

José Maria Filardo Bassalo
Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Elementos de Física Matemática

Volume I

*Equações diferenciais ordinárias,
Transformadas e Funções Especiais*

Editora Livraria da Física — Casa Editorial Maluhy & Co.
São Paulo — 2010

Copyright © 2010 Editora Livraria da Física
Copyright © 2010 Casa Editorial Maluhy & Co.

Texto atualizado conforme o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa em vigor no Brasil a partir de 2009.

Projeto gráfico e diagramação CASA EDITORIAL MALUHY & CO.

Preparação de figuras MIKA MITSUI

Capa EDUARDO BERTOLINI

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bassalo, José Maria Filardo

Elementos de física matemática, volume 1 / José Maria Filardo
Bassalo, Mauro Sérgio Dorsa Cattani. – São Paulo :
Editora Livraria da Física : Casa Editorial Maluhy & Co., 2010

Bibliografia

ISBN 978-85-7861-064-7

ISBN 978-85-61516-05-5

1. Equações diferenciais 2. Física matemática
3. Funções de Green 4. Teoria das distribuições
(Análise funcional) I. Cattani, Mauro Sérgio Dorsa. II. Título.

10-02370

CDD-530.15

Índices para catálogo sistemático:

1. Física matemática 530.15

1ª edição — 2010

Impresso no Brasil

Printed in Brazil

Todos os direitos reservados à

Casa Editorial Maluhy & Co.

Tel. +55 (11) 3733 8956

www.maluhy.com.br

Editora Livraria da Física

Tel./Fax: +55 (11) 3459-4327 / 3936-3413

www.livrariadafisica.com.br

Os Autores (Bassalo e Cattani) dedicam este livro, respectivamente, a:
CÉLIA, JÔ, GISA, LUCAS, VÍTOR
ÁDRIA, SAULO, ANNA-BEATRIZ e MATHEUS
e
MARIA LUIZA, MARIA BEATRIZ, MARTA e OLÍVIA

PREFÁCIO

Este livro começou a ser gestado quando um dos autores (JMFB) teve contato com a **Física Matemática**. Primeiramente, em 1965, quando foi aluno do professor Marco Antônio Raupp, na disciplina *Matemática para Físicos*, no *Instituto Central de Física da Universidade de Brasília* (ICF/UnB), em 1965 e, posteriormente, em 1969, ao cursar a disciplina *Física Matemática* com a saudosa professora Carmen Lys Ribeiro Braga, no então *Departamento de Física da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo* (DF/FFCL/USP).

Um novo contato de JMFB com a **Física Matemática**, ocorreu quando foi orientado pelo outro autor (MSDC) no desenvolvimento das Teses de Mestrado e de Doutorado defendidas, respectivamente, em 1973 e 1975, no DF/FFCL/USP. Os autores usaram a **Física Matemática** em uma série de artigos e livros que escreveram juntos, bem como nas disciplinas que ministraram, por vários anos, no *Instituto de Física* da USP (IF/USP) e no então *Departamento de Física da Universidade Federal do Pará* (DF/UFGA), respectivamente.

Uma primeira versão deste livro foi escrita por um dos autores (JMFB) e publicada sob a forma de Notas de Aulas pelo DF/UFGA, em 1989. O livro que está sendo agora publicado é uma edição revista e ligeiramente ampliada daquela edição. Ele é composto de três partes. Na Parte I, apresenta-se o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), no qual são desenvolvidas as técnicas para resolver as EDO de Primeira Ordem e de Segunda Ordem, sendo essa Parte finalizado com o Método Geral de Solução das EDO, com ênfase para o Método dos Operadores Diferenciais e o Método das Séries de Potência ou de Fröbenius.

A Parte II trata das Transformadas. Ele inicia com o estudo da Função de Dirac e da Função de Heaviside, seguido então da Transformada de Laplace, das Séries de Fourier e da Transformada de Fourier (TF). Completa-se a Parte com a definição da Convolução e faz-se a extensão tridimensional da TF.

As Funções Especiais, objeto principal deste livro, são discutidas na Parte III. Depois de um estudo introdutório sobre as Funções Gama, Beta e Erro, e da

VI PREFÁCIO

ortogonalidade das funções relativamente a uma função peso, os autores apresentam o Teorema de Sturm-Liouville, que é o Teorema Básico para a resolução das EDO de coeficientes variáveis: Legendre, Bessel, Hermite, Laguerre e as hipergeométricas de Gauss e Kummer. Essas equações e suas respectivas soluções representadas pelas funções que recebem o mesmo nome de seus descobridores, são a base da solução das Equações Diferenciais Parciais (EDP), temas do segundo volume sobre **Física Matemática** que os autores estão preparando.

Saliente-se que, para ajudar o leitor no entendimento dos assuntos tratados em cada Parte deste livro, os autores apresentam alguns exercícios, além da solução de alguns exemplos, e no final dos Capítulos são propostos alguns Problemas para ajudar o leitor no seu aprendizado. Além do mais, há um Apêndice Histórico, no qual os autores dão uma ideia de como, historicamente, foram desenvolvidos os assuntos tratados no texto.

O autor M. S. D. Cattani agradece à Maria Luiza Mattos Cattani pela revisão gramatical e ortográfica do texto.

Os autores agradecem ao Roberto Maluhy Jr. pela preparação da edição preliminar deste livro, e a Virgínia de Paiva, Bibliotecária do IF/USP, pelo auxílio na pesquisa das referências usadas no texto.

Belém e São Paulo, outubro de 2009

José Maria Filardo Bassalo, Diretor Executivo da *Fundação Minerva*
Mauro Sérgio Dorsa Cattani, Professor Titular do IF/USP

SUMÁRIO

Parte I – Equações diferenciais ordinárias

Capítulo 1 – Equações diferenciais ordinárias, 1

1.1 – DEFINIÇÕES E CLASSIFICAÇÕES, 1

1.2 – SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL, 4

PROBLEMAS, 6

Capítulo 2 – Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, 9

2.1 – EQUAÇÕES LINEARES, 9

2.1.1 – *Método de solução pelo fator integrante*, 10

2.2 – EQUAÇÕES NÃO LINEARES, 11

2.3 – OUTROS TIPOS DE EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM, 12

2.3.1 – *Equações separáveis*, 12

2.3.2 – *Equações exatas*, 13

PROBLEMAS, 23

Capítulo 3 – Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, 25

3.1 – EQUAÇÕES LINEARES, 25

3.1.1 – *Equações lineares homogêneas*, 26

3.1.2 – *Equações lineares não homogêneas*, 36

PROBLEMAS, 54

VIII SUMÁRIO

Capítulo 4 – Métodos gerais de solução de equações diferenciais ordinárias, 57

4.1 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE QUALQUER ORDEM, 57

4.1.1 – *Método de solução pelos operadores diferenciais*, 584.1.2 – *Método das séries de potências ou de Fröbenius*, 62

PROBLEMAS, 71

Parte II – Transformadas

Capítulo 5 – Função generalizada ou distribuição de Dirac, 75

5.1 – DEFINIÇÃO, 75

5.1.1 – *Propriedades da “função” $\delta(t)$* , 765.2 – “DERIVADA” DA “FUNÇÃO” $\delta(t)$, 785.2.1 – *Propriedades da “derivada” de $\delta(t)$* , 78

5.3 – FUNÇÃO DE HEAVISIDE, 79

5.3.1 – *Propriedade da função $H_0(t) \equiv H(t)$* , 795.4 – OUTRAS REPRESENTAÇÕES DA “FUNÇÃO” $\delta(t)$, 80

PROBLEMAS, 81

Capítulo 6 – Transformada de Laplace, 83

6.1 – DEFINIÇÕES. EXISTÊNCIA, 83

6.2 – TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNÇÕES ELEMENTARES, 85

6.3 – PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE, 87

6.4 – APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE, 89

PROBLEMAS, 94

Capítulo 7 – Série de Fourier, 97

7.1 – FUNÇÕES PERIÓDICAS. SISTEMAS ORTOGONAIS, 97

7.2 – DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER DE FUNÇÕES PERIÓDICAS, 101

7.3 – DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER DE FUNÇÕES NÃO PERIÓDICAS, 104

7.4 – DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER DE FUNÇÕES PARES E ÍMPARES, 106

7.4.1 – *Funções pares*, 1067.4.2 – *Funções ímpares*, 106

7.5 – DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE FOURIER DE SENOS OU DE COSSENOS DE FUNÇÕES NÃO PERIÓDICAS, 107

7.5.1 – *Em série de Fourier de senos*, 1077.5.2 – *Em série de Fourier de cossenos*, 107

PROBLEMAS, 112

Capítulo 8 – Transformada de Fourier, 115

- 8.1 – PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER, 116
- 8.2 – TRANSFORMADA DE FOURIER DE ALGUMAS FUNÇÕES ESPECIAIS, 119
 - 8.2.1 – *Distribuição de Dirac*, 119
 - 8.2.2 – *Função constante*, 120
 - 8.2.3 – *Função de Heaviside*, 120
 - 8.2.4 – *Funções periódicas*, 121
- 8.3 – CONVOLUÇÃO, 122
- 8.4 – EXTENSÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER, 123
- PROBLEMAS, 125

Parte III – Funções Especiais**Capítulo 9 – Introdução ao Problema de Sturm-Liouville, 129**

- 9.1 – FUNÇÃO GAMA, BETA E ERRO, 129
 - 9.1.1 – *Propriedades da Função Gama e da Beta*, 130
- 9.2 – ORTOGONALIDADE DE FUNÇÕES RELATIVAMENTE A UMA FUNÇÃO PESO, 132
- 9.3 – OPERADORES DIFERENCIAIS ADJUNTOS E AUTOADJUNTOS, 133
- PROBLEMAS, 134

Capítulo 10 – Problema de Sturm-Liouville, 135

PROBLEMAS, 137

Capítulo 11 – Funções de Legendre, 139

- 11.1 – POLINÔMIOS DE LEGENDRE, 139
 - 11.1.1 – *Propriedades dos Polinômios de Legendre*, 143
 - 11.1.2 – *Desenvolvimento de Funções em Série de Legendre*, 150
- 11.2 – FUNÇÃO ASSOCIADA DE LEGENDRE, 152
- 11.3 – HARMÔNICOS ESFÉRICOS, 154
- PROBLEMAS, 155

Capítulo 12 – Funções de Bessel, 157

- 12.1 – FUNÇÕES DE BESSEL DE 1ª ESPÉCIE DE ORDEM ν , 157
 - 12.1.1 – *Propriedades da Função de Bessel $J_\nu(x)$* , 160
- 12.2 – FUNÇÕES DE BESSEL DE 2ª E 3ª ESPÉCIES, 166
- 12.3 – FUNÇÃO DE BESSEL MODIFICADA, 167
- 12.4 – FUNÇÃO DE BESSEL ESFÉRICA, 169
- 12.5 – COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS FUNÇÕES DE BESSEL, 170
- PROBLEMAS, 170

x SUMÁRIO

Capítulo 13 – Funções de Hermite, 173

13.1 – POLINÔMIOS DE HERMITE, 173

13.1.1 – Propriedades dos Polinômios de Hermite, 176

13.2 – FUNÇÕES DE HERMITE, 179

13.2.1 – Propriedades da Função de Hermite, 180

PROBLEMAS, 181

Capítulo 14 – Funções de Laguerre, 183

14.1 – POLINÔMIOS DE LAGUERRE, 183

14.1.1 – Propriedades os Polinômios de Laguerre, 185

14.2 – POLINÔMIO E FUNÇÃO ASSOCIADA DE LAGUERRE, 189

*14.2.1 – Polinômio Associado de Laguerre, 189**14.2.2 – Função Associada de Laguerre, 191*

PROBLEMAS, 192

Capítulo 15 – Funções Hipergeométricas, 193

15.1 – FUNÇÕES DE GAUSS OU HIPERGEOMÉTRICAS, 193

15.2 – FUNÇÕES DE KUMMER OU HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES, 197

PROBLEMAS, 202

Histórico, 205**Referências Bibliográficas, 224****Índice onomástico, 227**

Parte I

Equações diferenciais ordinárias

1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1.1 Definições e classificações

DEFINIÇÃO 1.1.1

Uma equação que envolve derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada uma **equação diferencial**

Se a equação contém apenas derivadas totais, ou seja, se ela envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas *uma* variável independente, ela é chamada **equação diferencial ordinária**.

Se uma equação envolve derivadas parciais, ela é chamada **equação diferencial parcial**.

EXEMPLOS

1. $L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E \omega \cos(\omega t)$, chamada equação do circuito LCR.
2. $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$, chamada *Equação de Legendre*.
3. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$, chamada *Equação de Bessel*
4. $m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = 0$, chamada equação de um sistema mecânico amortecido.
5. $y' + p(x)y = q(x)y^n$ ($n \neq 1$), chamada *Equação de Bernoulli*.
6. $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$, chamada *Equação de Laplace*.

2 CAPÍTULO 1 — EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

7. $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0$, chamada *Equação de Helmholtz*.
8. $\nabla \vec{D} = \rho$, chamada *1ª equação de Maxwell*.
9. $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$, chamada *Equação de Schrödinger*.
10. $\square(\psi, t) = 0$ onde $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, chamada *Equação de D'Alembert*.
11. $\Delta - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = 0$, chamada *Equação de Fourier*.

DEFINIÇÃO 1.1.2

A ordem da mais alta derivada envolvida em uma equação diferencial é chamada sua **ordem**.

EXEMPLOS

1. Nos exemplos anteriores as equações 5 e 8 são de primeira ordem e as restantes são de segunda ordem.
2. A equação $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dy}{dx} + x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ é de terceira ordem.
3. A equação $\nabla^4 \phi = 0$, onde ϕ é chamada função de Airy das tensões, é uma equação de quarta ordem.

DEFINIÇÃO 1.1.3

Dada uma equação diferencial na forma de um polinômio racionalizado nas diversas derivadas que compõe a mesma, chama-se **grau** da equação dada, o grau da derivada mais alta que figura na equação.

EXEMPLOS

1. Nos exemplos vistos anteriormente, todas as equações são do primeiro grau, à exceção do número dois no exemplo anterior que é de grau dois.
2. A equação $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ é uma equação do quarto grau pois, $(d^2 y / dx^2)^4 - y - (dy / dx)^2 = 0$.

3. A equação $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3} = k \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/2}$ é de grau dois, uma vez que depois de racionalizado, ela contém o termo $(d^2y/dx^2)^2$.

Para que possamos classificar as equações diferenciais (ordinárias e parciais), vamos introduzir a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.1.4

Uma equação diferencial se diz **linear** se:

- I. A variável dependente e suas derivadas são todas do primeiro grau;
- II. Não figuram produtos entre elas (variável dependente e suas derivadas) na equação.

As equações que não satisfazem I e II são chamadas de **não lineares**.

EXEMPLOS

1. A equação $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ é uma equação linear de quarta ordem.
2. A equação de Laplace é uma equação linear de segunda ordem.
3. As equações $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6y = 0$, $y\frac{dy}{dx} = x$ e $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, são exemplos de equações não lineares.

As equações diferenciais lineares são classificadas de acordo com os coeficientes da variável dependente e de suas derivadas, assim temos:

$$\text{equações diferenciais lineares} \begin{cases} \text{coeficientes constantes} \\ \text{coeficientes variáveis} \end{cases}$$

Em cada um desses casos podemos ter uma equação **homogênea** ou **não homogênea**.

EXEMPLOS

1. A equação do circuito LRC:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0,$$

é uma equação linear, ordinária de coeficientes constantes e homogênea.

4 CAPÍTULO 1 — EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

2. A equação diferencial de Hermite:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0,$$

é uma equação linear, ordinária, de coeficientes variáveis e homogênea.

3. A equação de Poisson:

$$\Delta\phi(x, y, z) = \alpha\rho(x, y, z)$$

é uma equação linear, em derivadas parciais de coeficientes constantes e não homogênea.

4. A equação de um sistema mecânico:

$$m\ddot{y} + \lambda\dot{y} + ky = F_0 \cos(\omega t),$$

é uma equação linear, ordinária, de coeficientes constantes e não homogênea.

1.2 Soluções de uma equação diferencial

Para resolver uma equação diferencial, teremos que achar todas as funções e suas derivadas, que introduzidas na mesma, a verifiquem identicamente pelo menos em uma dada região. Tais funções denominam-se **soluções**, **primitivas** ou **integrais** da equação diferencial dada.

DEFINIÇÃO 1.2.1

Seja a equação diferencial ordinária de n-ésima ordem $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ onde F é uma função de $(n + 2)$ variáveis.

- I. A função $f(x)$ é chamada uma **solução explícita** de equação diferencial se $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)] = 0$ para cada x no domínio de f .
- II. A equação $g(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** da equação diferencial, se ela define pelo menos uma função da variável x que seja uma solução explícita da equação diferencial.

A definição dada acima nos permite dizer que uma solução de uma dada equação diferencial ordinária de n-ésima ordem é uma relação explícita ou implícita, entre x e y , e que satisfaz identicamente à equação diferencial dada.

EXEMPLOS**1. A função**

$$y(x) = (x + c)e^{-x}$$

é uma solução explícita da equação diferencial

$$y' + y = e^{-x},$$

pois:

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= e^{-x} - (x + c)e^{-x} = e^{-x}(-x - c + 1) \rightarrow \\ e^{-x}(-x - c + 1) + (x + c)e^{-x} &= e^{-x}(x + c + 1 - c - x) = e^{-x}. \end{aligned}$$

2. A equação

$$x^2 + y^2 = 25$$

é uma solução implícita da equação diferencial

$$x + yy' = 0,$$

pois:

$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y_1 = +(25 - x^2)^{1/2}$$

e

$$y_1' = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{(-x)}{(25 - x^2)^{1/2}}.$$

Portanto:

$$x + y_1 y_1' = x + (25 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{(-x)}{(25 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

DEFINIÇÃO 1.2.2

Seja uma equação diferencial ordinária de n-ésima ordem:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

- I. A função $f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ ou $y = (x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, onde c_1, c_2, \dots, c_n são constantes arbitrárias, é denominada uma **solução geral** de uma equação diferencial dada;
- II. Atribuindo-se os valores particulares a uma ou mais das n constantes arbitrárias da solução geral, teremos uma **solução particular**;
- III. Toda solução, que *não* pode ser obtida da solução geral através de valores particulares às constantes, é denominada **solução singular**.

6 CAPÍTULO 1 — EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**EXEMPLOS****1.** A equação

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$$

é uma *solução geral* da equação $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

2. A equação

$$y = \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x$$

é uma *solução particular* da equação $y'' + y = 0$.

3. A equação

$$y = a$$

é uma *solução singular* da equação

$$(y')^2 + y^2 = a^2$$

uma vez que ela não poderá ser obtida da solução geral que é:

$$y = \operatorname{sen}(x + c).$$

Na prática, uma solução particular de uma dada equação diferencial, é obtida através do conhecimento da função e de suas derivadas em algum ponto do domínio da função solução, valores esses chamados de **condições iniciais**. O número dessas condições é o da ordem da equação.

A solução de uma equação diferencial ordinária poderá ser obtida em forma **compacta** ou **fechada** e em forma de **série**. Nesta Parte, estudaremos os dois tipos de solução.

Problemas**1.1.** Classifique cada uma das equações diferenciais abaixo:

I. $\frac{d^2y}{dx^2} = 3\frac{dy}{dx} + x$

II. $y' + x = (y - xy')^3$

III. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$

IV. $(y')^2 + xy' - y^2 = 0$

V. $y'' - 2y' - 3 = -4\operatorname{sen} x - 2\operatorname{cos} x$.

1.2. Em cada caso, verificar se a função dada é uma solução da equação diferencial correspondente.

I. $y' - y = e^{2x}$, $y = ce^x + e^{2x}$

II. $y'' - (y')^2 = 1$, $y = c_1 + \ln[\sec(x + c_2)]$

III. $y'''' - y = 0$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sinh x$, $y = \cosh x$

IV. $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$, $y = c_1 + c_2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

V. $xy' + (1+x)y = e^x$, $y = \frac{e^x}{2x} + \frac{c}{x}e^{-x}$.

