

*Cálculo Diferencial
e Integral I*

Textuniversitários 17

COMISSÃO EDITORIAL:

Thiago Augusto Silva Dourado

Francisco César Polcino Milies

Carlos Gustavo T. de A. Moreira

Ana Luiza da Conceição Tenório

Gerardo Barrera Vargas

João Carlos Vieira Sampaio

CÁLCULO DIFERENCIAL
e Integral I



Editora Livraria da Física

São Paulo — 2022

Copyright © 2022 Editora Livraria da Física

1a. Edição

Editor: JOSÉ ROBERTO MARINHO

Projeto gráfico e diagramação: THIAGO AUGUSTO SILVA DOURADO

Capa: FABRÍCIO RIBEIRO

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Sampaio, João Carlos Vieira

Cálculo diferencial e integral I / João Carlos Vieira Sampaio. – São Paulo : Livraria da Física, 2022. – (Textuniversitários ; 17)

Bibliografia.

ISBN 978-65-5563-261-3

1. Cálculo diferencial 2. Cálculo integral 3. Equações diferenciais I. Título. II. Série.

22-127868

CDD-515.33

Índices para catálogo sistemático:

I. Cálculo diferencial : Matemática 515.33

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

ISBN 978-65-5563-261-3

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil

Printed in Brazil



Editora Livraria da Física

Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413

www.livrariadafisica.com.br

PREFÁCIO

Este livro de Cálculo foi escrito a partir de notas de aulas para uso simultâneo do professor e de seus alunos, em um curso introdutório de Cálculo, com a duração de 14 a 16 semanas, com dois encontros semanais de duas horas-aula cada. No formato em que o texto é apresentado, tudo que há nele foi pensado de modo a ser explorado em sala de aula e de poder ser completamente lido pelos alunos.

Conceitos e proposições (teoremas) do Cálculo (para funções reais de uma variável real) são apresentados e ilustrados o mais intuitivamente possível. Por exemplo, no livro não é definido o conceito de limite em termos de ϵ s e δ s. O conceito de limite é apresentado apenas intuitivamente, através de vários exemplos em que são calculados e interpretados geometricamente diversos tipos de limites. Imitando a gênese histórica dos conceitos, derivadas são apresentadas antes de limites.

Tentando sugerir um planejamento didático, foi dado a cada capítulo o nome de Aula. Os capítulos de 1 a 20 são, na visão do autor, os de conteúdos mínimos a serem explorados. Nos oito primeiros capítulos, aplicações e conceitos básicos do Cálculo Diferencial são desenvolvidos usando-se como exemplos apenas funções algébricas. Nos capítulos seguintes são reintroduzidos os mesmos conceitos para as funções transcendentais básicas.

O capítulo 13 trata das Regras de L'Hopital para o cálculo de limites, imprescindíveis para a análise do comportamento de várias funções que envolvem funções exponenciais, trigonométricas e suas inversas.

A partir do capítulo 15 são desenvolvidos, até o capítulo 20, conceitos de Cálculo Integral. O capítulo 21, sobre integrais impróprias é opcional.

No capítulo 22, que não precisa do capítulo 21 como requisito, o cálculo diferencial é retomado com a apresentação da Fórmula de Taylor.

O livro não pretende substituir a boa literatura do Cálculo existente. O leitor não satisfeito com o tratamento intuitivo dado pelo texto poderá encontrar tratamento formal, com rigor matemático dos textos de análise matemática, em outras referências existentes, como por exemplo os volumes iniciais de Cálculo de autoria do professor Hamilton Luiz Guidorizzi.

Os problemas propostos ao final de cada capítulo são em sua maioria simples, com o grau de dificuldade evoluindo à medida que o leitor avança na lista de problemas propostos. Respostas de todos os problemas são apresentadas, alguns problemas selecionados vem acompanhados de boas sugestões para a resolução.

Apesar do professor autor ter feito uso do programa livre GeoGebra na sua prática docente, não são apresentadas atividades de exploração de conteúdos e exemplos mediante programas computacionais. Isto requereria um número razoável de páginas adicionais, tirando o caráter de um texto pensado para ser relativamente enxuto.

Texto e problemas passaram por boa revisão de colegas professores da UFSCar, durante seu uso em turmas de Cálculo, tendo sido apontadas por eles várias correções e aperfeiçoamentos. Dentre esses colegas, destaco com agradecimentos (em ordem alfabética do primeiro nome) os professores Adilson Eduardo Presoto, Guillermo Antonio Lobos Villagra, Ivo Machado da Costa, Paulo Antonio Silvani Caetano e Sávio Brochini Rodrigues.

Não menos merecedores de agradecimentos, por adotarem o texto em seus cursos e também sugerirem melhorias para o mesmo, são os colegas docentes Grazielle Feliciani Barbosa, João Nivaldo Tomazella, Luciene Nogueira Bertoncello, Luis Antonio de Carvalho dos Santos, Olimpio Hiroshi Miyagaki, Pedro Luiz Aparecido Malagutti, Rafael Fernando Barostichi, Selma Helena de Jesus Nicola, Tomas Edson Barros, Vera Lúcia Carbone e Waldeck Schützer.

Na confecção inicial do texto, anos atrás, muitas boas sugestões vieram de Yolanda Kioko Saito Furuya e Roberto Ribeiro Paterlini, colegas docentes da UFSCar já aposentados no momento, a quem também agradeço. O capítulo 14 foi inteiramente escrito por sugestão da professora Yolanda.

Foram também cruciais as sugestões de melhorias e correções apontadas mais recentemente pelas alunas da UFSCar Beatriz Giacomelli Rodrigues da Silva (do curso de Licenciatura em Química) e Luana de Queiroz Garcia (do curso de Ciência da Computação), às quais externo minha gratidão.

Agradeço também ao apoio imprescindível recebido desde sempre de minha esposa Elsa, e de meus filhos Joana e Pedro, sempre gentis com o pai em estímulos ao trabalho.

Finalmente agradeço ao professor e amigo Thiago Augusto Silva Dourado, pelo estímulo generoso à publicação do livro, pela editoração completa do mesmo no formato em que se encontra e pela inserção das notas biográficas ao final do livro.

A outras pessoas que deveria ter agradecido e não foram citadas só me resta pedir desculpas.

São Carlos, Janeiro de 2022

SUMÁRIO

Prefácio	V
1 Velocidade Instantânea e Derivadas	1
1.1 Velocidade instantânea	1
1.2 Derivada de uma função	3
1.3 Notações simbólicas para derivadas, habitualmente empregadas	6
1.4 Primeiras regras de derivação (ou diferenciação)	9
1.5 Problemas	13
1.5.1 Respostas e sugestões	15
2 Derivadas e Retas Tangentes. Novas Regras de Derivação	17
2.1 A derivada como inclinação de uma reta tangente ao gráfico da função	17
2.2 Novas regras de derivação	22
2.3 Problemas	26
2.3.1 Respostas e sugestões	27

3	Derivação em Cadeia e Derivação Implícita	29
3.1	A regra da cadeia para derivar uma composição de funções	29
3.2	Derivadas de funções dadas implicitamente	32
3.3	Derivada da função potência $f(x) = x^r$, sendo r um número racional	35
3.4	Problemas	38
3.4.1	Respostas e sugestões	40
4	Limites: Uma Introdução Intuitiva	43
4.1	Conceituando limites através de exemplos	43
4.2	Limites infinitos e limites no infinito	47
4.3	Ilustrações geométricas da ocorrência de alguns limites	52
4.4	Problemas	55
4.4.1	Respostas e sugestões	56
5	Limites Laterais	59
5.1	Limites laterais através de exemplos	59
5.2	Problemas	67
5.2.1	Respostas e sugestões	70
6	Esboçando Gráficos — Primeiros Passos	71
6.1	Crescimento e decréscimo	71
6.2	Derivadas de ordem superior e concavidades do gráfico	76
6.3	Problemas	82
6.3.1	Respostas e sugestões	83
7	Esboçando Gráficos — Zeros no Denominador e Retas Assíntotas	89
7.1	Assíntotas verticais, assíntotas horizontais, assíntotas inclinadas	90
7.2	Um exemplo de função contínua com derivada descontínua	97

7.3	Problemas	103
7.3.1	Respostas e sugestões	104
8	Máximos e Mínimos	109
8.1	Estratégias para determinar máximos e mínimos de uma função contínua, em um intervalo	111
8.2	Aplicações a problemas de otimização	118
8.3	Problemas	122
9	Funções Exponenciais e Logarítmicas — Uma Revisão e o Número e	131
9.1	Pequena revisão de potências	131
9.2	A função exponencial	133
9.3	Logaritmos e funções logarítmicas	135
9.4	O número e	138
9.5	Levantando indeterminações da forma $1^{\pm\infty}$	141
9.6	Problemas	144
10	Derivando Funções Exponenciais e Logarítmicas	147
10.1	Problemas	152
11	Funções Trigonométricas e o “Primeiro Limite Fundamental”	157
11.1	Pequena revisão de trigonometria	157
11.1.1	Trigonometria geométrica	157
11.1.2	Trigonometria analítica	160
11.2	O “primeiro limite fundamental”	165
11.3	Problemas	169
11.3.1	Respostas e sugestões	169
12	Derivando Funções Trigonométricas	171
12.1	Derivação de funções trigonométricas diretas	171
12.2	Funções trigonométricas inversas e suas derivadas	173

12.2.1	A função arco-seno	173
12.2.2	A função arco-cosseno	174
12.2.3	A função arco-tangente	175
12.3	Problemas	179
13	Limites Indeterminados e as Regras de L'Hôpital	185
13.1	Regras de L'Hôpital frente a novos símbolos de indeterminação em limites	189
13.2	Novos exemplos de gráficos envolvendo funções exponenciais	195
13.3	Problemas	199
14	Taxas relacionadas. Diferenciais	203
14.1	Taxas relacionadas	203
14.2	Diferenciais	206
14.3	Problemas	212
14.3.1	Problemas sobre taxas relacionadas	212
14.3.2	Problemas sobre diferenciais	214
15	Integrais Indefinidas	217
15.1	Antiderivadas	217
15.2	Integrais imediatas	221
15.3	Manipulações elementares de integrais	222
15.4	Exemplos elementares	224
15.5	Integração por mudança de variável ou integração por substituição	226
15.6	Ampliando nossa tabela de integrais imediatas	231
15.6.1	Nossa tabela de integrais imediatas	233
15.7	Problemas	233
16	Integração por Partes	237
16.1	Um estratégia para escolhas adequadas de u e dv na integração por partes	241

16.2	Problemas	246
17	Integrais Definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo	251
17.1	A integral definida	251
17.2	O teorema fundamental do cálculo	262
17.2.1	Integração definida com mudança de variável	266
17.2.2	Integração definida por partes	269
17.3	Problemas	270
17.3.1	Usando o teorema fundamental do cálculo, segunda versão	270
17.3.2	Aplicando o teorema fundamental do cálculo, primeira versão	271
18	Ampliando o Repertório de Técnicas de Integração	273
18.1	Completando quadrados	273
18.2	Integrais da forma $\int \sin^m x \cos^n x dx$, m e n inteiros não negativos	277
18.2.1	Primeiro caso: m ou n é um inteiro ímpar	277
18.2.2	Segundo caso: m e n são ambos pares	279
18.3	Fórmulas de redução (ou de recorrência)	281
18.4	Problemas	286
19	Substituições Trigonométricas e Funções Racionais	291
19.1	Substituições trigonométricas	291
19.2	Integração de funções racionais	295
19.2.1	Decompondo funções racionais em frações parciais	297
19.3	Problemas	306
20	Aplicações Seleccionadas da Integral Definida	309
20.1	Área de uma região plana	309
20.2	Média ou valor médio de uma função	312
20.3	Volume de um sólido por fatiamento	314

20.3.1	Volume de um sólido de revolução por fatiamento	317
20.4	Comprimento de uma curva	319
20.5	Área de uma superfície de revolução	323
20.6	Centro de massa (ou de gravidade) de uma região plana	327
20.7	Problemas	331
21	Tópicos Adicionais de Integração Finita	335
21.1	Volume de um sólido de revolução pelo método das cascas cilíndricas	335
21.2	Integrais impróprias	341
21.2.1	Integrais impróprias com funções integrandas descontínuas em um ou ambos os extremos de integração	341
21.2.2	Integrais tendo limites de integração infinitos .	347
21.2.3	Alguns critérios para estabelecer convergência de integrais impróprias	348
21.3	Problemas	354
21.3.1	Volumes de sólidos de revolução pelo método das cascas cilíndricas	354
21.3.2	Integrais impróprias	354
22	A Fórmula de Taylor	359
22.1	Polinômios de Taylor	359
22.2	Efetividade do polinômio de Taylor como aproximação de uma função	367
22.2.1	A fórmula de Taylor com resto	367
22.2.2	Estimativas do resto $R_n(x)$ na fórmula de Taylor	368
22.3	(Opcional) Demonstração do teorema 22.1	372
22.4	Problemas	375
	Notas Biográficas	379
	Bolzano	379
	Euler	380

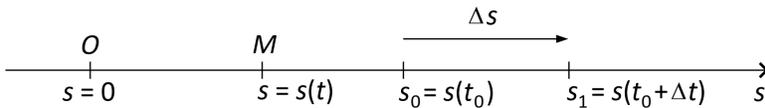
Fermat	383
Lagrange	385
Leibniz	386
L'Hôpital	390
Maclaurin	393
Napier	395
Newton	396
Rolle	400
Taylor	401
Weierstrass	404
Bibliografia Comentada	407
Notações	411
Índice Remissivo	415

AULA 1

VELOCIDADE INSTANTÂNEA E DERIVADAS

1.1 Velocidade instantânea

Suponhamos que um ponto móvel M desloca-se ao longo de uma linha reta horizontal, a partir de um ponto O .



O deslocamento s , de M , em relação ao ponto O , é a distância de O a M , se M está à direita de O , e é o negativo dessa distância se M está à esquerda de O . Assim, s é positivo ou negativo, conforme M se encontrar, respectivamente, à direita ou à esquerda de O .

Com estas convenções, a reta passa a ser *orientada*, e a chamamos de *eixo s* , sendo O sua origem.

O deslocamento s depende do instante de tempo t , ou seja, s é uma função da variável t :

$$s = s(t).$$

Em um determinado instante t_0 , o deslocamento de M é $s_0 = s(t_0)$. Em um instante posterior t_1 , o deslocamento de M é $s_1 = s(t_1)$.

A *velocidade média* do ponto M , no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é dada por

$$v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Podemos também escrever $t_1 = t_0 + \Delta t$, ou seja, $\Delta t = t_1 - t_0$, e também $\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

Teremos então

$$v_m = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Por exemplo, vamos supor que $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ (o ponto móvel é uniformemente acelerado). Assim, no instante $t = 0$ o ponto móvel está em $s(0) = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 = 0$.

A partir de um certo instante t_0 , temos uma variação de tempo Δt . Seja $t_1 = t_0 + \Delta t$. Podemos ter $\Delta t > 0$ ou $\Delta t < 0$ (quando $\Delta t < 0$, o instante t_1 antecede t_0). Teremos então

$$s(t_1) = s(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 = \frac{1}{2}(at_0^2 + 2at_0 \cdot \Delta t + a(\Delta t)^2).$$

A variação do deslocamento do ponto móvel, nesse intervalo de tempo, será

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = \frac{1}{2}at_0^2 + at_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2,$$

ou seja,

$$\Delta s = at_0 \cdot \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}.$$

A velocidade média do ponto, no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, será dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{at_0 \cdot \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2}.$$

Se $\Delta t \approx 0$, então também teremos $\Delta s = at_0 \cdot \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2} \approx 0$. No entanto,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2} \approx at_0.$$

De um modo geral, definimos a *velocidade instantânea* $v(t_0)$, do ponto M , no instante t_0 , como sendo o *limite* da velocidade média no intervalo de t_0 a $t_0 + \Delta t$, quando Δt *tende a zero* (esta foi uma ideia de Isaac Newton, um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII), e escrevemos

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

No nosso exemplo,

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(at_0 + \frac{a\Delta t}{2} \right) = at_0.$$

1.2 Derivada de uma função

Uma *função* f é uma lei que associa cada valor x de um certo conjunto A (o *domínio* de f), um único valor $f(x)$ de um certo conjunto B (o *contradomínio* de f). Neste curso, teremos sempre $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Veja também a observação 1.1, mais adiante nesta aula, pág. 7. Muitas vezes diremos “função $f(x)$ ”, em lugar de “função f ”.

Dada uma função $f(x)$, a *função derivada* $f'(x)$ (leia-se “ f linha de x ”) é a função definida quando consideramos, para cada x no

domínio de $f(x)$ (ou para cada x em um intervalo aberto contido no domínio de f), sujeito a uma variação $\Delta x \neq 0$, a variação correspondente de $y = f(x)$,

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

e então calculamos o valor limite da razão

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

quando Δx tende a 0, ou seja, quando Δx se aproxima indefinidamente de 0. Escrevemos então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Para um valor específico de x , digamos $x = x_0$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

é a derivada de f (ou de $f(x)$), no ponto x_0 .

Como estabelecemos na seção anterior, para um ponto móvel M em movimento retilíneo sobre um eixo s , se $s(t)$ indica sua posição no instante t , então a velocidade instantânea de M no instante t é a derivada $s'(t)$.

Como primeiro e importante exemplo de cálculo de derivadas, temos:

Regra 1.1 Se $f(x) = x^n$, n inteiro positivo, então

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$