Convergência de Variáveis Aleatórias, Quantis Amostrais, Teoria dos Valores Extremos

EDITORIAL

Vanderlei da Costa Bueno

Convergência de Variáveis Aleatórias, Quantis Amostrais, Teoria dos Valores Extremos

LF EDITORIAL

2022

1ª Edição

Direção editorial: José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bueno, Vanderlei da Costa
Convergência de variáveis aleatórias, quantis amostrais, teoria dos valores extremos / Vanderlei da Costa Bueno. – São Paulo, SP: Livraria da Física, 2022.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-187-6

1. Estatística 2. Matemática - Estudo e ensino 3. Probabilidades 4. Teoria dos valores extremos 5. Variáveis aleatórias I. Título.

22-103052 CDD-519.2

Índices para catálogo sistemático:
1. Probabilidade e estatística : Matemática 519.2

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

Prefácio

Este livro tem como objetivo atender a estudantes de um curso de Probabilidade e Estatística em nível intermediário interessados na teoria assintótica de variáveis aleatórias e suas aplicações. Atende também a estudantes de Ciências Exatas. Em geral, na literatura existente, o assunto é tratado em um único tópico onde são colocados os conceitos de convergência e resultados limites usuais como as Leis dos Grandes Números e o Teorema do Limite Central. Neste livro abordamos os vários modos de convergências estendendo os resultados limites de forma ampla em que as variáveis aleatórias não são independentes e identicamente distribuidas, provendo resultados alternativos. Tópicos adicionais como a Teoria Assintótica para Quantis Amostrais e Teoria dos Valores Extremos são desenvolvidos.

O livro é dividido em cinco capítulos. Nos dois primeiros capítulos apresentamos os conceitos de convergência de sequências de variáveis aleatórias e suas propriedades, várias versões da Lei Fraca e da Lei Forte dos Grandes Números e o Teorema do Limite Central. No terceiro capítulo demonstramos o Teorema do Limite Central nas versões de Lindeberg e Liapunov. No capítulo quatro estudamos a teoria assintótica para as estatísticas de ordem de uma amostra aleatória e, particularmente, do Teorema do Limite Central para quantis amostrais. No capítulo cinco analisamos os tipos de distribuições assintóticas de sequências de máximos e mínimos de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, em número de três, e caracterizamos as distribuições de seus domínios de atração.

O livro não pretende ser introdutório e espera-se que o leitor tenha alguma familiaridade com os conceitos básicos de teoria dos conjuntos, funções reais, de séries e sequências numéricas ao nível do Cálculo Diferencial e Integral ou Análise Real e, certamente, conhecimento de um espaço de probabilidade, variáveis aleatórias e suas propriedades. Como sempre, os exercícios são partes importantíssima do livro e, para motivar o leitor, uma série de exercícios resolvidos são destacados no textos no fim de cada capítulo, assim como os exercícios propostos em ordem conveniente à sua resolução. Há um grande número de exercícios computacionais para estimular o estudante ao cálculo de probabilidades e exercícios teóricos inspirados nas demonstrações e provas exibidas no texto.

Att
Vanderlei da Costa Bueno
Professor Associado, IME - USP
vbueno@usp.br

Sumário

Prefácio **vi**

1 Convergência de Variáveis Aleatórias **1**
1.1 **Convergência de Sequências de Eventos Aleatórios** 1
1.2 **Convergência e Continuidade de Medidas de Probabilidades** 3
1.3 **Lema de Borel-Cantelli** 6
1.4 **Convergência Quase Certa. Propriedades** 7
1.5 **Convergência em Probabilidade. Propriedades** 12
1.6 **Convergência em Média** 16
1.7 **A Lei Fraca dos Grandes Números** 20
1.8 **A Lei Forte dos Grandes Números** 25
1.9 **Exercícios Resolvidos** 31
1.10 **Exercícios Propostos** 36

2 Convergência em Distribuição **44**
2.1 **Convergência em Distribuição** 44
2.2 **Propriedades** 46
2.3 **Funções Características** 51
2.4 **Fórmula da Inversão** 56
2.5 **Funções Características e Convergência em Distribuição** 60
2.6 **Teorema do Limite Central** 64
2.7 **Exercícios Resolvidos** 68
2.8 **Exercícios Propostos** 77

3 Versões do Teorema do Limite Central **83**
3.1 **Teorema do Limite Central de Lindeberg** 83
3.2 **Teorema de Feller** 89
3.3 **Teorema do Limite Central de Liapunov** 92
3.4 **Exercícios Resolvidos** 93
3.5 **Exercícios Propostos** 99

4 Teorema do Limite Central para Quantis Amostrais **101**
4.1 **Estatísticas de Ordem** . . . 101
4.2 **Função de Distribuição Empírica** . . . 104
4.3 **Distribuições Assintóticas dos Quantis Amostrais** . . . 106
4.4 **Teorema do Limite Central para as Estatísticas de Ordem** . . . 108
4.5 **Exercícios Resolvidos** . . . 110
4.6 **Exercícios Propostos** . . . 115

5 Teoria Assintótica dos Valores Extremos **118**
5.1 **Distribuição Assintóticas dos Valores Extremos.** . . . 118
5.2 **Domínios de Atração** . . . 128
5.3 **Domínios de Atração da Distribuição de Weibull** . . . 129
5.4 **Domínios de Atração da Distribuição de Fréchet** . . . 132
5.5 **Domínios de Atração da Distribuição de Gumbel** . . . 134
5.6 **Exercícios Resolvidos** . . . 137
5.7 **Exercícios Propostos** . . . 140

Bibliografia **145**

Capítulo 1

Convergência de Variáveis Aleatórias

Neste primeiro capítulo analisaremos a convergência de sequências de variáveis aleatórias e suas propriedades. Na investigação distinguiremos vários tipos de convergências, contudo, as definições dependem somente do cálculo de probabilidades e de esperanças com respeito a uma variável finitamente dimensional, passando ao limite quando o número de variáveis cresce indefinidamente.

O estudo das Leis dos Grandes Números é muito importante na Teoria da Probabilidade e da Estatística. Na Estatística, frequentemente usamos a média de um número de medidas de certa quantidade para estimá-la e portanto é interessante estudar as propriedades de tal estimador. Uma pergunta pertinente é sobre o comportamento do estimador quando o número de medidas cresce indefinidamente. O estimador converge, de certa maneira, para o verdadeiro valor da quantidade em estudo? Entre outras aplicações, as Leis dos Grandes Números responde a este tipo de questão. Também prova o conceito frequêntista de probabilidade que, de certa forma, traduz a noção intuitiva do conceito de probabilidade.

1.1 Convergência de Sequências de Eventos Aleatórios

Estamos interessados em estudar o limite de sequências de variáveis aleatórias (conjuntos aleatórios) e devemos fixar um espaço de probabilidade, $(\Omega, \Im, P)$, onde serão definidas as operações de interesse. Resumindo, a probabilidade é uma função de conjuntos e para defini-la em um espaço amostral, Ω, consideramos $\Im$, a classe de todos os eventos de Ω fechada pelas operações de reunião, intersecção, complementar, em um número finito ou infinito enumerável de eventos aleatórios. Definimos P em $\Im$ através dos Axiomas de Kolmogorov:

Definição 1.1

$$P : \Im \to [0, 1]$$

$$A \mapsto P(A)$$

satisfazendo

a) $P(\Omega) = 1$

b) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *quando os* A_i *são disjuntos dois a dois, isto é,* $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$.

Se consideramos uma sequência crescente de intervalos de números reais, $(A_n)_{n\geq 1}$, com $A_n = [0, n)$, é intuitivo que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} [0, n) = [0, \infty) = \cup_{n\geq 1} A_n.$$

Da mesma forma se consideramos a sequência decrescente de intervalos de números reais $(A_n)_{n\geq 1}$, com $A_n = [0, \frac{1}{n}]$, percebemos que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} [0, \frac{1}{n}] = \{0\} = \cap_{n\geq 1} A_n.$$

Nestes casos, em que $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente, isto é, $A_n \subseteq A_{n+1}, \quad n \geq 1$, ou decrescente, $A_n \supseteq A_{n+1}, \quad n \geq 1$, pode-se provar que $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\geq 1} A_n$, ou $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\geq 1} A_n,$, respectivamente.

Em geral, o limite de uma sequência, quando existe, é definido pela identidade:

Definição 1.2 *Definimos o conjunto A como sendo o limite da sequência* $(A_n)_{n\geq 1}$ *e denotamos* $A = \lim A_n = \lim_{n\uparrow\infty} A_n$ *como sendo a identidade* $\overline{A} = \underline{A} = A$, *onde*

$$\overline{A} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

é o limite superior de $(A_n)_{n\geq 1}$ *e*

$$\underline{A} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

é o limite inferior de $(A_n)_{n\geq 1}$.

Se consideramos a sequência de conjuntos $A_n = (\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}]$ temos

$$\underline{A} = \cup_{n\geq 1}\{(\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}] \cap (\frac{-1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \bigcap ....\} = \bigcup_{n\geq 1} [0, \frac{n}{n+1}] = [0, 1).$$

e

$$\overline{A} = \bigcap_{n\geq 1} \{(\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}] \bigcup (\frac{-1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \bigcup ....\} = \bigcap_{n\geq 1} (\frac{-1}{n}, 1) = [0, 1).$$

Portanto $\underline{A} = \overline{A} = \lim A_n = [0, 1)$.

Observação 1.1 Podemos interpretar o limite inferior de uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$, como sendo o conjunto dos elementos que pertencem a todos os A_n, a menos de um numero finito de índices. O limite superior é o conjunto de elementos que pertencem a um número infinito dos A_n, daí usarmos a notação $P(A_n i.v.)$ para denotarmos $P(\limsup_n A_n)$ (ver exercício 6). .

Obviamente temos

$$\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$$

de forma que

$$P(\liminf A_n) \leq P(\limsup A_n).$$

É conveniente observar as Leis de Morgan:

$$(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k)^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k^c,$$

$$(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k)^c = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k^c$$

e portanto, se o limite existe, $(\lim A_n)^c = \lim A_n^c$.

1.2 Convergência e Continuidade de Medidas de Probabilidades

Para introduzir nosso primeiro tópico consideramos uma sequência de eventos aleatórios $(A_n)_{n\geq 1}$ definidos em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Estamos interessados em calcular o limite

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Claramente, a sequência $(P(A_n))_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais e estudamos tais sequências analisando $(a_n)_{n\geq 1}$ com a notação $a_n = P(A_n)$.

Observação 1.2 Uma função $f(x)$ definida no conjunto dos números reais a valores reais, é contínua em um número real a se, e somente se,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a), \forall (a_n)_{n\geq 1}, \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

isto é

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \quad | \quad se \quad n \geq n_0 \to |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemplo 1.1 Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ. Defina os eventos $A_n = \{X \in [0, \frac{n}{n+1}]\}$. Note que $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente e que $\lim A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \{X \in [0, 1)\}$. Portanto

$$P(\lim A_n) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda}.$$

Por outro lado,

$$P(A_n) = \int_0^{\frac{n}{n+1}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}}$$

e

$$\lim P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}} = 1 - e^{-\lambda} = P(\lim A_n).$$

Podemos conjecturar que a medida de probabilidade é uma função de conjuntos que é contínua. Este fato é provado no teorema:

Teorema 1.1 *Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos em $\Im$, Se o limite da sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ existe, então*

$$P(\lim A_n) = \lim P(A_n).$$

Demonstração. Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente de eventos, $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (ver exercício 1). Definimos $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n - A_{n-1}$ de forma que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Portanto

$$P(\lim A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(B_n) =$$

$$P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n - A_{n-1}) = P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty}[P(A_n) - P(A_{n-1})] =$$

$$P(A_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m}[P(A_n) - P(A_{n-1})] = \lim_{m\to\infty} P(A_m)$$

No caso em que a sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ é decrescente, $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $(A_n^c)_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente de eventos e $\lim A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c$. A prova segue usando a prova anterior.

No caso geral temos

$$P(\limsup A_n) = P(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k) = P(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k\geq n} A_k) = \limsup P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \geq \limsup P(A_n) \geq \liminf P(A_n) \geq$$

$$\liminf P(\bigcap_{k\geq n} A_k) = \lim P(\bigcap_{k\geq n} A_k) = P(\lim \bigcap_{k\geq n} A_k) =$$

$$P(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k) = P(\liminf A_n).$$

Contudo, como por hipótese $\lim A_n$ existe, $P(\limsup A_n) = P(\lim A_n) = P(\liminf A_n)$. Considerando tais igualdades e as desigualdades acima concluimos

$$P(\lim A_n) = \limsup P(A_n) = \liminf P(A_n) = \lim P(A_n).$$

■

Exemplo 1.2 Seja X uma variável aleatória. Então ,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in N \quad | \quad P(|X| > k) < \varepsilon.$$

Como X assume valores nos reais, $P(|X| = \infty) = 0$. Considere a sequência decrescente $\{|X| > n\}$, de forma que

$$\{|X| = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X| > n\}$$

Portanto

$$0 = P(|X| = \infty) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X| > n\}) = P(\lim_{n\to\infty}\{|X| > n\}) = \lim_{n\to\infty} P(|X| > n).$$

Então, $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in N \quad | \quad se \quad n \geq k \rightarrow P(|X| > n) < \varepsilon$. Em particular tomamos $n = k$.

Exemplo 1.3 Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos no espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Então

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \Leftrightarrow \forall n, P(A_n) = 1.$$

A condição necessária é óbvia.

Provemos a condição suficiente por indução em n. Para $n = 2$ a prova é óbvia pois

$$P(A_1 \bigcap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \bigcup A_2).$$

Por hipótese de indução, suponha que a prova vale para n, isto é

$$\forall m, P(A_m) = 1, 1 \leq m \leq n \Rightarrow P(\bigcap_{m=1}^{n} A_m) = 1.$$

Provemos para $n+1$: $P(\bigcap_{m=1}^{n+1} A_m) = P(\bigcap_{m=1}^{n} A_m \bigcap A_{n+1}) = 1$, quando $P(\bigcap_{m=1}^{n} A_m) = 1$ e $P(A_{n+1}) = 1$, o que ocorre, por hipótese de indução quando $P(A_m) = 1, \forall m, 1 \leq m \leq n$.

Consequentemente

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{i=1}^{n} A_i) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

1.3 Lema de Borel-Cantelli

O lema de Borel Cantelli é uma chave para vários problemas de convergência quase certa que veremos na próxima seção. Consiste em duas partes.

Teorema 1.2 (Lema de Borel-Cantelli) *Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos no espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Então*

I) Se $\sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n i.v.) = 0.$

II) Se $\sum P(A_n) = \infty$ *e os* A_n *são independentes,*$\Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n i.v.) = 1.$

Demonstração. Provemos a parte I.

$$P(\limsup A_n) = P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k) = P(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

pois $\sum P(A_n) < \infty$. A desigualdade é devido a Bonferroni.

Provemos a parte II.

Devemos provar que $P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k) = 1$ que, pelo exemplo 1.3, é equivalente provar que $P(\bigcup_{k\geq n} A_k) = 1, \forall n \geq 1$ ou seja $P(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = 0, \forall n \geq 1$.

$$P(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = P(\lim_{m\to\infty}\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) =$$

$$\lim_{m\to\infty} \pi_{k=n}^{m} P(A_k^c) = \lim_{m\to\infty} \pi_{k=n}^{m}(1 - P(A_k)) \leq$$

$$\lim_{m\to\infty} \pi_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)} = \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0.$$

■

Observação 1.3 Observe que, se os eventos são independentes, $P(A_n i.v.)$ é igual a 0 ou 1.

Exemplo 1.4 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial padrão e seja a variável aleatória $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$. Note que

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(\frac{X_n}{\ln n} > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon \ln n) = e^{-\ln n^{\varepsilon}} = \frac{1}{n^{\varepsilon}},$$

e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}}$, que converge se $\varepsilon > 1$ ($P(A_n i.v.) = 0$) e diverge se $\varepsilon \leq 1$ ($P(A_n i.v.) = 1$)

1.4 Convergência Quase Certa. Propriedades

A definição de convergência quase certa de uma sequência, $(X_n)_{n\geq 1}$, de variáveis aleatórias é muito natural e tem origem na definição do limite de sequências de números reais.

Definição 1.3 *Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória definida em Ω com valores em $\Re$, isto é, para cada $w \in \Omega$, $X(w) \in \Re$, é um número real.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequêcia de variáveis aleatórias. Para cada realização w , $(X_n(w))_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais que pode (ou não) convergir para um valor real $X(w)$. Seja N^c o conjunto das realizações para as quais a sequência converge, isto é

Seja

$$N^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to X(w)\}.$$

Se $P(N^c) = 1$ dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente para X.

Denotamos $X_n \to^{qc} X$.

Observe que $P(N) = 1 - P(N^c) = 0$ e também dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente para X a menos de um conjunto de medida nula.

Observação 1.4 O limite é único. Suponha que exista uma outra variável aleatória Y, tal que $X_n \to^{qc} Y$, isto é, existe M^c com $P(M^c) = 1$

$$M^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to Y(w)\}.$$

Mas, pelo Exemplo 1.3, $P(N^c \cap M^c) = 1$ e em $N^c \cap M^c$ temos $X(w) = Y(w)$.

Exemplo 1.5 Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$, $X \sim U(0, 1)$.

Defina

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - X)^{k-1}.$$

Para cada $w, 0 < X(w) < 1$, temos

$$\lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - X(w))^{k-1} = \frac{1}{X(w)}$$

com

$$P(\lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = \frac{1}{X(w)}) = P(0 < X < 1) = 1$$

e $X_n \rightarrow^{qc} \frac{1}{X}$.

Defina

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{5.X}{3})^k.$$

Para cada $w, 0 < X(w) < 1$, temos

$$\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5.X(w)}{3})^k = \frac{1}{1 - \frac{5.X(w)}{3}},$$

se $\frac{5.X(w)}{3} < 1$, isto é, $X(w) < \frac{3}{5}$. Então

$$P(\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(w) = Y(w) = \frac{1}{1 - \frac{5.X(w)}{3}}) = P(X < \frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$$

e $Y_n \nrightarrow^{qc} Y$.

Observação 1.5 Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais. Uma condição equivalente para que $\lim_{n\uparrow\infty} a_n = a$ é

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \aleph \ \mid \ \forall k, k \geq n, \quad |a_k - a| < \varepsilon,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\forall m \in \aleph, \exists n \in \aleph \ \mid \ \forall k, k \geq n, \quad |a_k - a| < \frac{1}{m}.$$

Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n \rightarrow^{qc} X$. Então

$$N^c = \{w \ \mid \ \lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = X(w)\} =$$

$$\{w \ \mid \ \forall m \in \aleph, \exists n \in \aleph \ \mid \ \forall k, k \geq n, \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\} =$$

$$\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\{w \ \mid \ |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}.$$

Portanto, pelo Exemplo 1.3, $P(N^c) = 1$ se, e somente se,

$$P(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\{w \mid |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

que é equivalente a

$$P(\liminf\{w \mid |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

ou

$$P(\limsup\{w \mid |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Portanto podemos enunciar o seguinte Corolário:

Corolário 1.1 **(Critério para convergência quase certa)** *Sejam X uma variável aleatória, $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias, e os eventos*

$$A_k = \{w \mid |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}.$$

Se $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty, \quad \forall m \geq 1$, então $X_n \to^{qc} X$.

A prova segue do Lema de Borel Cantelli.

Exemplo 1.6 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com distribuição exponencial padrão. Defina as variáveis aleatórias $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$ de maneira que

$$P(|Y_n| > \frac{1}{m}) = P(|\frac{X_n}{\ln n}| > \frac{1}{m}) = P(X_n > (\ln n)^{\frac{1}{m}}) = e^{-(\ln n)^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}}.$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}} = \infty$ se $m \geq 1$.

Concluimos, pelo lema de Borel Cantelli, que $P(\limsup |Y_n - 0| > \frac{1}{m}) = 1$ e $Y_n \nrightarrow^{qc} 0$.

Exemplo 1.7 Considere a distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$.

Defina a variável aleatória

$$X_n(w) = 2^n \quad se \quad w \in (0, \frac{1}{n}) \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Observe que,

$P(\lim_{n\to\infty} X_n(w) = 0) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 1)) = 1$ e $X_n \to^{qc} 0$.

Contudo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Observe que as variáveis X_n não são independentes pois $X_n = 2^n \to X_{n-1} = 2^{n-1}$ e portanto o Lema de Borel Cantelli não vale.

Como na análise real, um critério útil para verificar a convergência quase certa é o critério de Cauchy:

Teorema 1.3 (Critério de Cauchy) *Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias. Então $X_n \to^{qc} X$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_n |X_{n+m} - X_n| \leq \varepsilon) = 1.$$

Demonstração. Provemos a condição necessária.

Note que para todo $\delta > 0$ e todo m temos a contingência

$$\cap_{j=n}^{\infty}\{|X_j - X| \leq \frac{\delta}{2}\} \subset \{|X_{n+m} - X| < \frac{\delta}{2}\} \cap \{|X_n - X| < \frac{\delta}{2}\} \subset \{|X_{n+m} - X_n| \leq \delta\}.$$

Portanto

$$\cap_{j=n}^{\infty}\{|X_j - X| \leq \frac{\delta}{2}\} \subset \cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{n+m} - X_n |\leq \delta\} = \{\sup_n |X_{n+m} - X_n| \leq \delta\}$$

e consequentemente

$$\lim_{m\to\infty} P(\{\sup_n |X_{n+m} - X_n| \leq \delta\}) \geq \lim_{m\to\infty} P(\cap_{j=n}^{\infty}\{|X_j - X| \leq \frac{\delta}{2}\}) =$$

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{j=n}^{\infty} \{|X_j - X| \leq \frac{\delta}{2}\}) = 1,$$

pois, por hipótese, $X_n \to^{qc} X$.

Para provar a condição suficiente supomos que , para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_n |X_{n+m} - X_n| \leq \varepsilon) = 1.$$

Observe que para todo inteiro $k \geq n$ temos

$$\cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{n+m} - X_n |\leq \frac{\delta}{2}\} \subset \{| X_{k+m} - X_n |< \frac{\delta}{2}\} \cap \{| X_k - X_n |< \frac{\delta}{2}\} \subset$$

$$\{| X_{k+m} - X_k |< \delta\}$$

Consequentemente

$$\cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{n+m} - X_n |\leq \frac{\delta}{2}\} \subset \cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{k+m} - X_k |< \delta\},$$

para todo $k \geq n$, portanto

$$\cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{n+m} - X_n | \leq \frac{\delta}{2}\} \subset \cap_{k=n}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty} \{| X_{k+m} - X_k | < \delta\}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P(\cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{n+m} - X_n | \leq \frac{\delta}{2}\}) \leq \lim_{n\to\infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty} \{| X_{k+m} - X_k | < \delta\}) =$$
$$P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{k+m} - X_k | < \delta\})$$

pois a sequência $(\cap_{k=n}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty} \{| X_{k+m} - X_k | < \delta\})_{n\geq 1}$ é crescente.

Como , por hipótese, para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_n |X_{n+m} - X_n| \leq \varepsilon) = 1,$$

concluimos que, para todo $\delta > 0$

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{k+m} - X_k | < \delta\}) = 1.$$

Seja $\delta_p > 0$, com $\delta_p \downarrow 0$, quando $p \to \infty$ e considere o conjunto $A = \cap_{p=1}^{\infty} A_p$, onde

$$A_p = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{k+m} - X_k | < \delta_p\}.$$

Como, pela desigualdade de Boole

$$P(\cap_{p=1}^{\infty} A_p) \geq 1 - \sum_{p=1}^{\infty} P(A_p^c),$$

para qualquer sequência de eventos $(A_p)_{p\geq 1}$ temos

$$P(A) \geq 1 - \sum_{p=1}^{\infty} P(\{\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty}\{| X_{k+m} - X_k | < \delta_p\}\}^c)$$

e concluimos que $P(A) = 1$.

A sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ satisfaz o critério de Cauchy e para toda realização $w \in A$, existe uma função X^* tal que $\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)^*$. Defina $X(w) = X(w)^*$, *se* $w \in A$ e $X(w) = 0$ *se* $w \in A^c$. Desde que $P(A) = 1$ temos que $X_n \to^{qc} X$.

∎

Propriedades

P.1 - Se $X_n \to^{qc} X$ e f é uma função real contínua, então

$$f(X_n) \to^{qc} f(X).$$

Demonstração. Desde que f é contínua,, temos:

$$N^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to X(w)\} = \{w \in \Omega \ \mid \ f(X_n(w)) \to f(X(w))\}$$

e $P(N^c) = 1$.

■

P.2 - Se $X_n \to^{qc} X$ e $Y_n \to^{qc} Y$, então

$$X_n \pm Y_n \to^{qc} X \pm Y;$$

$$X_n.Y_n \to^{qc} X.Y;$$

$$\frac{X_n}{Y_n} \to^{qc} \frac{X}{Y}, \ \ quando \ \ bem \ \ definida.$$

Demonstração. Sejam

$$N_X^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to X(w)\} \ \ e \ \ N_Y^c = \{w \in \Omega \ \mid \ Y_n(w) \to Y(w)\}$$

, com $P(N_X^c) = 1$, $P(N_Y^c) = 1$, o que é equivalente a $P(N_X^c \bigcap N_Y^c)) = 1$.

Se $w \in N_X^c \bigcap N_Y^c)$, temos:

$$(X_n \pm Y_n)(w) \to^{qc} (X \pm Y)(w);$$

$$(X_n.Y_n)(w) \to^{qc} (X.Y)(w);$$

$$(\frac{X_n}{Y_n})(w) \to^{qc} (\frac{X}{Y})(w), \ \ quando \ \ bem \ \ definida.$$

■

1.5 Convergência em Probabilidade. Propriedades

Definição 1.4 *Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória definidas em um mesmo espaço de probabilidade. Considere a sequência de números $(P(|X_n - X| > \varepsilon))_{n\geq 1}$. Se $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, dizemos que X_n converge em probabilidade para X e denotamos por $X_n \to^P X$.*

Observação 1.6 Observe que convergência em probabilidade não é concernente à convergência pontual de $X_n(w)$ para $X(w)$. A interpretação é que, para valores grandes de n, as variáveis aleatórias X_n e X são aproximadamente iguais com grande probabilidade.