
**CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS
ARTICULADOS A PARTIR DO INSTRUMENTO
NÁUTICO, BALHESILHA, NA INTERFACE ENTRE
HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA**





ANA CAROLINA COSTA PEREIRA
ANTONIA NAIARA DE SOUSA BATISTA
GISELE PEREIRA OLIVEIRA

**CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS
ARTICULADOS A PARTIR DO INSTRUMENTO
NÁUTICO, BALHESTILHA, NA INTERFACE ENTRE
HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA**

SÉRIE
História da Matemática
no Ensino de Matemática

Volume 03



2023

Copyright © 2023 Editora Livraria da Física
1ª Edição

Direção editorial

José Roberto Marinho

Projeto gráfico

Fabício Ribeiro

Diagramação e capa

Fabício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Pereira, Ana Carolina Costa

Conceitos trigonométricos articulados a partir do instrumento náutico, balhastilha, na interface entre história e ensino de matemática / Ana Carolina Costa Pereira, Antonia Naiara de Sousa Batista, Gisele Pereira Oliveira. – 1. ed. – São Paulo: Livraria da Física, 2023. – (Série história da matemática no ensino de matemática; 3)

Bibliografia

ISBN 978-65-5563-295-8

1. Instrumento náutico 2. Matemática - Estudo e ensino 3. Matemática - História 4. Trigonometria - Estudo e ensino I. Batista, Antonia Naiara de Sousa. II. Oliveira, Gisele Pereira. III. Título IV. Série.

23-142490

CDD-510.9

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática: História 510.9

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.

Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

PREFÁCIO

A coleção “Textos de História da Matemática” começou a ser publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), em 2001, no IV Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM). Essa coleção era formada por textos que tinham como ponto de partida os minicursos apresentados no evento, e avançavam no sentido de se configurarem como referências a professores que buscassem abordar uma História da Matemática em suas aulas e a pesquisadores interessados em História da Matemática.

Os textos desenvolvidos a partir dos minicursos apresentados no SNHM continuaram a ser publicados nas edições posteriores desse evento. Foram editados mais de 120 livros nas coleções “Textos de História da Matemática”, “História da Matemática para professores”, “História da matemática para o ensino”, “História da matemática e da educação matemática para o ensino” e “História da Matemática no estudo e na pesquisa”.

No XV SNHM foram selecionados oito volumes para a coleção “História da Matemática no Ensino de Matemática”. Esses textos se voltam à apresentação de possibilidades de abordar temáticas referentes à História da Matemática no ensino de conteúdos matemáticos na Educação Básica ou Ensino Superior. Assim, pretende-se que esses materiais possam contribuir para o aumento da abordagem histórica no ensino de Matemática nos diferentes níveis educacionais. Para a edição dessa coleção, a SBHMat contou com o apoio da Livraria da Física e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Nesse volume, as autoras apresentam o instrumento náutico balhestilha e discutem sua fabricação e utilização do século XIV ao XVII. São propostas atividades práticas que envolvem esse instrumento e articulam história da Matemática e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) para o ensino de conceitos geométricos e trigonométricos na Educação Básica.

Mariana Feiteiro Cavaliari
Viviane de Oliveira Santos

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
1. OS BÁCULOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.....	15
2. A BALHESTILHA NO CONTEXTO DA NAVEGAÇÃO E DA ASTRONOMIA ENTRE OS SÉCULOS XVI AO XVIII	29
3. A FABRICAÇÃO DA BALHESTILHA	35
4. O USO E A APLICAÇÃO DA BALHESTILHA	49
5. ATIVIDADE ENVOLVENDO APLICAÇÕES DA BALHESTILHA...55	
5.1 ARTICULANDO HM E TDIC PARA UMA APLICAÇÃO DA BALHESTILHA.....	58
5.2 SITUAÇÃO DIDÁTICA - EM BUSCA DO DESTINO CORRETO COM A BALHESTILHA	61
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	71
REFERÊNCIAS.....	73



INTRODUÇÃO

Este texto foi idealizado a partir de pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), vinculado a Universidade Estadual do Ceará (UECE), com o intuito de possibilitar reflexões para o ensino de conteúdos matemáticos por meio da história. Tem-se por objetivo promover a compreensão de conceitos geométricos e trigonométricos mediante o instrumento náutico denominado de balhestilha¹, na interface entre história e ensino de Matemática².

O estudo de instrumentos matemáticos como objetos do desenvolvimento científico tem suscitado interesse de vários pesquisadores, principalmente quando se trata do processo da construção do conhecimento, em particular nos séculos XVI e XVII (VAN HELDEN, HANKINS, 1994; HANKINS, SILVERMAN, 1997; VAN HELDEN, 1983; BENNETT, 1986, 2003; WARNER, 1990).

Nesse momento, os instrumentos eram direcionados a promoção da resolução de problemas matemáticos, observacionais e experimentais. No que se refere aos matemáticos, eles eram “concebidos para medir aquilo que Aristóteles (1952) denominava “quantidades” (distância e ângulos)” (SAITO, 2014, p. 26), ou seja, ângulos, distâncias (comprimento, largura e profundidade), peso, tempo, entre outros. Essa compreensão está ligada ao conhecimento do saber-fazer que abaliza determinados ângulos no processo da construção de conceitos e, conseqüentemente, nas suas possíveis conseqüências no ensino e na aprendizagem de matemática (SAITO, 2013; 2014).

1 Para mais informações, vide Batista (2018).

2 Para mais informações, vide Saito e Dias (2013).

Durante os séculos XVI e XVII surgiram diversos tratados que versavam sobre esses instrumentos, principalmente relacionados à utilização na astronomia, na navegação e na agrimensura. Não só esses objetos começaram a se proliferar na Europa, mas também outros que são aprimoramento destes, além de novos instrumentos. Entretanto, publicar um tratado no século XVI era caro. Assim, quando aparecia uma obra sobre qualquer instrumento, tinha-se certeza de que ele era muito importante para a sociedade.

Estes tratados que versavam sobre instrumentos matemáticos não eram manuais de instruções e só foram publicados em grande quantidade a partir do século XIX. Os conhecimentos matemáticos eram extremamente importantes para que uma pessoa soubesse construí-lo e manipulá-lo. Dessa forma, pode-se dizer que o instrumento é uma forma de incorporação do pensamento teórico, ou seja, uma verificação de uma teoria materializada no artefato.

A balhестilha que será estudado no texto, é um desses instrumentos que atravessou o tempo e permaneceu em uso entre os séculos XIV a XVIII, passando por diferentes esferas do conhecimento, entre elas, a agrimensura, astronomia e a navegação, e carregando consigo distintas denominações, como, báculo, rádio astronômico e balhестilha, respectivamente. Esse instrumento esteve atrelado a vários tratados antigos e foi alvo de interesse entre diferentes estudiosos como Werner (1514), Pimentel (1681), Rego (1787), entre outros.

Mas em especial, nesse estudo se pautará no documento produzido por Manoel de Figueiredo (1568 – c.1625), um cosmógrafo e mestre em matemáticas que teve sua importância ao seu tempo e produziu distintas obras. Entre elas, a balhестilha que se encontra na *Chrnographia, Reportorio dos Tempos...*, publicada em Lisboa, em 1603. Assim, partindo desse tratado e em conversas com outros,

irar-se-á discutir sobre os diferentes aspectos ligados à sua finalidade, uso e fabricação.

Para a inserção da balhestilha e outros instrumentos matemáticos no ensino de matemática, é necessário pensar acerca do ambiente de discussão que é pautado nas ações e produções “que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção de um conhecimento matemático com vistas a elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de Matemática” (SAITO; DIAS, 2013, p. 92).

Na expectativa de construção destes conhecimentos matemáticos a partir de investigações históricas, Saito e Dias (2013) destacam as peculiaridades no percurso de consolidação de uma interface entre história e ensino de Matemática, buscando apontar por exemplo, a relevância da reconstrução da episteme³ de um determinado período a ser pesquisado. Na intencionalidade de através dos elementos fundantes observados, compreender as práticas históricas que eram experimentadas e que eram realizadas numa época específica para o exercício dos ofícios.

Algumas produções envolvendo a balhestilha foram desenvolvidas no decorrer desses oito anos pelo GPEHM, tanto numa vertente historiográfica tradicional quanto atualizada. Assim, segue-se uma lista dessas pesquisas:

Artigos:

- Vamos aprender trigonometria? Uma experiência com alunas no Ensino Médio utilizando a Balhestilha, de Batista e Pereira (2016);

3 Para mais informações, vide Beltran, Saito e Trindade (2014).

- Algumas potencialidades didáticas da Balhестilha na formação de professores, de Batista (2016);
- A balhестilha: um instrumento náutico como recurso para abordar conceitos matemáticos, de Batista e Pereira (2017);
- A balhестilha descrita na obra *Chronographia Repertorio dos Tempos* (1603): Discussões iniciais sobre o saber incorporado no instrumento, de Pereira, Batista e Silva (2017);
- Alguns conhecimentos matemáticos que emergem da fabricação da balhестilha que se encontra no documento *Chronographia, Repertorio dos Tempos...*, de Batista (2020);
- O documento *Chronographia, Repertorio dos Tempos...* (1603) e o instrumento balhестilha: a incorporação de alguns conhecimentos matemáticos que podem ser mobilizados na fabricação e no uso desse instrumento, de Batista (2020);
- A balhестilha (1603) como um instrumento matemático para o estudo de medidas na formação de professores de matemática, de Batista e Pereira (2021);
- Os báculos ao longo da história: alternativa didática para o ensino de matemática na formação de professores, de Pereira, Batista, Santos e Nogueira (2021);
- Uma proposta de UBP fazendo uso da balhестilha em um passeio de veleiro em Fortaleza, de Batista (2022).

Dessa forma, esse texto será conduzido a partir da discussão envolvendo a promoção da compreensão de conceitos geométricos e trigonométricos mediante ao uso do instrumento matemático náutico balhестilha na interface entre história e ensino de Matemática.

A seguir será apresentado informações sobre os báculos na história da Matemática, a fabricação, uso e aplicação da balhastilha do século XIV ao XVII, e a apresentação de atividades envolvendo aplicações com o uso do instrumento náutico a partir da articulação da história da Matemática e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) para uma experimentação prática.



1 | OS BÁCULOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A balhestilha contida neste estudo possui vestígios ainda no século XIV, entretanto, voltado para outro campo de conhecimento diferente da navegação. Permaneceu em uso durante os séculos XV a XVIII, e que foi sendo aprimorada em diferentes pontos, com o intuito de melhorar a precisão nas observações, tamanho, quantidades de peças, posicionamento e finalidade. Essas questões foram relevantes para o seu desenvolvimento e revelam as diferentes necessidades do período e do campo no qual estava inserida.

São diversas as nomenclaturas em relação a esse instrumento, a mais conhecida seria *baculus Jacob*, em latim (BRUYNS, 1994). E a partir dessa terminologia vão aparecendo outras, segundo o autor. Entre os ingleses foi denominada por *ballastella*, *vara de Jacob* (*Jacob's staff*) ou *fore-staff*, enquanto, pelos italianos foi chamada de *Escada de Jacob* (*scala di Jacob*). Os franceses o tratavam por *bastão de Jacob* (*baton de Jacob*), entre os espanhóis era conhecido por *balestilla*, os holandeses a intitulavam no século XVI de *staf baculus*. E os alemães o chamavam de radio astronômico (*radius astronomicus*) e dentre os portugueses de balhestilha.

No século XIV, esse instrumento matemático aparece sendo usado por Levi ben Gerson (1288-1344)⁴, no qual foi creditado a ele sua confecção, ele era chamado de bastão⁵ ou revelador de profundidade⁶. Segundo Goldstein (2011), Levi nesse período des-

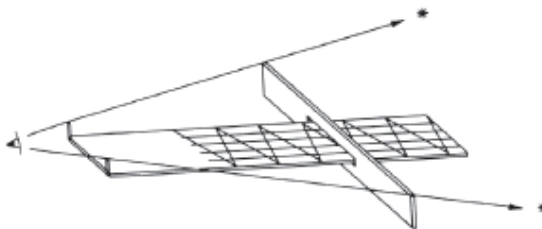
4 Nasceu em Provença no sul da França, foi rabino, filósofo, astrônomo, cientista, comentarista bíblico e matemático.

5 Em latim seria *baculus*.

6 No latim seria *revelator secretorum*.

creve dois tipos de instrumentos em sua obra *Astronomy of Levi bem Gerson*, ambos voltados para a astronomia. O primeiro deles era destinado para medir o espaço (distâncias angulares) entre dois astros (FIGURA 1).

Figura 1: Bastão de Levi para medição entre dois astros



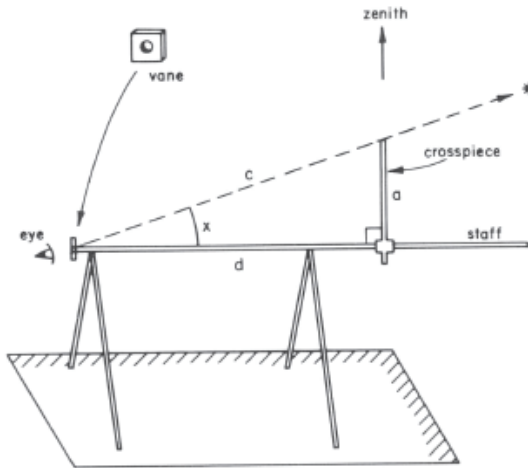
Fonte: Goldstein (2011, p. 367).

Segundo Roche (1981, p. 6), o bastão de Levi “foi subdividido em oito ‘graus’ [de comprimento, não de arco], e cada um desses ‘graus’ foi dividido em sessenta ‘minutos’ por meio de subdivisões e transversais”. Como constata-se na Figura 1, o instrumento apresenta uma graduação realizada de maneira transversal, na vara mais comprida, que possibilitava a medida em graus, frações de grau e minutos. E o seu uso se dava na horizontal de maneira que cada extremidade da transversal (vara menor) fosse posta de modo a coincidir com cada astro, com o intuito de medir o espaço entre ambos.

Roche (1981), afirma que o bastão de Levi para medição entre dois astros (Figura 1) consistia em uma vara de $4\frac{1}{2}$ de pés, com largura de uma polegada e seis ou sete peças em forma de uma barra (transversal) com perfurações no seu centro, para que se pudesse inserir a vara maior em cada uma delas. Cada uma das seis ou sete peças era utilizada conforme a necessidade do ângulo de visualização

daquilo que se queria medir (ROCHE, 1981). O outro instrumento tratado por Levi seria uma outra versão desse báculo (FIGURA 2).

Figura 2: Bastão de Levi para medições de altitude



Fonte: Goldstein (2011, p. 368).

Esse por sua vez, está apoiado em um suporte de quatro pés fixo no solo, no qual era voltado para observar a altitude e o diâmetro do sol, da lua e ou das estrelas. Neste instrumento, a medição ocorria na vertical, no qual se olhava por meio de uma pínula, colocada em uma das extremidades do bastão maior e fazendo uso de apenas meia transversal, movimentava-a de maneira que a parte superior coincidissem com o astro (GOLDSTEIN, 2011).

Entretanto, Goldstein (2011) em seu texto esclarece que Levi não relatou absolutamente nada sobre o uso desse instrumento voltado para a navegação, e não teria pensado no seu uso para se localizar em alto mar no século XIV. Um fator que pode ter contribuído para isso é que somente por volta do século XVI as grandes navegações passaram a ter uma demanda por instrumentos que ajudasse

na localização nas naus, devido as embarcações se afastarem da costa marítima.

No século XV, surge relatos desse bastão sendo agora voltado para o uso entre agrimensores, denominado por bastão de Jacob (*Jacob's staff*) ou bastão geométrico (*Jacob's geometrical*) (ROCHE, 1981). Segundo Roche (1981), a forma como ele era usado seria bem semelhante ao instrumento de Levi, entretanto os princípios matemáticos envolvidos em cada um desses instrumentos eram diferentes.

No caso do bastão de Jacob era composto por uma vara e uma única peça transversal, sendo está, do mesmo tamanho dos espaços das divisões expostas na vara. Desta forma, a medida não poderia ser obtida diretamente no instrumento, pois ele continha apenas uma escala com divisões, e portanto, era necessário realizar cálculos, envolvendo semelhanças de triângulos, proporção, e outros, para encontrar o valor procurado.

O bastão de Jacob continua a aparecer no século XVI, no qual pode-se observar em vários tratados de geometria prática. Entre essas obras podemos destacar, *A Booke Named Tectonicon* (1556), de Leonard Digges (1520 - 1559), no qual Castillo (2016, p. 79) diz que “[...] o báculo servia para os propósitos mais importantes do agrimensor que eram a mensuração de terrenos e propriedades de terra”. Além disso, segundo a autora tinha o intuito de descobrir com essas medidas obtidas as dimensões de áreas de superfícies.

Um outro tratado que traz esse bastão é o *Del modo di misurari* (1564) de Cosimo Bartoli (1503 - 1572) que segundo Castillo e Saito (2016) seria um instrumento denominado por báculo destinado a medir linhas das quais fossem de difícil acesso para se aproximar. Os autores ainda complementam que toda essa disseminação

do instrumento se dá pelo fato de que no século XVI várias demandas foram levantadas, como a conquista de novas terras, processos necessários para cultivar terras e o sítio dessas propriedades.

Verifica-se em ambos os tratados, que o instrumento, já não é mais chamado de bastão de Jacob, mas assume a denominação de báculo, determinando assim diversas nomenclaturas até em um mesmo campo de conhecimento, que é a agrimensura. É interessante ressaltarmos que durante o século XV não havia indícios apenas do báculo de Jacob usado entre os agrimensores e topógrafos, mas constata-se ver também o seu uso na astronomia.

Segundo Roche (1981), no século XV, o bastão de Jacob foi usado por Paollo Toscanelli, em 1433, no intuito de descobrir a posição de um cometa neste mesmo ano e nos anos seguidos de 1449 e 1450. Nunes (2008) completa a lista com Regiomontanus (1436 – 1476), que teria feito uso deste instrumento em 1471, para medir a distância entre estrelas e em 1472, para determinar o diâmetro de um cometa e a sua distância entre as estrelas. E Bernard Walther, aluno de Regiomontanus, entre 1475 a 1488, teria usado esse instrumento na astronomia para reparar as distâncias entre alguns astros (ROCHE, 1981).

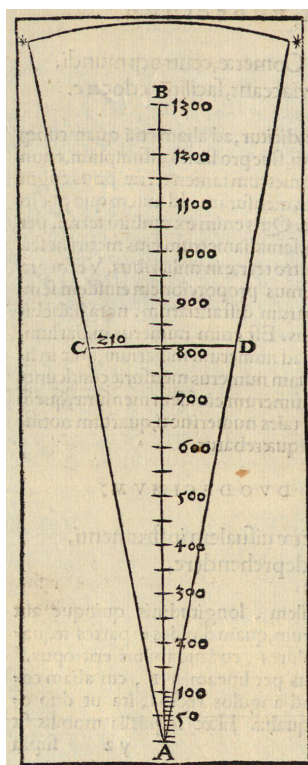
Regiomontanus (1436 - 1476), de nacionalidade alemã, atribuiu a esse instrumento o nome de *radius astronomicus*, que apareceu em um registro confeccionado pelo mesmo, intitulado, *Hec operum remberga fient in oppido Nu Germanie ductu Ioannis de monteregio*, impresso em 1475, entretanto, não foi publicado.

Mas a mesma denominação do instrumento também pode ser encontrada no problema doze da obra *Cometae magnitudine, longitudinecque, ac de loco eius vero Problemata XVI*, publicada em 1531 e em outra versão em 1544, editada por Johannes Schoner,

que comprou boa parte das obras de Regiomontanus, através de Bernard Walther (PEREIRA; SAITO, 2018).

Segundo Roche (1981) o radio astronômico tinha uma vara de 6 côvados de comprimento (em torno de 9 pés), dividido em 1300 partes, sendo a escala exposta de 100 em 100 (FIGURA 3). Veja que a transversal foi dividida em 210 partes e pode-se observar de acordo com a Figura 3 que a sua finalidade realmente era a de tentar medir as distâncias entre duas estrelas.

Figura 3: Báculo no tratado *Cometae magnitudine, longitudineque, ac de loco eius vero Problemata XVI* contida na obra *Scripta clarissimi mathematici...*, de 1544



Fonte: Schöner (1544, f. 35r).