Cálculo Diferencial e Integral I

Textuniversitários 17

João Carlos Vieira Sampaio

Cálculo Diferencial *e Integral I*

Editora Livraria da Física
São Paulo — 2022

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Sampaio, João Carlos Vieira
Cálculo diferencial e integral I / João Carlos Vieira Sampaio. – São Paulo : Livraria da Física, 2022. – (Textuniversitários ; 17)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-261-3

1. Cálculo diferencial 2. Cálculo integral 3. Equações diferenciais I. Título. II. Série.

22-127868 CDD-515.33

Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo diferencial : Matemática 515.33

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

ISBN 978-65-5563-261-3

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafisica.com.br

Prefácio

Este livro de Cálculo foi escrito a partir de notas de aulas para uso simultâneo do professor e de seus alunos, em um curso introdutório de Cálculo, com a duração de 14 a 16 semanas, com dois encontros semanais de duas horas-aula cada. No formato em que o texto é apresentado, tudo que há nele foi pensado de modo a ser explorado em sala de aula e de poder ser completamente lido pelos alunos.

Conceitos e proposições (teoremas) do Cálculo (para funções reais de uma variável real) são apresentados e ilustrados o mais intuitivamente possível. Por exemplo, no livro não é definido o conceito de limite em termos de épsilons e deltas. O conceito de limite é apresentado apenas intuitivamente, através de vários exemplos em que são calculados e interpretados geometricamente diversos tipos de limites. Imitando a gênese histórica dos conceitos, derivadas são apresentadas antes de limites.

Tentando sugerir um planejamento didático, foi dado a cada capítulo o nome de Aula. Os capítulos de 1 a 20 são, na visão do autor, os de conteúdos mínimos a serem explorados. Nos oito primeiros capítulos, aplicações e conceitos básicos do Cálculo Diferencial são desenvolvidos usando-se como exemplos apenas funções algébricas. Nos capítulos seguintes são reintroduzidos os mesmos conceitos para as funções transcendentes básicas.

O capítulo 13 trata das Regras de L'Hopital para o cálculo de limites, imprescindíveis para a análise do comportamento de várias funções que envolvem funções exponenciais, trigonométricas e suas inversas.

A partir do capítulo 15 são desenvolvidos, até o capítulo 20, conceitos de Cálculo Integral. O capítulo 21, sobre integrais impróprias é opcional.

No capítulo 22, que não precisa do capítulo 21 como requisito, o cálculo diferencial é retomado com a apresentação da Fórmula de Taylor.

O livro não pretende substituir a boa literatura do Cálculo existente. O leitor não satisfeito com o tratamento intuitivo dado pelo texto poderá encontrar tratamento formal, com rigor matemático dos textos de análise matemática, em outras referências existentes, como por exemplo os volumes iniciais de Cálculo de autoria do professor Hamilton Luiz Guidorizzi.

Os problemas propostos ao final de cada capítulo são em sua maioria simples, com o grau de dificuldade evoluindo à medida que o leitor avança na lista de problemas propostos. Respostas de todos os problemas são apresentadas, alguns problemas selecionados vem acompanhados de boas sugestões para a resolução.

Apesar do professor autor ter feito uso do programa livre GeoGebra na sua prática docente, não são apresentadas atividades de exploração de conteúdos e exemplos mediante programas computacionais. Isto requereria um número razoável de páginas adicionais, tirando o caráter de um texto pensado para ser relativamente enxuto.

Texto e problemas passaram por boa revisão de colegas professores da UFSCar, durante seu uso em turmas de Cálculo, tendo sido apontadas por eles várias correções e aperfeiçoamentos. Dentre esses colegas, destaco com agradecimentos (em ordem alfabética do primeiro nome) os professores Adilson Eduardo Presoto, Guillermo Antonio Lobos Villagra, Ivo Machado da Costa, Paulo Antonio Silvani Caetano e Sávio Brochini Rodrigues.

Não menos merecedores de agradecimentos, por adotarem o texto em seus cursos e também sugerirem melhorias para o mesmo, são os colegas docentes Grazielle Feliciani Barbosa, João Nivaldo Tomazella, Luciene Nogueira Bertoncello, Luis Antonio de Carvalho dos Santos, Olimpio Hiroshi Miyagaki, Pedro Luiz Aparecido Malagutti, Rafael Fernando Barostichi, Selma Helena de Jesus Nicola, Tomas Edson Barros, Vera Lúcia Carbone e Waldeck Schützer.

Na confecção inicial do texto, anos atrás, muitas boas sugestões vieram de Yolanda Kioko Saito Furuya e Roberto Ribeiro Paterlini, colegas docentes da UFSCar já aposentados no momento, a quem também agradeço. O capítulo 14 foi inteiramente escrito por sugestão da professora Yolanda.

Foram também cruciais as sugestões de melhorias e correções apontadas mais recentemente pelas alunas da UFSCar Beatriz Giacomelli Rodrigues da Silva (do curso de Licenciatura em Química) e Luana de Queiroz Garcia (do curso de Ciência da Computação), às quais externo minha gratidão.

Agradeço também ao apoio imprescindível recebido desde sempre de minha esposa Elsa, e de meus filhos Joana e Pedro, sempre gentis com o pai em estímulos ao trabalho.

Finalmente agradeço ao professor e amigo Thiago Augusto Silva Dourado, pelo estímulo generoso à publicação do livro, pela editoração completa do mesmo no formato em que se encontra e pela inserção das notas biográficas ao final do livro.

A outras pessoas que deveria ter agradecido e não foram citadas só me resta pedir desculpas.

São Carlos, Janeiro de 2022

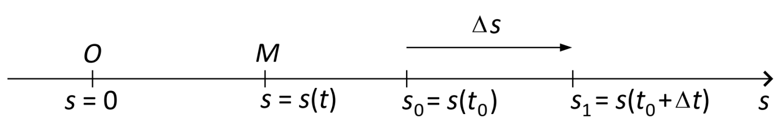
Sumário

Aula 1

Velocidade Instantânea e Derivadas

1.1 Velocidade instantânea

Suponhamos que um ponto móvel M desloca-se ao longo de uma linha reta horizontal, a partir de um ponto O.



O deslocamento s, de M, em relação ao ponto O, é a distância de O a M, se M está à direita de O, e é o negativo dessa distância se M está à esquerda de O. Assim, s é positivo ou negativo, conforme M se encontre, respectivamente, à direita ou à esquerda de O.

Com estas convenções, a reta passa a ser *orientada*, e a chamamos de *eixo* s, sendo O sua origem.

O deslocamento s depende do instante de tempo t, ou seja, s é uma função da variável t:

$$s = s(t).$$

Em um determinado instante t_0, o deslocamento de M é $s_0 = s(t_0)$. Em um instante posterior t_1, o deslocamento de M é $s_1 = s(t_1)$.

A *velocidade média* do ponto M, no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é dada por

$$v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Podemos também escrever $t_1 = t_0 + \Delta t$, ou seja, $\Delta t = t_1 - t_0$, e também $\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

Teremos então

$$v_m = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Por exemplo, vamos supor que $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ (o ponto móvel é uniformemente acelerado). Assim, no instante $t = 0$ o ponto móvel está em $s(0) = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 = 0$.

A partir de um certo instante t_0, temos uma variação de tempo Δt. Seja $t_1 = t_0 + \Delta t$. Podemos ter $\Delta t > 0$ ou $\Delta t < 0$ (quando $\Delta t < 0$, o instante t_1 antecede t_0). Teremos então

$$s(t_1) = s(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 = \frac{1}{2}\left(at_0^2 + 2at_0 \cdot \Delta t + a(\Delta t)^2\right).$$

A variação do deslocamento do ponto móvel, nesse intervalo de tempo, será

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = \frac{1}{2}at_0^2 + at_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2,$$

ou seja,

$$\Delta s = at_0 \cdot \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}.$$

A velocidade média do ponto, no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, será dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{at_0 \cdot \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2}.$$

Se $\Delta t \approx 0$, então também teremos $\Delta s = at_0 \cdot \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2} \approx 0$. No entanto,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2} \approx at_0.$$

De um modo geral, definimos a *velocidade instantânea* $v(t_0)$, do ponto M, no instante t_0, como sendo o *limite* da velocidade média no intervalo de t_0 a $t_0 + \Delta t$, quando Δt *tende a zero* (esta foi uma ideia de Isaac Newton, um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII), e escrevemos

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

No nosso exemplo,

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(at_0 + \frac{a\Delta t}{2} \right) = at_0.$$

1.2 Derivada de uma função

Uma *função* f é uma lei que associa cada valor x de um certo conjunto A (o *domínio* de f), um único valor $f(x)$ de um certo conjunto B (o *contradomínio* de f). Neste curso, teremos sempre $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Veja também a observação 1.1, mais adiante nesta aula, pág. 7. Muitas vezes diremos "função $f(x)$", em lugar de "função f".

Dada uma função $f(x)$, a *função derivada* $f'(x)$ (leia-se *"f linha de x"*) é a função definida quando consideramos, para cada x no domínio de $f(x)$ (ou para cada x em um intervalo aberto contido no domínio de f), sujeito a uma variação $\Delta x \neq 0$, a variação correspondente de $y = f(x)$,

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

e então calculamos o valor limite da razão

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

quando Δx tende a 0, ou seja, quando Δx se aproxima indefinidamente de 0. Escrevemos então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Para um valor específico de x, digamos $x = x_0$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

é a derivada de f (ou de $f(x)$), no ponto x_0.

Como estabelecemos na seção anterior, para um ponto móvel M em movimento retilíneo sobre um eixo s, se $s(t)$ indica sua posição no instante t, então a velocidade instantânea de M no instante t é a derivada $s'(t)$.

Como primeiro e importante exemplo de cálculo de derivadas, temos:

Regra 1.1 *Se $f(x) = x^n$, n inteiro positivo, então*

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$