Uma Jornada pelas Teorias Algébricas de Formas Quadráticas

Textuniversitários 13

Hugo Luiz Mariano
Hugo Rafael de Oliveira Ribeiro
Kaique Matias de Andrade Roberto

Uma Jornada pelas Teorias Algébricas *de Formas Quadráticas*

EDITORIAL

Editora Livraria da Física
São Paulo – 2021

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mariano, Hugo Luiz
Uma jornada pelas teorias algébricas de formas quadráticas / Hugo Luiz Mariano, Hugo Rafael de Oliveira Ribeiro, Kaique Matias de Andrade Roberto. – São Paulo : Livraria da Física, 2021. – (Textuniversitários ; 13)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-140-1

1. Álgebra - Estudo e ensino 2. Matemática I. Ribeiro, Hugo Rafael de Oliveira. II. Roberto, Kaique Matias de Andrade. III. Título IV. Série.

21-80309 CDD-512

Índices para catálogo sistemático:

1. Álgebra : Matemática 512

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

ISBN 978-65-5563-140-1

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafísica.com.br

Prefácio

Este livro surgiu dos trabalhos de mestrado e doutorado dos dois últimos autores (Hugo Ribeiro e Kaique Roberto) orientados e inspirados pelo primeiro autor (Hugo Mariano). O título “Jornada” não é por acaso: pensamos neste texto como um guia para alguém que está iniciando seus estudos nas Teorias (Algébrica e Abstratas) de Formas Quadráticas podendo eventualmente se tornar pesquisador na área. Tudo isso foi feito inspirado na nossa jornada pessoal de ensino/aprendizado, conservando inclusive o caminho que traçamos ao trabalhar com estes conceitos.

Reputamos como fundamental para aprofundar nosso envolvimento com os temas da**s** TAFQ**s** a existência dos “Seminários de Teoria Algébrica de Formas Quadráticas do IME-USP”*, que têm ocorrido no IME-USP desde 2016, sob a organização dos professores Francisco Miraglia e Hugo Mariano. O professor Francisco Miraglia foi um grande incentivador da produção de um texto de formação, em língua portuguesa (e assim também acessível a formação de latino-americanos), na área da TAFQ e suas apresentações abstratas. Segundo ele, esta seria uma contribuição ainda sem paralelos (e não apenas pela questão da língua). Aceitamos o gratificante desafio de compor

* `https://sites.google.com/site/seminarioformasquadraticas/home` .

um livro nestes moldes — com base sobretudo em [90] — cientes do risco inerente deste ser um texto sem similares para compararmos e nos guiarmos. Esperamos, contudo, que este venha a ser um material a ser experimentado em diversas formas e também que recebamos dos colegas e estudantes seus comentários e críticas decorrentes destas experiências, retornos fundamentais para futuros aperfeiçoamentos.

A obra contém 15 capítulos organizados em 6 partes. Inicialmente descreveremos as TAFQs sobre corpos (de característica diferente de 2, uma hipótese técnica) e, na sequência, trataremos de diversas apresentações abstratas da TAFQ, apresentadas através de "gerações". As diferentes teorias abstratas são comparadas por meio de suas categorias correspondentes: estas estabelecem uma rede de equivalências ou dualidades entre (sub)categorias, um tema que será trabalhado e explicitado no transcorrer do livro.

Os principais personagens para o desenvolvimento das teorias abstratas de formas quadráticas são Murray Marshall (Universidade de Saskatchewan, Canadá), Maximo Alejandro Dickmann (Universidades de Paris VI e VII, França), Francisco Miraglia (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo) e Alejandro Petrovich (Universidade de Buenos Aires, Argentina). A extensa lista de (profundas) contribuições destes quatro matemáticos - os três últimos são latino-americanos e têm atuado conjuntamente em longa e profícua parceria de décadas - exerceram em nós grande influência científica que, naturalmente, permeia o presente trabalho. Os personagens acima também investiram na formação de material humano com atuação nestas linhas abstratas de formas quadráticas (dentre os quais os autores deste livro). Estes materiais humanos foram forjados através de uma série de Dissertações de Mestrado ([91], [90]) e, sobretudo, de Teses de Doutorado ([64], [7], [66], [42], [54], [87]). De certa forma, este texto reflete o conhecimento que nós os autores absorvemos (ou dito mais ousadamente, herdamos) dos professor M. Dickmann, F. Miraglia e A. Petrovich.

Gostaríamos de expressar nossas mais profundas gratidão e admiração ao professor Francisco Miraglia ("Chico"), por ter semeado (e incentivado) no IME–USP este belo e rico assunto que tivemos a felicidade de conhecer. Tivemos, todos nós três, a fortuna de ter o Chico presente em diversas fases de nossas carreiras, algo que nos inspirou (e continua inspirando) muito.

Também gostaríamos de expressar nossa gratidão e admiração ao professores Maximo Alejandro Dickmann ("Max"), das Universidades de Paris VI e VII, e Alejandro Petrovich ("Alejandro"), da Universidade de Buenos Aires: ambos enriqueceram nossas experiências com as TAFQs através de possibilidade de interação em diversas fases de nossas carreiras, e em diferentes medidas, para cada um de nós. Registramos também nossa gratidão pela obra do professor Murray Marshall, falecido em 2015.

Também expressamos a nossa gratidão ao Thiago Dourado, sem o qual este livro simplesmente não existiria! Registramos nossa grande admiração pelo seu esforço e talento de trazer à vida coleções de livros de Matemática em língua portuguesa, que certamente vêm engrandecer a Matemática brasileira e a formação mais completa e rica de seus estudantes.

Esperamos que esta obra, apesar de suas omissões e prováveis falhas (que esperamos não serem nem numerosas nem profundas), possa contribuir positivamente, em alguma medida, para a continuidade da divulgação da**s** teoria**s** algébrica**s** de formas quadráticas, eventualmente facilitando o aparecimento de novos trabalhadores da área.

Os autores:
Kaique Matias de Andrade Roberto, IME–USP.
Hugo Rafael de Oliveira Ribeiro, IME–USP.
Hugo Luiz Mariano, IME–USP.

São Paulo, setembro de 2021.

Sumário

Introdução

A maioria dos ("bons") livros de Álgebra Linear tem um capítulo final (em geral ignorado pelos estudantes) onde os autores falam de *formas bilineares* (por exemplo, no clássico livro de Hoffman e Kunze [47] este é o Capítulo 10). Acontece que, sob um certo ponto de vista, uma forma quadrática essencialmente é uma forma bilinear simétrica. Enquanto isso, tenha em mente a seguinte analogia:

> *Uma forma quadrática é uma espécie de norma obtida de um produto interno generalizado, definido sobre um corpo de escalares.*

Apesar de simplista, essa analogia é bastante poderosa. Assim a origem da teoria algébrica de formas quadráticas é bastante geométrica e, de fato, alguns ingredientes geométricos (como os conceitos de ortogonalidade e de reflexão) são essenciais para produzir os passos iniciais desta teoria algébrica.

De maneira mais enfática, podemos dizer que o ponto chave da Teoria Algébrica das Formas Quadráticas é detectar as propriedades do corpo de escalares por meio de um coleção relevante das formas bilineares sobre este corpo, devidamente organizadas em uma estrutura de anel. Tal estrutura recebe o nome de anel de Witt e foi introduzida por Ernst Witt em 1937 no artigo seminal [94].

Uma hipótese técnica, que permeará todo livro, gera a convenção:

> *Todos os corpos considerados neste trabalho terão característica diferente de* 2.

O objetivo principal das duas partes iniciais do livro é fornecer uma boa introdução para os leitores que não estão familiarizados com a teoria algébrica das formas quadráticas sobre corpos. Elas contam tanto a versão original, iniciada na década de 1930 — a qual denominaremos “teoria clássica” das formas quadráticas —, quanto a “ teoria reduzida”, concebida no final da década de 1970. Isso é crucial para que o leitor possa apreciar a *Jornada* que nos levará ao encontro das diversas versões abstratas dessa teoria — iniciadas também no final da década de 1970 — no transcorrer dos capítulos do livro.

O primeiro passo para obter uma teoria abstrata de formas quadráticas é responder a seguinte pergunta:

Quais serão as noções primitivas da teoria?

Há uma lista razoável de possibilidades a ser levada em conta e as diversas teorias abstratas de fato tomaram diversos pontos de partida. Naturalmente, as primeiras teorias abstratas não são necessariamente as mais elegantes ou as mais eficientes ou, ainda, as mais abrangentes, mas certamente todas têm (ou tiveram) razão de ser e constituíram um degrau importante nesta exploração matemática que já perdura por quatro décadas. Em função disto, procuremos não apenas introduzir o leitor a estas diversas teorias, mas também apresentar comparações explícitas entre elas ou, mais precisamente, fornecer funtores entre as categorias naturalmente associadas a estas teorias. Este quadro funtorial também será desenvolvido gradualmente, em várias etapas, conforme o desenvolvimento das apresentações das teorias abstratas, didaticamente agrupadas em “gerações”.

A fim de auxiliar o leitor a se localizar no texto, apresentaremos abaixo uma rápida descrição de cada parte do livro.

Parte I — A Teoria Clássica de Formas Quadráticas

Nesta primeira parte do livro, reunimos os principais resultados da teoria algébrica "clássica" de formas quadráticas. Nossa exposição frequentemente estará próxima do livro [62] de T.-Y. Lam.

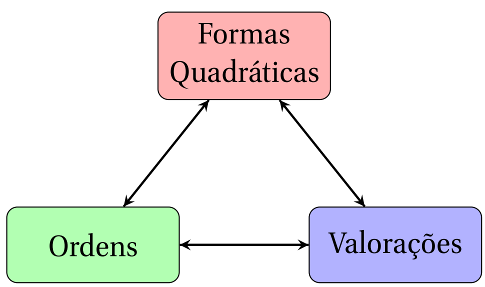
Inicialmente, reuniremos os principais ingredientes da teoria algébrica "clássica" de formas quadráticas sobre um corpo (de característica diferente de 2), a saber: o conceito de forma quadrática (e descrições equivalentes), a relação de isometria entre duas formas de mesma dimensão, diagonalização de formas quadráticas, formas regulares, formas isotrópicas, somas ortogonais e produto de Kronecker de formas, o teoremas de cancelamento e de decomposição — ambos devidos a Ernst Witt —, o anel de Witt–Grothendieck e o anel de Witt de um corpo. O leitor poderá notar a motivação geométrica das ideias iniciais — observando analogias naturais com produtos internos e normas em espaços vetoriais de dimensão finita sobre os reais — e que este foco vai gradualmente sendo deslocado para conceitos de natureza eminente algébrica (anéis).

Posteriormente, enfatizaremos a importância do conceito de ordens em um corpo para o desenvolvimento da teoria algébrica de formas quadráticas. Isto se deve inicialmente aos resultados de Artin–Schreier, obtidos na década de 1920, que fornecem a caracterização dos corpos ordenáveis como sendo exatamente os corpos formalmente reais, conceito que pode ser expresso na linguagem das formas quadráticas. Algo mais sofisticado envolve os estabelecimento de (diversas e) estreitas relações entre o anel de Witt do corpo e o espaço de todas as ordens do corpo, desenvolvidas no decorrer do Capítulo.

Encerraremos esta primeira parte do livro dedicada a exposição da teoria algébrica "clássica" de formas quadráticas, destacando que, cerca de 30 anos após a fundação da teoria algébrica de formas quadráticas, a identificação das formas de Pfister (formas multiplicativas em [84]), conceito que generaliza as formas quadráticas de normas originadas em extensões quadráticas de corpos e em álgebras de quatérnios sobre um corpo, acarretou um importante avanço no estudo da teoria algébrica das formas quadráticas, culminando com o famoso "Hauptsatz" de Arason–Pfister, que responde a uma questão posta por John Milnor no célebre artigo [80].

Parte II — A Teoria Reduzida de Formas Quadráticas

No final da década de 1970 iniciou-se um estudo dos anéis de Witt reduzidos, *i.e.* a classe de anéis obtida ao quocientar cada anel de Witt por seu nilradical ([15], [11]). A decorrente teoria, denominada "teoria algébrica *reduzida* de formas quadráticas", se beneficiou (e continua se beneficiando) largamente das belas e diversas conexões entre ordens, valorações e formas quadráticas: este tripé constitui justamente o título do emblemático livro de T.-Y. Lam [60].



Apesar da teoria reduzida não ser exatamente o que consideramos como uma "teoria abstrata" de formas quadráticas, ela constitui uma variação interessante e profunda dos conceitos tratados na Parte I do livro. Nesta Parte II, trabalharemos com o "Tripé de Lam" para a apresentação da teoria reduzida de formas quadráticas. Naturalmente, nossa exposição será guiada por [60].

Reconheceremos que há uma expressão do processo de redução de anéis de Witt em termos mais diretos, considerando formas quadráticas sobre um corpo formalmente real F: esta redução corresponde a trocar o grupo de coeficientes da teoria clássica de formas quadráticas, $\dot{F}/\dot{F}^2$, pelo grupo de coeficientes $\dot{F}/(\sum \dot{F}^2)$. Como $F^2 \subseteq \sum F^2$, o novo grupo de coeficientes é um quociente do grupo de coeficientes original. De fato, teorias reduzidas de formas quadráticas fazem sentido em contexto mais geral, quando são considerados grupos de coeficiente $\dot{F}/\dot{T}$, onde $T \subseteq F$ é qualquer *pré-ordem*, um conceito que generaliza simultaneamente $\sum F^2$ e ordens $P \subseteq F$.

Completaremos o "Tripé de Lam": apresentaremos este novo ingrediente que equipa corpos com uma estrutura adicional — uma valoração de Krull (e suas expressões equivalentes) — e, principalmente, como este ingrediente se relaciona com as ordens e o o anel de Witt de um corpo.

Testemunharemos que a teoria reduzida de formas quadráticas e o "tripé de Lam" revelaram-se particularmente potentes no momento em que foi trazido ao campo uma tipo relativamente simples de pré-ordem: o conceito de *leque*, nossa tradução livre para o termo "fan", em inglês. Em particular, leques permitiram uma expressão puramente aritmética da solução do denominado "problema da representação para os anéis de Witt reduzidos".

Parte III — A Primeira Geração de Teorias Abstratas

As primeiras teorias abstratas de formas quadráticas surgiram nos final dos anos 1970, com trabalhos de C. M. Cordes ([18]) e de M. Marshall ([70]). Tais teorias surgiram com um propósito: eles estavam interessados em descobrir se existiam (ou não) corpos com certas propriedades relativas à formas quadráticas.

O primeiro passo para obter uma teoria abstrata de formas quadráticas é responder a seguinte pergunta: *quais serão as noções primitivas da teoria?*

Há uma lista razoável de possibilidades a ser levada em conta: representabilidade, anel de Witt, ordens, isometria, formas de Pfister, e etc. Acontece que nenhuma delas é claramente privilegiada em relação às outras! Por conta disso, as primeiras teorias abstratas não são necessariamente as mais elegantes e eficientes, mas elas são importantes, pois além de responderem algumas questões sobre o anel de Witt, apontam um caminho para a construção de ferramentas mais sofisticadas para o ataque de questões difíceis, como a Conjectura de Marshall para assinaturas.

Nesta parte, vamos expor as estruturas quaterniônicas, os anéis de Witt abstratos e esquemas de Cordes, nesta ordem (que não é a ordem histórica em que estas teorias apareceram, mas optamos por uma escolha didática para a exposição). As Partes I e II do livro constituem muito do que gostaríamos de provar nos contextos abstratos, e portanto, recomendamos fortemente que o leitor compare os resultados desta (e das próximas partes) com aquilo que fizemos nas Partes I e II.

Parte IV — A Segunda Geração de Teorias Abstratas

No início da década de 1980, surge uma nova teoria abstrata de formas quadráticas: os Espaços de Ordens Abstratos (EOA) de Murray Marshall ([69], [71], [72]). Os espaços de ordens abstratos são importantes porque generalizam tanto a teoria de ordens sobre corpos quanto a teoria reduzida de formas quadráticas. Esta teoria consegue contornar com elegância a situação da não extensão dos métodos da teoria dos corpos, algo que as teorias abstratas da primeira geração, expostos na Parte III, não executaram totalmente.

Mas é apenas nos início dos anos 1990 que surge uma teoria abstrata — e em *linguagem da lógica de predicados de primeira ordem* (e finitária) — que generaliza simultaneamente a teoria algébrica clássica e a teoria reduzida de formas quadráticas. Esta é a teoria dos Grupos Especiais (SG), apresentada no Capítulo 11, que foi introduzida por Maximo Dickmann em [20] e desenvolvida em grande profundidade pela longa colaboração de Maximo Dickmann e Francisco Miraglia