Topologia Geral

Textuniversitários 21

Leandro F. Aurichi

Topologia Geral

Editora Livraria da Física
São Paulo — 2022

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Aurichi, Leandro F.
Topologia geral / Leandro F. Aurichi. – São Paulo : Livraria da Física, 2022. – (Série textuniversitários ; 21)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-258-3

1. Topologia I. Título. II. Série.

22-127870 CDD-514.3

Índices para catálogo sistemático:

1. Topologia de espaços 514.3

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

ISBN 978-65-5563-258-3

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafisica.com.br

Prefácio

Este é um livro pensado como material para um primeiro curso de topologia. Os tópicos especificamente selecionados são influência direta do meu gosto pessoal e também da minha "criação topológica" no IME–USP.

Em diversos momentos optei por um formato não tão padrão em livros mais conhecidos. Essas escolhas muitas vezes tem motivação dupla: reduzir o tempo necessário em sala de aula, apresentando demonstrações mais curtas que as consideradas mais canônicas, ao mesmo tempo que isso possibilita que as demonstrações mais clássicas sejam apresentadas em formato de exercícios. Esse comportamento é bem evidente, por exemplo, na forma que o par "Lema de Urysohn e Teorema de Tietze" é apresentado. Classicamente, primeiro se prova o lema e então o teorema a partir dele — sendo as duas demonstrações longe de triviais. A opção aqui feita é apresentar um resultado parcial antes e então os dois resultados clássicos como corolários. A desvantagem é que a demonstração de tal resultado parcial lembra a demonstração clássica do Lema de Urysohn, mas com mais dificuldades técnicas. Por outro lado, o roteiro da demonstração clássica está nos exercícios.

Ainda com relação aos exercícios, foi minha intenção apresentar um curso paralelo neles. Há alguns conceitos que só são abordados nos exercícios. Na maioria dos casos, são algumas aplicações pontuais. Mas há também conceitos mais gerais, que são abordados em exercícios ao longo de diversos capítulos.

Este livro é fruto das minhas notas de aulas do curso de topologia do ICMC–USP. Ao longo dos anos, diversas opções foram sendo feitas, tanto na forma, como no conteúdo e sempre foi minha intenção de transformar tais notas em um livro, assim que elas se estabilizassem. O tempo mostrou que esse momento provavelmente não iria chegar — pelo menos não enquanto eu continuar lecionando o curso. Assim, gostaria de agradecer a todas as turmas que tive, especialmente a todo mundo que teve dúvidas e/ou sugestões. Gostaria também de agradecer especialmente à paciência do meu editor Thiago Augusto S. Dourado por me ajudar a aceitar a passagem para a fase livro, já que a fase estabilização não vinha.

Leandro Aurichi
São Carlos, SP
09 de setembro de 2022

Sumário

1

Espaços Topológicos

Topologia pode ser encarada como uma forma de se apresentar a noção de proximidade de uma maneira qualitativa — apesar que, num primeiro momento, sua definição parecer bastante artificial e pouco dizer sobre proximidade. Vamos fazer aqui uma pequena motivação, começando com uma forma bastante quantitativa da noção de proximidade: a métrica. Após isso, veremos que diversas propriedades são preservadas mesmo quando abandonamos os valores reais apresentados pela métrica (a passagem do quantitativo para o qualitativo). É justo dizer que essa apresentação será na linha "se fazemos essa pequena abstração aqui, ainda temos várias das propriedades interessantes e conseguimos uma gama muito maior de conjuntos". Tentando complementar tal apresentação, a última seção deste capítulo apresenta uma definição alternativa (porém equivalente) de topologia. Essa definição pode ser menos elegante, mas deixa mais aparente a motivação "proximidade qualitativa".

1.1 Definição e exemplos básicos

Começamos com uma maneira bastante usual de se apresentar a noção de proximidade de maneira quantitativa: a métrica.

Definição 1.1.1 Seja X um conjunto. Dizemos que (X, d) é um *espaço métrico*, se $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz:

(a) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(c) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Desta maneira, temos uma maneira de medir o quanto um ponto está próximo do outro — simplesmente vemos o valor de d neste dois pontos. Um ponto está mais próximo de outro o quanto menor for o valor de d calculado nestes dois pontos.

Exemplo 1.1.2 Uma métrica sobre o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ é a função $d(x, y) = |x - y|$. Esta é a métrica usual sobre $\mathbb{R}$.

Para muitos casos, essa noção de proximidade é suficiente[1]. Mas ela não cobre uma gama grande (e importante) de noções em matemática.

O seguinte exemplo é um caso simples onde o conceito não é aplicável: considere um rio com uma correnteza razoavelmente forte. Para simplificar, pensemos que esta correnteza anda para a direita e seja tão forte que não seja possível andar rio acima (ou seja, andar para esquerda). Podemos representar este rio usando a reta real, mas precisamos de uma noção de proximidade diferente da usual: ao tomarmos dois pontos x, y com $x < y$ queremos que y esteja perto de x mas não que x esteja perto de y (pois a correnteza não permite sair de y e chegar em x). Note que isso não é possível ao usar uma métrica, uma vez que teríamos $d(x, y) = d(y, x)$.

Uma maneira de contornar isso é simplesmente abandonar o conceito quantitativo de proximidade dado pela métrica e usarmos um conceito qualitativo[2].

[1] Por exemplo, para espaços de funções muitas vezes não é possível definir métricas.

[2] Veja também o Exercício 1.4.16.

Definição 1.1.3 Dizemos que (X, τ) é um *espaço topológico* se τ é uma família de subconjuntos de X satisfazendo:

(i) $\emptyset, X \in \tau$;

(ii) se $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$;

(iii) se I é um conjunto qualquer e, para cada $i \in I$, $C_i \in \tau$, então $\bigcup_{i \in I} C_i \in \tau$.

Neste caso, dizemos que cada elemento de τ é um *aberto* e o próprio τ é chamado de *topologia* sobre X.

De maneira mais informal, a primeira condição diz que o vazio e o espaço todos são abertos, a segunda diz que interseção finita de abertos é aberta e a última diz que união qualquer de abertos é aberto.

Note que só dois subconjuntos aparecem explicitamente como abertos. Isso inspira o primeiro exemplo (bastante trivial):

Exemplo 1.1.4 Dado X um conjunto, uma topologia sobre X é $\tau = \{\emptyset, X\}$. Tal topologia é chamada de *topologia caótica*.

Num outro extremo, podemos simplesmente declarar que todo subconjunto é aberto:

Exemplo 1.1.5 Dado um conjunto X, uma topologia sobre X é $\tau = \{A : A \subset X\}$. Tal topologia é chamada de *topologia discreta*.

Mas não ficamos só com exemplos triviais:

Exemplo 1.1.6 Considere (X, d) um espaço métrico. Vamos dizer que um conjunto $A \subset X$ é folgado se, para todo $x \in X$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$, onde[3]

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

[3] Tal conjunto é chamado de *bola aberta* de centro x e raio r.

É um exercício mostrar que $\tau = \{A \subset X : A \text{ é folgado}\}$ é uma topologia sobre X. Chamamos tal topologia de *topologia induzida pela métrica* d.

Voltando ao exemplo da correnteza forte do rio que comentamos acima, uma possível topologia que o representa é dada por:

Exemplo 1.1.7 Considere $\mathbb{R}$ com a seguinte topologia

$$\tau = \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A,\ \exists r > 0,\ [a, a + r[\subset A\}.$$

É um exercício verificar que τ de fato é uma topologia. Esse espaço é chamado de *reta de Sorgenfrey*.

Note que a diferença na definição dos abertos da reta de Sorgenfrey para os abertos usuais de $\mathbb{R}$ se dá na "folga" que pedimos em torno de cada ponto: nos usuais, pedimos folga em ambas direções enquanto que na reta de Sorgenfrey, a folga é pedida apenas na direção superior. Talvez por enquanto não fique claro porque tal topologia captura algo do exemplo do rio — mas, conforme andarmos com a teoria, isso deve ficar mais aparente.

Muitas vezes é mais conveniente descrever a topologia de forma mais local. Uma definição que ajuda tal direção é a seguinte:

Definição 1.1.8 Seja (X, τ) um espaço topológico. Dado $x \in X$, dizemos que $V \subset X$ é uma *vizinhança* de x se existe A aberto tal que $x \in A \subset V$.

Note que se $x \in A$ e A é aberto, então A é uma vizinhança de x. Mas podemos ter casos em que A não é aberto e, mesmo assim, é uma vizinhança de x. Por exemplo, considerando $\mathbb{R}$ com a topologia usual, $[0, 2[$ não é um conjunto aberto, mas é uma vizinhança do ponto 1. Note também que, apesar de $0 \in [0, 2[$, $[0, 2[$ não é uma vizinhança de 0.

Uma observação a se fazer é que um conjunto é aberto se, e somente se, ele é vizinhança de todos os pontos contidos nele (veja o Exercício 1.1.14).

Alongamentos

Alongamento 1.1.9 Mostre que todo aberto usual nos reais é um aberto na reta de Sorgenfrey.

Exercícios

Exercício 1.1.10 Seja X conjunto não vazio e seja σ uma topologia sobre X. Mostre que σ é a topologia discreta se, e somente se, $\{x\} \in \sigma$ para todo σ.

Exercício 1.1.11 Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $Y \subset X$. Considere

$$\sigma = \{A \cap Y : A \in \tau\} .$$

(a) Mostre que σ é uma topologia sobre Y — esta é conhecida como *topologia de subespaço* — em geral, numa situação $Y \subset X$, se nada for dito, estamos supondo em Y tal topologia.

(b) Considere $[0, 1]$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$. Mostre que $[0, \frac{1}{2}[$ é aberto em $[0, 1]$ mas não é aberto em $\mathbb{R}$.

Exercício 1.1.12 Seja X um conjunto qualquer. Considere

$$\tau = \{A \subset X : X \setminus A \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

(a) Mostre que τ é uma topologia. Chamamos tal topologia de *topologia cofinita*.

(b) Mostre que τ é a topologia discreta se, e somente se, X é finito.

Exercício 1.1.13 Fixe X conjunto infinito. Considere

$$\tau = \{A \subset X : A \text{ é infinito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Note que τ não é uma topologia. Compare com a definição da topologia cofinita.

Exercício 1.1.14 Mostre que um conjunto A é aberto se, e somente se, para todo $a \in A$, A é vizinhança de a.

1.2 Fechados e fechos

Um importante conceito é o de conjunto fechado[4]:

Definição 1.2.1 Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ é um *conjunto fechado* se $X \setminus F$ é aberto.

Exemplo 1.2.2 Em qualquer espaço topológico (X, τ), X e $\emptyset$ são fechados, pois seus complementares são abertos (em particular, X e $\emptyset$ são abertos e fechados).

Exemplo 1.2.3 Em $\mathbb{R}$, $[0, 1]$ é fechado já que $\mathbb{R} \setminus [0, 1] =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Exemplo 1.2.4 Na topologia discreta, qualquer conjunto é fechado. Para isso, basta notar que o complementar de qualquer conjunto é ainda um membro de $\wp(X)$ e, portanto, é aberto.

Exemplo 1.2.5 Na reta de Sorgenfrey, $[a, b[$ é fechado, onde $a < b$. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \setminus [a, b[$ é aberto. Se $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b[$, então há dois casos a considerar:

[4] A intuição sobre o que é um fechado ficará mais clara com o conceito de ponto aderente, que veremos a seguir.

- $x \geq b$: basta tomar o aberto $[x, x+1[$, cuja interseção com $[a, b[$ é vazia;

- $x < a$: podemos considerar o aberto $[x, a[$, que também está contido no complementar de $[a, b[$.

Portanto, o complementar de $[a, b[$ é aberto, como queríamos.

Algo muito comum de se fazer é tomar o menor fechado contendo um determinado conjunto:

Definição 1.2.6 Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Definimos

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

onde $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ é fechado e } A \subset F\}$ (*fecho* de A, também denotado por $\mathrm{Cl}(A)$).

Definimos

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$$

onde $\mathcal{V} = \{V \subset X : V \text{ é aberto e } V \subset A\}$ (*interior* de A).

Proposição 1.2.7 *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A}$ é fechado e $\mathrm{Int}(A)$ é aberto.*

Demonstração: Decorre diretamente da definição e das propriedades de conjuntos abertos e fechados. $\square$

Pensando que os abertos que contém um ponto são as possíveis noções de "perto do ponto", podemos definir a noção de um ponto estar perto de um conjunto se toda vez que olhamos para "perto do ponto", interceptamos o conjunto:

Definição 1.2.8 [5] Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é *ponto aderente* a A se para todo aberto V tal que $x \in V$ valer $V \cap A \neq \emptyset$.

Vamos mostrar que o fecho de um conjunto basicamente é a coleção de todos os pontos próximos do conjunto:

Proposição 1.2.9 *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A} = \{x \in X : x$ é ponto aderente de $A\}$.*

Demonstração: Chame de D o conjunto dos pontos aderentes a A. Vamos provar que $\overline{A} \subset D$. Seja $x \in \overline{A}$. Seja V aberto tal que $x \in V$ e suponha $V \cap A = \emptyset$. Logo, $A \subset X \setminus V$ que é fechado. Assim, pela definição de $\overline{A}$, segue que $\overline{A} \subset X \setminus V$, contradição com o fato que $x \in \overline{A}$ e $x \in V$.

Provemos que $D \subset \overline{A}$. Seja $x \in D$ e suponha $x \notin \overline{A}$. Logo, $x \in X \setminus \overline{A}$ que é aberto. Como $x \in D$, temos que $(X \setminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$. Contradição, pois $A \subset \overline{A}$. $\square$

Proposição 1.2.10 [6] *Sejam (X, τ) espaço topológico e $A, B \subset X$. Temos*

(a) Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$;

(b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(c) $\overline{A} = A$ se, e somente se, A é fechado.

Demonstração: Dado $x \in \overline{A}$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo aberto U que contém x. Como $A \subset B$, segue em particular que $U \cap B \neq \emptyset$. Isto prova *(a)*.

[5] Note que esta definição difere da definição que daremos para ponto de acumulação.

[6] Vale um resultado análogo para o interior de um conjunto A. Em particular, A é aberto se, e somente se, $\mathrm{Int}(A) = A$ (ver Alongamento 1.2.21).

Provemos *(c)*. Naturalmente se $\overline{A} = A$, obtemos que A é fechado, pois seu fecho é fechado. Reciprocamente, se A é fechado, segue que $\overline{A} \subset A$ (pela definição de fecho). Como $A \subset \overline{A}$ vale sempre, temos o resultado.

Finalmente, o item *(b)* segue diretamente de *(c)*, por $\overline{A}$ ser fechado. $\square$

Exemplo 1.2.11 Considere um conjunto X com a topologia discreta. Como todo subconjunto A de X é fechado, segue que $\overline{A} = A$ (e também que $\operatorname{Int}(A) = A$).

Exemplo 1.2.12 Em $\mathbb{R}$, $\overline{[a,b[} = [a,b]$. De fato, b é o único ponto fora de $[a,b[$ que é aderente a $[a,b[$.

Exemplo 1.2.13 Na reta de Sorgenfrey, $\overline{[a,b[} = [a,b[$. Para isso, basta lembrar que $[a,b[$ é fechado.

Exemplo 1.2.14 Em $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$. Ambas as igualdades se devem ao fato de que dado qualquer ponto $q \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contém pontos de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. O mesmo vale na reta de Sorgenfrey.

Algumas vezes, um ponto pode estar próximo tanto de um conjunto, como de seu complementar:

Definição 1.2.15 Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é um *ponto de fronteira* de A se para todo $V \subset X$ aberto tal que $x \in V$, temos $V \cap A \neq \emptyset$ e $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Notação 1.2.16 $\partial A = \{x \in X : x$ é ponto de fronteira de $A\}$.

Exemplo 1.2.17 Em $\mathbb{R}$, $\partial[a,b[= \{a,b\}$. Enquanto que na reta de Sorgenfrey temos que $\partial[a,b[= \emptyset$.

Note que a igualdade acima vale de modo geral. Se A é um subconjunto aberto e fechado de um espaço topológico (X, τ), então $\partial A = \emptyset$.

Exemplo 1.2.18 Em $\mathbb{R}$ (ou na reta de Sorgenfrey), $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Alongamentos

Alongamento 1.2.19 Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que são verdadeiras:

(a) $X, \emptyset$ são fechados;

(b) Se $F, G \subset X$ são fechados, então $F \cup G$ é fechado;

(c) Se $\mathcal{F}$ é uma família não vazia de fechados, então $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ é um fechado.

Alongamento 1.2.20 Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é *ponto interior* de A se existe V aberto tal que $x \in V \subset A$. Mostre que

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in X : x \text{ é ponto interior de } A\}.$$

Alongamento 1.2.21 Mostre o análogo à Proposição 1.2.10 para o interior.

Alongamento 1.2.22 Sejam (X, τ) espaço topológico e $A \subset X$. Mostre as seguintes afirmações:

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

(b) $\mathrm{Int}(A) \cap \partial A = \emptyset$.

(c) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$.