

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

LF EDITORIAL
Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafisica.com.br

Prefácio do Tradutor

As traduções aqui reeditadas foram feitas e publicadas pela primeira vez há quase meio século. Se fosse refazê-las agora, os resultados trariam apenas uma alteração substantiva: a palavra *Zahlangabe*, que traduzi por "indicação numérica", agora traduzo por "atribuição de número". Estilisticamente, porém, esses resultados seriam decerto muito diferentes — mas nem melhores nem piores, simplesmente diferentes. Assim, optei por não modificar as traduções originalmente publicadas, exceção feita àquela alteração substantiva, à correção de erros de editoração presentes em suas edições anteriores e a alguns retoques cosméticos.

Publicado originalmente em 1884, *Os Fundamentos da Aritmética*, de Gottlob Frege, é um dos textos inaugurais da vertente de investigação matemática e filosófica que, a partir de então, se desenvolveu rapidamente com o nome de fundamentos da matemática. A ele fazem companhia especialmente os ensaios *Continuidade e números irracionais* (1872) e *O que são e para que servem os números* (1888), de Richard Dedekind, assim como vários escritos de Georg Cantor publicados no último quarto do século XIX.

Na linhagem euclidiana, a demonstração foi sempre considerada como o meio de legitimação por excelência das verdades matemáticas. Enquanto as ciências naturais concebem hipóteses e corroboram-nas

ou não por meio da experiência dos fatos do mundo, a matemática autenticaria suas verdades demonstrativamente, a partir de verdades mais primitivas.

Ora, como observa Frege, e Aristóteles já havia observado mais de dois milênios antes, a série das regressões das verdades derivadas àquelas que as suportam não pode ser infinita; caso contrário, nenhuma verdade matemática nunca chegaria a merecer o grau de certeza teórica que dela se espera que possua. Em algum momento, a série das regressões deveria alcançar verdades primitivas, que, por alguma razão, nem admitiriam nem requereriam demonstração. No entanto, que espécie de razões poderiam legitimar imediatamente essas verdades primitivas?

Essa é a questão que desencadeia a investigação dos fundamentos da matemática. A resposta que Frege lhe oferece, no que concerne à teoria dos números e funções numéricas, é tão simples de formular quanto, o futuro revelou, difícil de justificar cabalmente. É a chamada tese logicista: todos os conceitos da aritmética e da análise superior podem ser definidos em termos estritamente lógicos e, uma vez formuladas em termos estritamente lógicos por meio dessas definições, todas as verdades da aritmética e da análise superior podem ser demonstradas a partir de axiomas estritamente lógicos, evidentes por si mesmos.

Dado que, na segunda metade do século XIX, já se mostrava plausível que toda a aritmética e a análise superior pudessem ser assentadas sobre a teoria dos números naturais, Frege impôs-se a tarefa de prover essa teoria de bases estritamente lógicas. O primeiro passo para o cumprimento dessa tarefa foi o opúsculo *Conceitografia, uma linguagem de fórmulas para o pensamento puro, imitada da linguagem da aritmética*, publicado por Frege em 1879.

Nele, Frege defende a ideia de que a lógica tradicional, de inspiração aristotélica, padece de limitações essenciais, atribuíveis a seu compromisso com o pressuposto de que a estrutura gramatical sujeito-

predicado, característica de línguas ordinárias, reflete a estrutura lógica elementar do sentido das sentenças declarativas. Põe-se por isso a edificar um novo sistema de lógica, assentado sobre novos paradigmas estruturais, que encontra exemplificados na linguagem matemática — particularmente no modo peculiar como nessa linguagem se constroem sentenças universais e existenciais com o auxílio de expressões quantificadoras e letras chamadas variáveis.

Para formular e estabelecer o novo sistema lógico, Frege julga ser útil — na verdade, praticamente indispensável — dispor de um simbolismo artificial cujas estruturas gramaticais espelhem fielmente os paradigmas lógicos que alicerçam esse sistema. É esse simbolismo que chama de *conceitografia*, cuja gramática é aquela característica dos simbolismos artificiais que hoje chamamos de linguagens do cálculo de predicados. A justificação científica da construção de uma linguagem formalizada e logicamente adequada é exposta em artigos publicados por Frege entre 1879 e 1884 — a tradução de um dos quais aparece como apêndice no presente volume.

Na *Conceitografia*, após expor as bases da nova lógica na forma de um sistema axiomático, Frege mostra como, nesse sistema, pode ser logicamente formulada e estabelecida uma teoria puramente lógica das séries de uma certa espécie, que abarca, como caso particular, a série crescente dos números naturais. Entre outras, demonstra uma lei lógica geral que garante, como caso particular, a legitimidade de um dos modos de inferência reputados como tipicamente aritméticos, que chamamos de indução matemática: dada uma propriedade P qualquer, se 0 tem P e o fato de um número natural qualquer ter P implica que seu sucessor também tem P, então todo número natural tem P.

Em *Os Fundamentos da Aritmética*, Frege claramente pretende difundir sua concepção logicista para um público amplo, boa parte do qual seria por certo afugentado por uma exposição logicamente rigorosa, mas inevitavelmente detalhista e intrincada, do assunto. Em estilo fluente e sem fazer uso da conceitografia, o livro critica tentativas

anteriores de abordar o projeto de fundamentação da aritmética e esboça as linhas gerais da perspectiva logicista da qual pretende levá-lo a cabo.

Na parte final do livro, Frege propõe definições que reputa serem puramente lógicas para o conceito geral de número natural e para os conceitos dos números naturais singulares, demonstra alguns teoremas básicos da teoria dos números naturais e manifesta sua convicção de que, com base nessas definições e nos axiomas de seu sistema lógico, toda a aritmética poderia revelar-se como nada mais que uma parte da lógica geral.

Números naturais são então definidos como extensões de conceitos, entendida a extensão de um conceito como a classe das coisas a que esse conceito se aplica. Frege entende ser a noção de extensão de conceito puramente lógica, assim como entende ser puramente lógico o depois chamado princípio da abstração, que governa essa noção, segundo o qual todo conceito tem uma extensão.

Após a publicação de *Os Fundamentos da Aritmética*, Frege desenvolve e refina seu sistema lógico, bem como a definição de número natural exposta nesse livro — desenvolvimento e refinamento expostos nos célebres artigos "Função e conceito", "Sobre sentido e significado" e "Conceito e objeto". Em sua obra monumental *As Leis Básicas da Aritmética*, cujo primeiro volume é publicado em 1893, Frege afirma ter finalmente demonstrado, de modo rigoroso e cabal, sua tese logicista sobre os fundamentos da aritmética.

O destino, porém, reservou para seu projeto logicista um final ingrato. Em 1903, pouco antes da publicação do segundo volume da obra monumental, Bertrand Russell dá conhecimento a Frege de que o princípio da abstração é contraditório e, portanto, trivialmente falso. Com efeito, a suposição de que, para todo conceito, existe a classe a que pertencem exatamente as coisas às quais ele se aplica acarreta logicamente que existe a classe das coisas às quais se aplica o conceito de ser uma classe que não pertence a si mesma. Essa classe,

porém, não pode existir, pois, se existisse, pertenceria e também não pertenceria a si mesma.

Frege ainda tentou salvar seu sistema mediante a restrição do domínio de validade do princípio de abstração, mas nenhuma das restrições consideradas lhe pareceu digna de ser admitida como um princípio puramente lógico. Sendo seu interesse principal o de estabelecer a tese logicista sobre o estatuto epistemológico da aritmética, acabou por desistir do intento, abandonando o projeto de fundamentação da aritmética e, nos últimos anos de vida, a própria crença na tese logicista.

Outros, porém, interessados mais em questões matemáticas do que em questões epistemológicas, levaram adiante com sucesso a redução da aritmética a teorias matemáticas das classes ou conjuntos, alicerçadas em versões restritas do princípio de abstração. Consolidou-se, assim, no decorrer do século XX, um importante campo de investigação matemática. Dele, Frege foi inegavelmente um dos pais fundadores.

Luiz Henrique Lopes dos Santos
Março de 2021

Nota do Editor

Esta é uma nova edição da tradução feita pelo Prof. Luiz Henrique deste texto fundacional e fundamental de Frege. A primeira edição fora publicada na primeira metade dos anos de 1970. Desde então a tradução havia sido reeditada sem nenhuma alteração. Depois de um contato com o tradutor e o seu entusiasmo demos início a preparação desta nova edição. O Prof. Luiz Henrique revisou inteiramente o texto, corrigindo erros cometidos nas editorações anteriores. Também foi acrescido a esta edição um *Prefácio do Tradutor* que elucida bem as condições do contexto histórico da publicação de Frege, seus objetivos e consequências, e, ademais, também foi acrescido como apêndice um artigo publicado por Frege em 1882, *Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia*, e um índice de autores.

Thiago Augusto Silva Dourado
São Paulo, Março de 2021

Sumário

Prefácio do Tradutor **VII**

Nota do Editor **XIII**

OS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA **1**

Introdução **1**

§ 1. Em matemática pode-se reconhecer atualmente um esforço no sentido do rigor das demonstrações e da apreensão acurada dos conceitos 11

§ 2. O exame deve ser estendido finalmente ao conceito de número. Finalidade da demonstração 11

§ 3. Motivos filosóficos para esta investigação: a questão de saber se as leis dos números são verdades analíticas ou sintéticas, *a priori* ou *a posteriori*. Sentido destas expressões 12

§ 4. A tarefa deste livro 14

I. Opiniões de Alguns Autores sobre a Natureza das Proposições Aritméticas **17**

As fórmulas numéricas são demonstráveis? 17

§ 5. Kant nega o que Hankel diz com justiça ser paradoxal . 17

§ 6. A demonstração leibniziana de $2 + 2 = 4$ contém uma lacuna. A definição de $a + b$ de Grassmann é incorreta 18

§ 7. A opinião de Mill de que as definições dos números singulares assertam fatos observados, de que se seguiriam os cálculos, é infundada 20

§ 8. A legitimidade destas definições não requer a observação destes fatos 22

As leis de aritmética são verdades indutivas? 23

§ 9. As leis da natureza de Mill. Chamando as verdades aritméticas de leis da natureza, Mill confunde-as com suas aplicações 23

§ 10. Razões para negar que as leis da adição sejam verdades indutivas: heterogeneidade dos números; não dispomos, já em virtude da definição, de um conjunto de propriedades comuns aos números; inversamente, é provável que a indução deva fundar-se na aritmética . . 25

§ 11. O "inato" de Leibniz 27

As leis de aritmética são sintéticas *a priori* ou analíticas? 28

§ 12. Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. A intuição interna como princípio de conhecimento 28

§ 13. Distinção entre aritmética e geometria 30

§ 14. Comparação das verdades com respeito ao domínio que governam 30

§ 15. As concepções de Leibniz e St. Jevons 32

§ 16. Contra elas, Mill deprecia a "manipulação artificiosa da linguagem". Os sinais não são vazios por não significarem nada perceptível 32

§ 17. Insuficiência da indução. Hipótese de que as leis numéricas sejam juízos analíticos; em que consiste então sua utilidade. Valorização dos juízos analíticos 33

II. Opiniões de Alguns Autores sobre o Conceito de Número 35

§ 18. Necessidade de investigar o conceito geral de número . 35
§ 19. A definição não pode ser geométrica 35
§ 20. O número é definível? Hankel. Leibniz 37
O número é uma propriedade das coisas exteriores? . . 37
§ 21. Opiniões de M. Cantor e E. Schröder 37
§ 22. Contra elas, Baumann: as coisas exteriores não apresentam unidades em sentido rigoroso. O número aparentemente depende de nossa apreensão 38
§ 23. A opinião de Mill de que o número é uma propriedade do agregado de coisas é insustentável 39
§ 24. A aplicabilidade compreensiva do número. Mill. Locke. A figura metafísica incorpórea de Leibniz. Se o número fosse algo sensível não poderia ser atribuído ao não sensível 40
§ 25. Mill: a diferença física entre 2 e 3. Segundo Berkeley o número não está *realiter* nas coisas, mas é criado pelo espírito 42
O número é algo subjetivo? 43
§ 26. A descrição da formação do número de Lipschitz não é adequada e não pode substituir uma determinação de conceito. O número não é um objeto da psicologia, mas algo objetivo 43
§ 27. O número não é, como quer Schlömilch, representação da posição de um objeto em uma série 46
O número como conjunto 47
§ 28. A nomeação de Thomae 47

III. Opiniões sobre a Unidade e o Um 49

O numeral "um" exprime uma propriedade de objetos? 49

§ 29. Ambiguidade das expressões "μονάς" e "unidade". A definição de unidade como objeto a enumerar em E. Schröder é aparentemente inútil. O adjetivo "um" não contém nenhuma determinação adicional, não pode servir de predicado 49

§ 30. As tentativas de definição de Leibniz e Baumann parecem tornar o conceito de unidade inteiramente confuso 50

§ 31. Baumann: as características de indivisão o e delimitação. A ideia de unidade não é fornecida a nós por cada objeto (Locke) 51

§ 32. No entanto, a linguagem indica uma conexão com a indivisão e a delimitação, mas assim modifica-se sentido 52

§ 33. A indivisibilidade (G. Köpp) é insustentável como característica da unidade 52

As unidades são iguais entre si? 53

§ 34. A igualdade como razão do nome "unidade": E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Fazendo-se abstração das diferenças das coisas não se obtém o conceito de número, e as coisas não se tornam assim iguais entre si 53

§ 35. A diferença é mesmo necessária, se cabe falar de pluralidade. Descartes. E. Schröder. St. Jevon 55

§ 36. A ideia da diferença das unidades esbarra também em dificuldades. Os diferentes uns em St. Jevons 55

§ 37. Locke, Leibniz e Hesse: definições do número a partir da unidade ou do um 57

§ 38. "Um" é nome próprio, "unidade" é termo conceitual. Número não pode ser definido como unidades. Diferença entre "e" e $\pm$ 57

§ 39. A dificuldade de conciliar igualdade e distinguibilidade é oculta pela ambiguidade de "unidade" 59

Tentativas para superar a dificuldade 60

§ 40. Espaço e tempo como meios de diferenciar. Hobbes. Thomae. Contra eles: Leibniz, Baumann e St. Jevons . . 60
§ 41. Não é alcançado o objetivo 61
§ 42. A posição em uma série como meio de diferenciar. O pôr de Hankel 62
§ 43. Schröder: a figuração dos objetos pelo sinal 1 63
§ 44. Jevons: fazer abstração do caráter da diferença retendo sua existência. 0 e 1 são números como os demais. Permanece a dificuldade 63
Solução da dificuldade 66
§ 45. Recapitulação 66
§ 46. A atribuição de número contém um enunciado sobre um conceito. Objeção de que há casos em que o número se altera e os conceitos permanecem inalterados 67
§ 47. O caráter fatual da atribuição de número explica-se pela objetividade do conceito 68
§ 48. Solução de algumas dificuldades 68
§ 49. Corroboração por Espinosa 69
§ 50. Exposição de E. Schröder 70
§ 51. Sua retificação 70
§ 52. Corroboração por um certo uso de língua alemã 71
§ 53. Distinção entre notas características e propriedades de um conceito. Existência e número 72
§ 54. Pode-se chamar de unidade o sujeito de uma atribuição de número. Indivisibilidade e delimitação da unidade. Igualdade e distinguibilidade 73

IV. O Conceito de Número **75**
Cada número singular é um objeto independente . . . 75
§ 55. Tentativa para completar as definições leibnizianas dos números singulares 75
§ 56. Estas definições são inutilizáveis, porque definem um enunciado onde o número é apenas uma parte 76

§ 57. A atribuição de números deve ser encarada como uma equação entre números 77
§ 58. Objeção da irrepresentabilidade do número como objeto independente. O número é enquanto tal irrepresentável 77
§ 59. Um objeto não deve ser excluído de investigação por ser irrepresentável 78
§ 60. As próprias coisas concretas nem sempre são representáveis. Quando se pergunta pelo significado das palavras, elas devem ser consideradas na proposição 79
§ 61. Objeção da não espacialidade dos números. Nem todo objeto objetivo é espacial 80
Para obter o conceito de número, deve-se estabelecer o sentido de uma equação numérica 81
§ 62. Carecemos de um critério de igualdade numérica . . . 81
§ 63. A possibilidade de coordenação unívoca como critério. Dúvida lógica quanto a ser a igualdade definida particularmente para este caso 82
§ 64. Exemplos de procedimentos análogos: a direção, a posição de um plano, a forma de um triângulo 83
§ 65. Tentativa de definição. Uma segunda dúvida: se as leis da igualdade são satisfeitas 83
§ 66. Terceira dúvida: o critério de igualdade é insuficiente . 85
§ 67. A complementação não pode consistir em tomar como nota característica de um conceito a maneira como é introduzido um objeto 86
§ 68. O número como extensão de um conceito 87
§ 69. Comentário 88
Complementação e confirmação de nossa definição . . 89
§ 70. O conceito relacional 89
§ 71. A coordenação por uma relação 91
§ 72. A relação biunívoca. Conceito de número cardinal . . . 92