José Maria Filardo Bassalo
Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Elementos de Física Matemática

Volume I

Equações diferenciais ordinárias,
Transformadas e Funções Especiais

Editora Livraria da Física — Casa Editorial Maluhy & Co.
São Paulo — 2010

Texto atualizado conforme o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa em vigor no Brasil a partir de 2009.

Projeto gráfico e diagramação Casa Editorial Maluhy & Co.
Preparação de figuras Mika Mitsui
Capa Eduardo Bertolini

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bassalo, José Maria Filardo
Elementos de física matemática, volume 1 / José Maria Filardo Bassalo, Mauro Sérgio Dorsa Cattani. – São Paulo :
Editora Livraria da Física : Casa Editorial Maluhy & Co., 2010

Bibliografia
ISBN 978-85-7861-064-7
ISBN 978-85-61516-05-5

1. Equações diferencias 2. Física matemática
3. Funções de Green 4. Teoria das distribuições
(Análise funcional) I. Cattani, Mauro Sérgio Dorsa. II. Título.

10-02370 CDD-530.15

Índices para catálogo sistemático:
1. Física matemática 530.15

1ª edição — 2010

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Casa Editorial Maluhy & Co.
Tel. +55 (11) 3733 8956
www.maluhy.com.br

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 (11) 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafísica.com.br

Os Autores (Bassalo e Cattani) dedicam este livro, respectivamente, a:
CÉLIA, JÔ, GISA, LUCAS, VÍTOR
ÁDRIA, SAULO, ANNA-BEATRIZ e MATHEUS
e
MARIA LUIZA, MARIA BEATRIZ, MARTA e OLÍVIA

Prefácio

Este livro começou a ser gestado quando um dos autores (JMFB) teve contato com a **Física Matemática**. Primeiramente, em 1965, quando foi aluno do professor Marco Antônio Raupp, na disciplina ***Matemática para Físicos***, no *Instituto Central de Física da Universidade de Brasília* (ICF/UnB), em 1965 e, posteriormente, em 1969, ao cursar a disciplina ***Física Matemática*** com a saudosa professora Carmen Lys Ribeiro Braga, no então *Departamento de Física da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo* (DF/FFCL/USP).

Um novo contato de JMFB com a **Física Matemática**, ocorreu quando foi orientado pelo outro autor (MSDC) no desenvolvimento das Teses de Mestrado e de Doutorado defendidas, respectivamente, em 1973 e 1975, no DF/FFCL/USP. Os autores usaram a **Física Matemática** em uma série de artigos e livros que escreveram juntos, bem como nas disciplinas que ministraram, por vários anos, no *Instituto de Física* da USP (IF/USP) e no então *Departamento de Física da Universidade Federal do Pará* (DF/UFPA), respectivamente.

Uma primeira versão deste livro foi escrita por um dos autores (JMFB) e publicada sob a forma de Notas de Aulas pelo DF/UFPA, em 1989. O livro que está sendo agora publicado é uma edição revista e ligeiramente ampliada daquela edição. Ele é composto de três partes. Na Parte I, apresenta-se o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), no qual são desenvolvidas as técnicas para resolver as EDO de Primeira Ordem e de Segunda Ordem, sendo essa Parte finalizado com o Método Geral de Solução das EDO, com ênfase para o Método dos Operadores Diferenciais e o Método das Séries de Potência ou de Fröbenius.

A Parte II trata das Transformadas. Ele inicia com o estudo da Função de Dirac e da Função de Heaviside, seguido então da Transformada de Laplace, das Séries de Fourier e da Transformada de Fourier (TF). Completa-se a Parte com a definição da Convolução e faz-se a extensão tridimensional da TF.

As Funções Especiais, objeto principal deste livro, são discutidas na Parte III. Depois de um estudo introdutório sobre as Funções Gama, Beta e Erro, e da ortogonalidade das funções relativamente a uma função peso, os autores apresentam o Teorema de Sturm-Liouville, que é o Teorema Básico para a resolução das EDO de coeficientes variáveis: Legendre, Bessel, Hermite, Laguerre e as hipergeométricas de Gauss e Kummer. Essas equações e suas respectivas soluções representadas pelas funções que recebem o mesmo nome de seus descobridores, são a base da solução das Equações Diferenciais Parciais (EDP), temas do segundo volume sobre **Física Matemática** que os autores estão preparando.

Saliente-se que, para ajudar o leitor no entendimento dos assuntos tratados em cada Parte deste livro, os autores apresentam alguns exercícios, além da solução de alguns exemplos, e no final dos Capítulos são propostos alguns Problemas para ajudar o leitor no seu aprendizado. Além do mais, há um Apêndice Histórico, no qual os autores dão uma ideia de como, historicamente, foram desenvolvidos os assuntos tratados no texto.

O autor M. S. D. Cattani agradece à Maria Luiza Mattos Cattani pela revisão gramatical e ortográfica do texto.

Os autores agradecem ao Roberto Maluhy Jr. pela preparação da edição preliminar deste livro, e a Virgínia de Paiva, Bibliotecária do IF/USP, pelo auxílio na pesquisa das referências usadas no texto.

Belém e São Paulo, outubro de 2009

José Maria Filardo Bassalo, Diretor Executivo da *Fundação Minerva*
Mauro Sérgio Dorsa Cattani, Professor Titular do IF/USP

Sumário

Parte II – Transformadas

Parte I

Equações diferenciais ordinárias

1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1.1 Definições e classificações

DEFINIÇÃO 1.1.1

Uma equação que envolve derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada uma **equação diferencial**

Se a equação contém apenas derivadas totais, ou seja, se ela envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas *uma* variável independente, ela é chamada **equação diferencial ordinária**.

Se uma equação envolve derivadas parciais, ela é chamada **equação diferencial parcial**.

EXEMPLOS ....

1. $L\dfrac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}I = E\omega\cos(\omega t)$, chamada equação do circuito LCR.

2. $(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + n(n+1)y = 0$, chamada *Equação de Legendre*.

3. $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - n^2)y = 0$, chamada *Equação de Bessel*

4. $m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ky = 0$, chamada equação de um sistema mecânico amortecido.

5. $y' + p(x)y = q(x)y^n \ (n \neq 1)$, chamada *Equação de Bernoulli*.

6. $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$, chamada *Equação de Laplace*.

7. $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+k^2\phi=0$, chamada *Equação de Helmholtz*.

8. $\nabla\vec{D}=\rho$, chamada *1ª equação de Maxwell*.

9. $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\psi=\imath\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$, chamada *Equação de Schrödinger*.

10. $\Box(\psi,t)=0$ onde $\Box=\Delta-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, chamada *Equação de D'Alembert*.

11. $\Delta-\dfrac{1}{k}\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=0$, chamada *Equação de Fourier*.

DEFINIÇÃO 1.1.2

A ordem da mais alta derivada envolvida em uma equação diferencial é chamada sua **ordem**.

EXEMPLOS ...

1. Nos exemplos anteriores as equações 5 e 8 são de primeira ordem e as restantes são de segunda ordem.

2. A equação $\left(\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right)^2+2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3=0$ é de terceira ordem.

3. A equação $\nabla^4\phi=0$, onde ϕ é chamada função de Airy das tensões, é uma equação de quarta ordem.

DEFINIÇÃO 1.1.3

Dada uma equação diferencial na forma de um polinômio racionalizado nas diversas derivadas que compõe a mesma, chama-se **grau** da equação dada, o grau da derivada mais alta que figura na equação.

EXEMPLOS ...

1. Nos exemplos vistos anteriormente, todas as equações são do primeiro grau, à exceção do número dois no exemplo anterior que é de grau dois.

2. A equação $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sqrt[4]{y+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$ é uma equação do quarto grau pois, $\left(\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2\right)^4-y-\left(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x\right)^2=0$.

3. A equação $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3} = k\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/2}$ é de grau dois, uma vez que depois de racionalizado, ela contém o termo $\left(d^2y/dx^2\right)^2$.

Para que possamos classificar as equações diferenciais (ordinárias e parciais), vamos introduzir a seguinte definição:

Definição 1.1.4

Uma equação diferencial se diz **linear** se:

I. A variável dependente e suas derivadas são todas do primeiro grau;

II. Não figuram produtos entre elas (variável dependente e suas derivadas) na equação.

As equações que não satisfazem I e II são chamadas de **não lineares**.

Exemplos

1. A equação $\dfrac{d^4y}{dx^4}+3\dfrac{d^3y}{dx^3}+4\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+3y=0$ é uma equação linear de quarta ordem.

2. A equação de Laplace é uma equação linear de segunda ordem.

3. As equações $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+6y=0$, $y\dfrac{dy}{dx}=x$ e $\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2=\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, são exemplos de equações não lineares.

As equações diferenciais lineares são classificadas de acordo com os coeficientes da variável dependente e de suas derivadas, assim temos:

$$\textbf{equações diferenciais lineares}\begin{cases}\textbf{coeficientes constantes}\\ \textbf{coeficientes variáveis}\end{cases}$$

Em cada um desses casos podemos ter uma equação **homogênea** ou **não homogênea**.

Exemplos

1. A equação do circuito LRC:

$$\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0,$$

é uma equação linear, ordinária de coeficientes constantes e homogênea.

2. A equação diferencial de Hermite:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2ny = 0,$$

é uma equação linear, ordinária, de coeficientes variáveis e homogênea.

3. A equação de Poisson:

$$\Delta\phi(x, y, z) = \alpha\rho(x, y, z)$$

é uma equação linear, em derivadas parciais de coeficientes constantes e não homogênea.

4. A equação de um sistema mecânico:

$$m\ddot{y} + \lambda\dot{y} + ky = F_0 \cos(\omega t),$$

é uma equação linear, ordinária, de coeficientes constantes e não homogênea.

1.2 Soluções de uma equação diferencial

Para resolver uma equação diferencial, teremos que achar todas as funções e suas derivadas, que introduzidas na mesma, a verifiquem identicamente pelo menos em uma dada região. Tais funções denominam-se **soluções**, **primitivas** ou **integrais** da equação diferencial dada.

Definição 1.2.1

Seja a equação diferencial ordinária de n-ésima ordem $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ onde F é uma função de $(n+2)$ variáveis.

I. A função $f(x)$ é chamada uma **solução explícita** de equação diferencial se $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)] = 0$ para cada x no domínio de f.

II. A equação $g(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** da equação diferencial, se ela define pelo menos uma função da variável x que seja uma solução explícita da equação diferencial.

A definição dada acima nos permite dizer que uma solução de uma dada equação diferencial ordinária de n-ésima ordem é uma relação explícita ou implícita, entre x e y, e que satisfaz identicamente à equação diferencial dada.

EXEMPLOS ....

1. A função

$$y(x) = (x+c)e^{-x}$$

é uma solução explícita da equação diferencial

$$y' + y = e^{-x},$$

pois:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{-x} - (x+c)e^{-x} = e^{-x}(-x-c+1) \to$$
$$e^{-x}(-x-c+1) + (x+c)e^{-x} = e^{-x}(x+c+1-c-x) = \mathbf{e^{-x}}.$$

2. A equação

$$x^2 + y^2 = 25$$

é uma solução implícita da equação diferencial

$$x + yy' = 0,$$

pois:

$$x^2 + y^2 = 25 \to y_1 = +(25-x^2)^{1/2}$$

e

$$y_1' = \frac{1}{2}(25-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{(-x)}{(25-x^2)^{1/2}}.$$

Portanto:

$$x + y_1 y_1' = x + (25-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{(-x)}{(25-x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

DEFINIÇÃO 1.2.2

Seja uma equação diferencial ordinária de n-ésima ordem:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

I. A função $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ ou $y = (x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes arbitrárias, é denominada uma **solução geral** de uma equação diferencial dada;

II. Atribuindo-se os valores particulares a uma ou mais das n constantes arbitrárias da solução geral, teremos uma **solução particular**;

III. Toda solução, que *não* pode ser obtida da solução geral através de valores particulares às constantes, é denominada **solução singular**.

Exemplos ....

1. A equação

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$$

é uma *solução geral* da equação $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

2. A equação

$$y = \operatorname{sen} x - \cos x$$

é uma *solução particular* da equação $y'' + y = 0$.

3. A equação

$$y = a$$

é uma *solução singular* da equação

$$(y')^2 + y^2 = a^2$$

uma vez que ela não poderá ser obtida da solução geral que é:

$$y = \operatorname{sen}(x + c).$$

Na prática, uma solução particular de uma dada equação diferencial, é obtida através do conhecimento da função e de suas derivadas em algum ponto do domínio da função solução, valores esses chamados de **condições iniciais**. O número dessas condições é o da ordem da equação.

A solução de uma equação diferencial ordinária poderá ser obtida em forma **compacta** ou **fechada** e em forma de **série**. Nesta Parte, estudaremos os dois tipos de solução.

Problemas

1.1. Classifique cada uma das equações diferenciais abaixo:

I. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x$

II. $y' + x = (y - xy')^3$

III. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$

IV. $(y')^2 + xy' - y^2 = 0$

V. $y'' - 2y' - 3 = -4\operatorname{sen} x - 2\cos x$.

1.2. Em cada caso, verificar se a função dada é uma solução da equação diferencial correspondente.

I. $y' - y = e^{2x}, \quad y = ce^x + e^{2x}$

II. $y'' - (y')^2 = 1, \quad y = c_1 + \ln[\sec(x + c_2)]$

III. $y'''' - y = 0, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad \dot{y} = \operatorname{senh} x, \quad y = \cosh x$

IV. $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y = c_1 + c_2 \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

V. $xy' + (1+x)y = e^x, \quad y = \dfrac{e^x}{2x} + \dfrac{c}{x}e^{-x}.$