Equações Diferenciais: Um Curso Universitário

Parte I: Equações Ordinárias

Textuniversitários 19

Victor León
Bruno Scárdua

Equações Diferenciais: Um *Curso Universitário*

Parte I: Equações Ordinárias

Editora Livraria da Física
São Paulo — 2022

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

León, Victor
Equações diferenciais : um curso universitário parte I : equações ordinárias / Victor León, Bruno Scárdua. – São Paulo : Livraria da Física, 2022. – (Série textuniversitários ; 19)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-260-6

1. Álgebra linear 2. Equações diferenciais I. Scárdua, Bruno. II. Título. III. Série.

22-127869 CDD-515.35

Índices para catálogo sistemático:

1. Equações diferenciais : Matemática 515.35

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

ISBN 978-65-5563-260-6

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafisica.com.br

Prefácio

Equações diferenciais são um dos pilares do progresso científico humano. É difícil imaginar o mundo moderno sem a descoberta e o estudo das equações diferenciais. Podemos entender que o estudo destas iniciou-se ao mesmo tempo em que se iniciou o estudo do Cálculo como ferramenta para o estudo de problemas em Física. Isto nos leva aos idos de 1687 com a publicação dos primeiros trabalhos de Isaac Newton no tema. Não menos importante e na mesma época, é a contribuição de G. Wilhelm Leibniz ao tema. Deixando aspectos históricos para uma outra ocasião, o vasto progresso científico que se seguiu a este momento certamente tem suas bases solidamente fundamentadas na compreensão do mundo que é proporcionada pelo estudo das equações diferenciais. Mas o que são estas equações? "*Grosso modo*", equações diferenciais são equações envolvendo uma ou mais incógnitas que dependem de uma ou mais variáveis através de processos de derivação. Um modelo mais simples seria o de uma função $f(t)$ que depende do tempo e que satisfaz uma equação envolvendo $f(t)$ e algumas de suas "derivadas temporais". Com esta ideia imprecisa, porém intuitiva, de equação diferencial, podemos inferir que fenômenos físicos que envolvam leis associadas ao tempo, uma vez equacionados, resultarão em equações diferenciais. Isto realmente se verifica, *data venia* alguma imprecisão no enunciado desta regra.

A vastidão de aplicações modernas das equações diferenciais é por si só motivação suficiente para que este tema seja matéria obrigatória na formação de engenheiros, químicos, biólogos, meteorologistas, geólogos, economistas e, é claro, físicos e matemáticos. Seu interesse porém não se resume a estas carreiras, sendo uma área para a qual realmente não parece haver fronteiras definitivas.

Este livro tem como objetivo dar a um estudante em formação, elementos suficientes para o uso dos resultados fundamentais práticos da teoria das equações diferenciais em seu curso de graduação. Assim sendo, sem abrir mão de algum rigor e formalismo matemáticos, a teoria é apresentada de forma fluida e direta, visando o aprendizado dos principais conceitos e métodos de resolução das equações diferenciais que são utilizadas nas aplicações em engenharia, química, biologia e áreas afins. Tendo priorizado as técnicas de resolução destas equações, deixamos eventuais aspectos mais formais para o Apêndice do livro, servindo desta forma como eventual formação complementar. Sempre tendo em mente a formação de um aluno de graduação, seguimos, na escolha dos temas, um caminho que corresponderia a um típico curso de equações diferenciais de um ou dois semestres. Isto significa que iniciamos com equações ordinárias de primeira ordem, dando ênfase às equações lineares. Depois seguimos para as demais, destacando as equações de primeira ordem tipo variáveis separáveis, homogêneas ou aquelas que admitem fator de integração (ditas, *exatas* se admitirmos alguma imprecisão). Equações importantes como as de Riccati, Bernoulli e Clairaut são estudadas através da sua resolução pelos métodos clássicos.

Em seguida estudamos as equações ordinárias de segunda ordem. Para estas destacamos mais uma vez as equações lineares, homogêneas ou não, sendo que os métodos clássicos são apresentados. Desta forma estudamos a resolução das equações de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes e exploramos o conceito de espaço solução como espaço vetorial. Em seguida estudamos as equações lineares não-homogêneas através dos métodos de coeficientes a determinar, variação de parâmetros e redução de ordem. Aplicações práticas modernas são apresentadas ilustrando o uso prático destas técnicas. Destacamos a equação de Cauchy-Euler como um caso importante e o qual se resolve plenamente.

Após, seguimos para o estudo de equações lineares de ordem mais alta, ilustrando possíveis extensões das técnicas apresentadas.

Na seguinte etapa estudamos sistemas lineares com coeficientes constantes de equações diferenciais. Para estes alguma Álgebra linear é requerida, basicamente a forma canônica de Jordan e a noção de exponencial de uma matriz. Munidos disto apresentamos o algoritmo de Putzer para a solução destes sistemas que modelam muitos fenômenos importantes na natureza. Sistemas não-homogêneos são estudados ao fim desta etapa.

Visando o estudo de equações diferenciais lineares de ordem mais alta iniciamos o estudo da transformada de Laplace. Tal transformada permite associar a uma equação diferencial linear uma equação algébrica de grau associado à ordem da equação original. Isto nos dá um primeiro exemplo de uso deste tipo de procedimento no qual um problema é substituído por outro, teoricamente de solução mais factível. Atenção especial é dada a alguns aspectos que embora bem conhecidos, resultamos esquecidos, como convolução e funções especiais como a função de Heaviside e o delta de Dirac. Aplicações a Problemas de Valor Inicial (PVI) fecham esta parte. Exemplos importantes em circuitos elétricos são então obtidos.

Finalizamos esta primeira parte do texto com o estudo de equações diferenciais ordinárias com coeficientes analíticos, ou seja, a busca de soluções por séries de potências. Após apresentar os conceitos e propriedades básicas das séries de potências, introduzimos o método geral de solução de tais equações. Nesta etapa estudamos as equações de Riccati e os importantes exemplos das equações de Bessel e Legendre. Finalizamos esta parta apresentando o clássico método de Frobenius, associado ao conceito de singularidade regular. Por questões de espaço e viabilidade do texto final como um texto de graduação, nos limitamos ao caso de ordem dois.

Em seguida mergulhamos nos problemas de valores de contorno (PVC) mundo este populado por tantos exemplos importantes. Desta forma estudamos as equações de Schrödinger e sua resolução. Seguimos para os problemas de Stum-Liouville tão importantes em física e engenharia. Tal problema é resolvido com a introdução da fórmula de Green.

A Teoria de Fourier é apresentada em seguida. Iniciamos com as séries de Fourier, estudando também sua convergência e os resultados principais sobre diferenciação e integração destas, de forma bem fundamentada, como o leitor merece. A útil forma complexa da série de Fourier é apresentada de forma natural. Finalmente fechamos esta etapa com a transformada de Fourier, sendo esta apresentada de forma concisa porém robusta em preparação para as aplicações utilizadas na teoria de equações diferenciais parciais.

Este livro foi trabalhado com a intenção de ser complementado através do seu volume subsequente, em fase final de preparação, intitulado "Equações diferenciais: um curso universitário, Parte II: Equações parciais" [8] no qual damos os fundamentos da teoria das equações diferenciais parciais pertinentes a um primeiro curso de graduação, sempre focando no aspecto prático. Em particular, apresentamos um estudo do caso (semi)linear de ordem um, o caso linear de ordem dois e temos como objetivo claro: resolver as três equações fundamentais, calor, onda e Laplace. Também, usando a tecnologia então desenvolvida, resolver casos similares de equações diferenciais parciais lineares de ordem dois e problemas de valores de contorno.

Voltando ao presente volume, concluímos o texto com um Apêndice para o qual remetemos o leitor em busca de conhecimentos em sequências e séries de números reais, números complexos e com uma demonstração clássica do Teorema de Picard, sobre existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy.

Esperamos que este texto seja útil como livro ou como material de consulta rápida para um graduando ou graduado em alguma área das ciências exatas em busca de solução para suas equações diferenciais do dia-a-dia. Também que este sirva como material de estudo para interessados em ciência e que desejem ter uma melhor compreensão do mundo ao seu redor.

Enfim, o livro foi concebido para caber em um curso de um ou dois semestres que cubra o básico necessário para um aluno aprender o que se espera que ele aprenda em um curso de ciências exatas na assinatura equações diferenciais ordinárias.

Se você chegou até aqui, permita-nos lhe convidar a seguir neste texto e lhe desejar uma boa leitura e uma boa diversão.

Víctor León e Bruno Scárdua
Julho de 2022

Sumário

Prefácio **V**

1 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem **1**

1.1 Estudo da equação: $y' + ay = b$ 2

1.1.1 A lei de desintegração do rádio 2

1.1.2 A lei de Newton de intercâmbio de temperatura 6

1.1.3 Cinética química de primeira ordem para processos simples 9

1.1.4 Decaimento radioativo 11

1.1.5 Crescimento microbiano de bactérias 13

1.1.6 Exercícios 18

1.2 Estudo da equação: $y' + ay = b(t)$ 21

1.2.1 Circuitos elétricos simples 45

1.2.1.1 Circuito RL 47

1.2.1.2 Circuito RC 49

1.2.2 Exercícios 50

1.3 Estudo do caso geral: $y' + a(t)y = b(t)$ 53

1.3.1 O problema de diluição 74

1.3.2 Exercícios 81

1.4 A equação diferencial linear de primeira ordem para funções com valores complexos 86
1.4.1 Exercícios 95

2 Equações ordinárias de primeira ordem 101
2.1 A equação geral de primeira ordem 101
2.2 As equações de Bernoulli, Riccati e Clairaut 107
2.2.1 Exercícios 130
2.3 Equações diferenciais em variáveis separáveis 132
2.3.1 Exercícios 137
2.4 Equações diferenciais homogêneas 139
2.4.1 Exercícios 145
2.5 Equações diferenciais exatas 146
2.5.1 Exercícios 152
2.6 Equações diferenciais redutíveis a equações exatas: fatores integrantes 152
2.6.1 Exercícios 161
2.7 Teorema de existência e unicidade 163
2.7.1 Exercícios 170
2.8 Método de aproximação de Euler 172
2.8.1 Exercícios 180

3 Equações diferenciais lineares de segunda ordem 181
3.1 Equações homogêneas com coeficientes constantes . . 181
3.1.1 Problema de valor inicial associada à equação diferencial linear homogênea de segunda ordem 187
3.1.2 Construção de uma base com valores reais do espaço solução 191
3.1.3 Algumas aplicações das equações lineares homogêneas de segunda ordem 197
3.1.3.1 Sistema massa-mola simples e sem amortecimento 197

3.1.3.2 Sistema de massa-mola simples com amortecimento 200
3.1.3.3 Circuito LC 202
3.1.4 Exercícios 204
3.2 Equações não homogêneas com coeficientes constantes 210
3.2.1 Método de variação de parâmetros 212
3.2.2 Método dos coeficientes indeterminados 219
3.2.2.1 Circuito LC 228
3.2.3 Exercícios 233

4 Equações de segunda ordem 237
4.1 O pêndulo simples 237
4.2 Outras equações de segunda ordem 241
4.3 Equações diferenciais ordinárias com coeficientes variáveis 241
4.3.1 A equação de Cauchy-Euler 243
4.3.2 Redução de ordem 251
4.3.3 Exercícios 254

5 Equações diferenciais lineares de ordem mais alta 259
5.1 Equações homogêneas com coeficientes constantes . . 259
5.1.1 Exercícios 261
5.2 Equações não homogêneas com coeficientes constantes 263
5.2.1 Método de variação de parâmetros 263
5.2.2 Método dos coeficientes indeterminados 271
5.2.3 Exercícios 275

6 Sistemas lineares com coeficientes constantes 277
6.1 Sistemas autônomos e não autônomos 277
6.2 Noções de cálculo matricial 279
6.2.1 Exercícios 282
6.3 Sistemas lineares 284
6.4 Sistemas lineares homogêneos 289
6.5 Sequências de Matrizes 294

6.6 Séries de Matrizes 299
6.6.1 Exercícios 302
6.7 Exponencial de uma matriz 305
6.8 O teorema de existência e unicidade de EDO lineares . 312
6.9 Álgebra linear e cálculo prático de exponenciais de matrizes 320
6.9.1 Exercícios 334
6.10 Solução de sistemas lineares usando as formas canônicas de Jordan 337
6.10.1 Exercícios 341
6.11 O algoritmo de Putzer 342
6.11.1 Exercícios 348
6.12 Sistemas lineares não homogêneos 352
6.12.1 Exercícios 356

7 A Transformada de Laplace 359
7.1 Definição da Transformada de Laplace 359
7.2 Condições suficientes para a existência da transformada de Laplace 368
7.3 A transformada de Laplace de um função periódica . . 377
7.3.1 Exercícios 380
7.4 A transformada de Laplace inversa 387
7.4.1 Frações Parciais 394
7.4.2 Completando quadrados 396
7.5 Equações diferenciais e transformada de Laplace 398
7.5.1 O conceito de convolução 401
7.5.2 Exercícios 407
7.6 Aplicações de transformada de Laplace a funções seccionalmente contínuas 411
7.7 A “função” delta de Dirac 418
7.8 Sistemas de equações diferenciáveis e transformada de Laplace 422

7.9 Aplicações da transformada de Laplace aos circuitos elétricos 425
7.10 A transformada de Laplace e as equações em derivadas parciais 430
7.10.1 Exercícios 433

8 Resolução de equações diferencias por séries de potências: método de Frobenius 439
8.1 Séries de potências 439
8.1.1 Exercícios 448
8.2 Séries de potências e as equações diferenciais 450
8.2.1 Equação de Riccati 461
8.2.2 Equação de Legendre 464
8.2.2.1 Polinômios de Legendre 467
8.2.3 Exercícios 470
8.3 Teorema de Frobenius 475
8.3.1 Equação de Bessel 496
8.3.2 Exercícios 502

9 Problemas de Valores de Contorno 509
9.1 Introdução 509
9.2 Problemas de auto-valores 516
9.2.1 A equação de Schrödinger 522
9.2.2 Exercícios 523
9.3 O problema de Sturm-Liouville 525
9.4 Problemas não homogêneos e Função de Green 530
9.4.1 Função de Green modificada 547
9.5 Problemas de Sturm-Liouville 554
9.5.1 Ortogonalidade de auto-funções 560
9.5.2 Expansão em auto-funções 567
9.5.3 Convergência em média quadrática 571
9.5.4 O problema de Sturm-Liouville não homogêneo 574

9.5.5 A função de Green e sua expansão em autofunções 576
9.6 Os Teoremas de Sturm 585
9.6.1 Teorema de separação de Sturm 585
9.6.2 Teorema de comparação de Sturm 586
9.6.3 Exercícios 592

10 Teoria de Fourier **601**
10.1 Ortogonalidade de funções trigonométricas 602
10.2 Séries de Fourier 605
10.3 Forma complexa da série de Fourier 611
10.4 Séries de Fourier de cossenos e de senos 616
10.5 Desigualdade de Bessel e Teorema de Riemann-Lebesgue 627
10.6 Convergência da série de Fourier 633
10.7 Diferenciação e integração da série de Fourier 643
10.8 A integral de Fourier 650
10.9 A transformada de Fourier 667
10.10 Exercícios 682

11 Apêndice **699**
11.1 Sequências e séries de números reais 699
11.2 Números complexos 722
11.3 O Teorema de Picard 737

Referências Bibliográficas **755**

Índice Remissivo **757**

1

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Este primeiro volume trata de equações diferenciais ordinárias, ou seja, *grosso modo* de equações envolvendo uma função de uma única variável e suas derivadas. Neste primeiro momento, mais importante do que formalizar em sua plenitude o conceito de equação diferencial ordinária, é motivar a sua noção intuitiva. Podemos pensar em uma equação diferencial ordinária como uma equação envolvendo uma função de uma variável (em geral pensamos nesta variável como o tempo) e suas derivadas de até uma certa ordem. A ordem máxima destas derivadas é a ordem da equação diferencial. Veja que no momento não estamos preocupados com tecnicalidades, mesmo que importantes, como por exemplo o domínio de definição ou a classe de diferenciabilidade (derivabilidade) da equação diferencial (dos seus coeficientes). O que nos importa é motivar o conceito e o estudo destas equações começando pelo caso mais simples destas. Resulta ser este o caso linear de primeira ordem que passamos a estudar em etapas consecutivas com crescente grau de complexidade. Desta forma, o primeiro caso a ser estudado é o caso linear de primeira ordem com coeficientes constantes. Vejamos este caso começando por um importante exemplo.

1.1 Estudo da equação: $y' + ay = b$

Estudaremos então a equação diferencial da forma

$$y' + ay = b$$

sendo que a e b são constantes e y é uma função real de uma variável real t.

1.1.1 A lei de desintegração do rádio

Em 1902, Ernest Rutherford e Frederick Soddy sugerem que a taxa de variação da quantidade de rádio em um processo de desintegração, é proporcional à quantidade de rádio em cada momento. Assim, se $Q(t)$ é a quantidade de rádio no instante t, temos que existe $k < 0$ tal que

$$Q'(t) = kQ(t). \tag{1.1.1}$$

Multiplicando por $1/Q(t)$ em ambos os lados de (1.1.1) temos

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = k$$

$$(\ln Q(t))' = k$$

logo integrando de 0 a t ($t \geq 0$) temos

$$\int_0^t (\ln Q(s))'\, ds = \int_0^t k ds$$

$$\ln Q(t) - \ln Q(0) = kt$$

$$\ln\left(\frac{Q(t)}{Q(0)}\right) = kt$$

portanto a solução de (1.1.1) é dada por

$$Q(t) = Q(0)e^{kt}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{1.1.2}$$

A equação (1.1.1) é um caso particular da equação diferencial

$$y' + ay = b,\ t \geq 0 \tag{1.1.3}$$

com $a,\ b \in \mathbb{R}$. Uma *solução* de (1.1.3) é uma função $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ com derivada contínua, tal que

$$\varphi'(t) + a\varphi(t) = b, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Quando $a = 0$ temos que a equação (1.1.3) é dada por

$$y' = b,\ t \geq 0 \tag{1.1.4}$$

com $b \in \mathbb{R}$. Integrando ambos os lados de (1.1.4) temos

$$y = bt + c$$

onde c é uma constante. **Conclusão:** Toda solução de (1.1.4) é da forma

$$\varphi(t) = bt + c, \quad \text{para todo } t \geq 0 \tag{1.1.5}$$

onde c é constante. A equação (1.1.4) é um caso particular de (1.1.3).

Consideremos agora o caso $b = 0$ assim temos a equação

$$y' + ay = 0, \ t \geq 0 \tag{1.1.6}$$

com $a \in \mathbb{R}$. Multiplicando e^{at} ambos os lados de (1.1.6) têm-se

$$e^{at}(y' + ay) = 0$$

$$y'e^{at} + y(ae^{at}) = 0$$

$$(ye^{at})' = 0$$

integrando temos que

$$ye^{at} = c$$

onde c é constante. Então $y = ce^{-at}$.

Conclusão: Toda solução de (1.1.6) é da forma

$$\varphi(t) = ce^{-at}, \quad \text{para todo } t \geq 0 \tag{1.1.7}$$

onde c é constante. A equação (1.1.6) é por sua vez um caso particular de (1.1.3).

Suponha que $a \neq 0$. Multiplicando e^{at} ambos os lados de