Corpos Finitos e a Hipótese de Riemann

(A demonstração de André Weil)

Textuniversitários 14

Thiago Augusto S. Dourado

Corpos Finitos e a Hipótese *de Riemann*

(A demonstração de André Weil)

Editora Livraria da Física
São Paulo – 2021

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dourado, Thiago Augusto S.
Corpos finitos e a hipótese de Riemann : a demonstração de André Weil / Thiago Augusto S. Dourado. – São Paulo : Livraria da Física, 2021. – (Textuniversitários ; 14)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-139-5

1. Matemática - Estudo e ensino I. Título II. Série.

21-80297 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

ISBN 978-65-5563-139-5

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

LF
EDITORIAL

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafísica.com.br

Prefácio

Este texto surgiu de um estudo que fizemos para o programa de pós-graduação em matemática da Universidade Federal do ABC, e cujo objetivo principal é apresentar a prova dada por André Weil da Hipótese de Riemann para Corpos Finitos.

Contamos, na Introdução, a rica história e as polêmicas que envolvem essa demonstração. Buscamos apresentar nos Capítulos 1, 2 e 3 os pré-requisitos necessários ao seu entendimento. No Capítulo 4, talvez o principal do texto, apresentamos um estudo detalhado da função zeta sobre corpos finitos (incluindo a hipótese de Riemann neste contexto) e a demonstração de Weil. Finalizamos com um capítulo onde apresentamos um estudo sobre Códigos Corretores de Erros com enfoque principal aos códigos de Goppa, que se dá como aplicação do limitante de Hasse–Weil, que é uma versão da hipótese de Riemann para corpos finitos.

Este estudo foi feito sob orientação de nosso mestre e amigo, o Prof. César Polcino Milies, a quem agradecemos muito não só pelo rica matemática que aprendemos dele, mas também por ensinamentos de vida sem iguais que poderíamos ter aprendido com poucos.

Por fim, também gostaríamos de agradecer aos amigos Raul Antonio Ferraz e André Luiz Pereira, matemáticos de primeira grandeza, que

mui gentilmente ofereceram sugestões deveras valiosas que em muito enriqueceram o conteúdo do texto.

Thiago Augusto S. Dourado
São Paulo, Setembro de 2021

Sumário

Introdução

0.1 Função Zeta: de Euler e Riemann

A função zeta foi introduzida por Leonhard Euler, em 1740, com o intuito de resolver um importante problema da época, a saber, o *Problema da Basiléia.* Em [18] ele escreve:

> Eu falo aqui sobre as séries de frações cujos numeradores são 1 e, de fato, cujos denominadores são os quadrados, ou os cubos, ou outras potências, dos números naturais; deste tipo são $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$etc., igualmente $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc. e analogamente para potências superiores, cujos termos gerais estão contidas na forma $\frac{1}{x^n}$.

Posteriormente, num trabalho publicado em novembro de 1859 [60], Bernhard Riemann a estendeu aos números complexos. Nesse trabalho ele escreve:

> Nesta investigação, meu ponto de partida é a observação de Euler, de que o produto
>
> $$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

onde p percorre os números primos e n todos os números naturais. A função de variável complexa s, que estas expressões definem, quando ambos são convergentes, designarei por $\zeta(s)$.

Em seguida, Riemann explica que esta função só está definida quando $\operatorname{Re} s > 1$ e faz uma extensão analítica de ζ:

Ambas convergem somente quando a parte real de s é maior que 1; entretanto, é fácil encontrar uma expressão da função que é válida sempre. Aplicando a equação

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

se encontra em primeiro lugar

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1}.$$

Consideramos agora a integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

estendida de $+\infty$ a $+\infty$ ao longo da fronteira, percorrida no sentido positivo de um domínio que contém ao 0 mas a nenhuma outra descontinuidade da função integrando, vemos sem dificuldade que é igual a

$$\left(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}\right) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1},$$

sempre que na função multi-avaliada $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ fixemos o valor do logaritmo de $-x$ de forma que seja real para o valor real negativo. Assim,

$$-2 \operatorname{sen} \pi s \Pi(s-1)\,\zeta(s) = i \int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x - 1},$$

se definimos a integral como antes.

Esta equação dá o valor da função $\zeta(s)$ para todo número complexo s e prova que está bem definida e é finita para todos os valores de s, distintos de 1, e que se anulam quando s é um inteiro negativo par.

Posteriormente, ele apresenta o que ficou conhecido como a Hipótese de Riemann:

Tomemos agora $s = \frac{1}{2} + ti$ e

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t),$$

de forma que

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right) dx$$

ou ainda

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{4}}\psi'(x)\right)}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right) dx.$$

Esta função é finita para todos os valores finitos de t e é desenvolvível em uma série de potências em t^2 que converge muito rapidamente. Posto que para um valor de s cuja parte real seja maior que 1, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ é finito é o mesmo é válido para o logaritmo dos fatores restantes de $\xi(t)$, a função $\xi(t)$ pode anular-se somente quando a parte imaginária de t esteja entre $\frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2}i$. O número de raízes de $\xi(t) = 0$, cuja parte real está compreendida entre 0 e T é ao redor de

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

pois a integral $\int d\log\xi(t)$ calculada no sentido positivo ao redor do domínio dos valores de t cuja parte imaginária está entre $\frac{1}{2}i$ e $-\frac{1}{2}i$ e cuja parte real está compreendida entre 0 e T é (salvo uma fração

> da ordem de $\frac{1}{T}$) igual a $\left(T \log \frac{T}{2\pi} - T\right) i$ e, por outro lado, é igual ao número de raízes de $\xi(t) = 0$ no dito domínio, multiplicado por $2\pi i$. De fato, encontramo-nos ao redor deste número de raízes reais entre estes limites, e é bastante provável que todas as raízes sejam reais. Sem dúvida seria desejável possuir uma prova rigorosa disto, mas deixei de lado a investigação de tal prova depois de algumas tentativas infrutíferas já que não é necessário para o objetivo imediato de meu estudo.

A afirmação que todos os zeros da função $\xi(t)$ são reais é a hipótese de Riemann.

A função $\zeta(s)$ tem zeros nos números pares negativos $-2, -4, -6, \ldots$ e eles são referidos como os *zeros triviais.* Os outros zeros são os números complexos $\frac{1}{2} + i\alpha$ onde α é um zero de $\xi(t)$. Assim, em termos da função $\zeta(s)$, podemos afirmar:

Hipótese de Riemann (versão clássica). *Todos os zeros não triviais de $\zeta(s)$ tem a parte real igual a $\frac{1}{2}$.*

0.2 Um pouco de história

Vamos nos ater um pouco mais a tudo o que foi dito até agora.

A função zeta $\zeta(s)$ é uma função de uma variável complexa $s = \sigma + it$, que pode ser expressa da seguinte forma

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

onde

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

é a função gamma.

Para o caso especial em que a parte real de s é maior do que 1, $\zeta(s)$ sempre converge e mostra-se que pode ser expressa na forma:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

A função zeta de Riemann é definida como um prolongamento analítico da função definida para $\sigma > 1$ pela série acima, isto é, uma função que no domínio indicado tem a forma dada, mas que no domínio em si a parte real de s se estende além do intervalo $(1, \infty)$.

A função ζ verifica o produto de Euler, isto é, se $\sigma > 1$ então

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Com efeito, cada fator (para um dado primo p) no produto acima pode ser expandido para uma série geométrica consistindo dos recíprocos de p elevado a múltiplos de s:

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots + \frac{1}{p^{ks}} + \cdots .$$

Como $\sigma > 1$, temos que $|p^{-s}| < 1$ e a série converge absolutamente. Assim, podemos tomar um número finito de fatores, multiplicá-los e reorganizar os termos. Tomando todos os primos p menores que certo número primo q, temos

$$\left| \zeta(s) - \prod_{p \leq q} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \right| < \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, o produto parcial, quando expandido, dá uma soma que consiste dos termos n^{-s}, onde n é o produto dos primos menores ou iguais a q. A desigualdade resulta no fato de que apenas inteiros maiores que q podem falhar nesse produto parcial expandido. Como a diferença entre o produto parcial e $\zeta(s)$ vai para zero quando $\sigma > 1$, temos convergência nesta região.

A função zeta satisfaz também a seguinte equação funcional:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s)\,.$$

Esta é uma igualdade de funções meromorfas válida em todo o plano complexo. A equação relaciona valores da função zeta de Riemann nos pontos s e $1-s$, em particular relacionando inteiros positivos com inteiros negativos ímpares. Devido aos zeros da função seno, a equação funcional implica que $\zeta(s)$ tem um zero simples em cada inteiro negativo par $s = -2n$, conhecido como os zeros triviais de $\zeta(s)$. Quando s é um inteiro positivo, o produto $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)$ à direita é diferente de zero porque $\Gamma(1-s)$ tem um polo simples, que cancela o zero simples do fator senoidal.

A motivação de Riemann para estudar a função zeta e seus zeros foi sua ocorrência em sua fórmula explícita para o número de primos $\pi(x)$ menor ou igual a um dado número x, publicada no artigo supramencionado. Para isso ele utiliza a função

$$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{4}\pi\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{5}\pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \cdots .$$

Usando a função de Möbius, definida para $n = 1$ ou $n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{a_j}$ (fatoração em potências de primos) dada por

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ (-1)^k & \text{se } a_j = 1 \text{ para todo } j, \\ 0 & \text{se } a_j = 1 \text{ para algum } j, \end{cases}$$

e a fórmula da inversão de Möbius, a saber, se g e f são funções aritméticas satisfazendo

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

então

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right),$$

o número de primos pode ser recuperado pelo seguinte:

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \Pi(x) - \frac{1}{2}\Pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}\Pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{4}\Pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) - \frac{1}{5}\Pi\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \cdots .\end{aligned}$$

A fórmula de Riemann é então

$$\Pi_0(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t},$$

onde a soma é sobre os zeros não triviais da função zeta e onde Π_0 é uma versão ligeiramente modificada de Π que substitui seu valor em seus pontos de descontinuidade pela média de seus limites superior e inferior:

$$\Pi_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi(x-\varepsilon) + \Pi(x+\varepsilon)}{2};$$

a função Li que ocorre no primeiro termo é a função logaritmo integral dada por

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}.$$

A soma na fórmula de Riemann não é absolutamente convergente, mas pode ser avaliada tomando os zeros ρ na ordem do valor absoluto de sua parte imaginária. Os termos $\mathrm{Li}\,(x)$ envolvendo os zeros da função zeta precisam de algum cuidado em sua definição, pois Li possui pontos de ramificação em 0 e 1, e são definidos (para $x > 1$) por prolongamento analítico na variável complexa ρ na região $\mathrm{Re}\,(\rho) > 0$, ou seja, eles devem ser considerados como a exponencial integral de $\rho \log x$, isto é,

$$\mathrm{Ei}\,(\rho \log x) = -\int_{-\rho \log x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Os outros termos também correspondem a zeros: o termo dominante $\mathrm{Li}\,(x)$ vem do polo $s = 1$, considerado como um zero de multiplicidade -1, e os pequenos termos restantes advém dos zeros triviais. Essa fórmula diz que os zeros da função zeta de Riemann controlam as oscilações de primos em torno de suas posições "esperadas". Riemann sabia que os zeros não triviais da função zeta eram distribuídos simetricamente sobre a linha $s = \frac{1}{2} + it$, e sabia também que todos os seus zeros não triviais devem estar no intervalo $0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1$. Ele verificou que alguns dos zeros estavam na linha crítica com a parte real igual a $\frac{1}{2}$ e sugeriu que todos eles estivessem; esta é *a hipótese de Riemann*.

Hardy [29] e depois junto com Littlewood [30] mostraram que existem infinitos zeros na linha crítica, considerando momentos de certas funções relacionadas à função zeta. Selberg [64] provou que pelo menos uma (pequena) porção positiva de zeros está na linha. Levinson [46] melhorou isso para um terço dos zeros relacionando os zeros da função zeta com os da sua derivada, e Conrey [13] melhorou isso ainda mais para dois quintos.

A maioria dos zeros fica perto da linha crítica. Mais precisamente, Bohr e Landau [8] mostraram que, para qualquer ε positivo, todos, menos uma porção infinitamente pequena de zeros, estão dentro de uma distância ε da linha crítica. Ivić [41] fornece várias versões mais precisas desse resultado, chamadas estimativas de densidade zero, que limitam o número de zeros em regiões com parte imaginária no máximo T e parte real no mínimo $\frac{1}{2}+\varepsilon$.

0.3 Formas de Representar a Função Zeta

0.3.1 Séries de Dirichlet

A série

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^{s}}-\frac{n-s}{n^{s}}\right)$$

converge para $\operatorname{Re}(s)>0$, enquanto que

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+3+s}{(n+1)^{s+2}}-\frac{2n-1-s}{n^{s+2}}\right)$$

converge para todo $\operatorname{Re}(s)>-1$.

0.3.2 Funções Theta

$$2\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_{0}^{\infty}\left(\theta(it)-1\right)t^{\frac{s}{2}-1}dt,$$

em que

$$\theta(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\pi i n^{2}\tau}$$

é a função theta de Jacobi. No entanto, essa integral só converge se a parte real de s for maior que 1, mas pode ser regularizada. Isto dá a seguinte expressão para a função zeta, que é bem definida para todos os s, exceto 0 e 1:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta\left(s\right)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(\theta\left(it\right)-t^{-\frac{1}{2}}\right)t^{\frac{s}{2}-1}dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}\left(\theta\left(it\right)-1\right)t^{\frac{s}{2}-1}dt.$$

0.3.3 Séries de Laurent

$$\zeta\left(s\right)=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\gamma_{n}}{n!}\left(s-1\right)^{n}.$$

A constante γ_n, chamadas constantes de Stieltjes, podem ser definidas pelo limite

$$\gamma_{n}=\lim_{m\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(\log k\right)^{n}}{k}\right)-\frac{\left(\log m\right)^{n+1}}{n+1}\right].$$

0.3.4 Integral

Para $s\neq 1$, tem-se

$$\zeta\left(s\right)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+2\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(s\arctan t\right)}{\left(1+t^{2}\right)^{\frac{s}{2}}\left(e^{2\pi t}-1\right)}dt.$$

Esta expressão é bastante usada para o cálculo numérico da função zeta.