

# A Matemática na arte e na vida



PAULO ROBERTO MARTINS CONTADOR

# A Matemática na arte e na vida

3ª EDIÇÃO REVISADA

São Paulo - 2014

Copyright @ 2013, 3ª edição  
Copyright © 2013, Editora Livraria da Física

Direção editorial: José Roberto Marinho

Revisão: Fabrícia Carpinelli

Projeto gráfico e diagramação: Paulo Roberto Martins Contador

Projeto gráfico: Typography

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

---

Contador, Paulo Roberto Martins  
A matemática na arte e na vida/ Paulo Roberto Martins Contador. -  
- São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

Bibliografia

ISBN 978-85-7861-098-2

1. Matemática - estudo e ensino.
2. Matemática - História

11-02991

CDD - 510-7

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Educação matemática 510.7
2. Matemática: Estudo e ensino 510-7

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam  
quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.  
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da lei n. 9.610  
de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil - *Printed in Brazil*



*Editora Livraria da Física*  
Tel./Fax: +55 11 3459-4327/3936-3413  
[www.livrariadafisica.com.br](http://www.livrariadafisica.com.br)

### ***Meus agradecimentos***

*Ao amigo Francisco Aparecido da Costa, meu ex-professor de Física, não apenas por suas orientações mas, principalmente, pela honra que me proporcionou ao prefaciar este trabalho. À Dra. Cássia Lopes que tão gentilmente cedeu imagens e textos de seu fabuloso trabalho, além de presentear-me com seu comentário na orelha deste livro.*

*A Natureza escreve.  
O matemático e o artista  
se dão as mãos e lêem a Natureza.  
O número de ouro.*

*Prof. Luiz Barco*



## Prefácio

Poderia uma pessoa levar uma vida sem Arte ou viver sem a Matemática?

Pense no cotidiano das pessoas que você conhece. Seria possível alguém passar um dia sem ver uma figura, ainda que comercial, ou sem ouvir algum trecho de melodia solto no ar? Do lado da Matemática, será que alguém pode passar um dia, somente um dia sem fazer uma conta sequer?

Não tenho medo de afirmar que a Arte e a Matemática são inerentes à vida. Observe um corpo humano, suas proporções, simetrias, relações harmoniosas: estão presentes a Arte e a Matemática. Da mesma forma que em cada flor, em cada fruto, em cada árvore ou em cada animal. Assim, como também em todos os seus coletivos.

Dizem que a Arte imita a vida, mas na verdade, a arte é a expressão da vida através de Matemática aplicada em meios físicos constituídos de matéria e energia.

Sem empregar nenhum conceito matemático, tente dar boas descrições de um ser humano, uma flor, um fruto, uma árvore e um animal. Creio que você não conseguirá. E, se a Matemática dá precisão à essas descrições, como dar-lhes alma, a não ser através de Arte?

As artes e a matemática estão presentes em nossa vida e, desde o princípio, evoluíram juntamente com o ser humano. Lucrécio, poeta e filósofo latino que viveu no século I a.C., vinculava o avanço de uma civilização a seu desenvolvimento nas artes e na matemática. As artes rupestres nos dão certeza de que havia ideia de números desde tempos remotos: era os primeiros sinais da Matemática na Arte e na vida humana primordial que se desenvolveu até chegar aos nossos dias e que segue, como a própria vida, para o futuro inexorável.

Hoje, artes e matemática estão presentes em quase tudo ao nosso redor. É a arte utilitária presente nas roupas que vestimos e nos sapatos que calçamos, pois foram desenhados, medidos e decorados com figuras, pinturas ou aplicações de adornos. A Arquitetura, num sentido amplo, não se aplica apenas aos edifícios e pontes. Aplica-se também a ampla sorte de objetos manufaturados que nos rodeiam, como utensílios mobiliários, eletrodomésticos, eletroportáteis e computadores. Associa-se a outras artes utilitárias, com matemática aplicada para facilitar nossas vidas e, como consequência, modificar o desenvolvimento da humanidade. E o que dizer dos automóveis? Não seriam artifícios mecânicos controlados por matemática aplicada e encapados por artes utilitárias? Não teriam interferências diretas em todas as formas de vida de nosso planeta?

Você, leitor, verá neste livro que o autor Paulo Roberto Martins Contador, concebe com muita felicidade, a tríade matemática, arte e vida e a desenvolve com grande maestria, elaborando os temas com simultaneidade, como um malabarista a exhibir e controlar objetos no ar.

Os assuntos são tratados dentro da objetividade natural e lógica das explicações simples e sem mistérios, condizentes com os versos de Alberto Caieiro, heterônimo de Fernando Pessoa:

*O mistério das coisas, onde está ele?  
Onde está ele que não aparece  
Pelo menos a mostrar-nos que é mistério?*

Este livro compõe-se de três partes: histórica, teórica e de aplicações. O autor combina os elementos abstratos e exatos da Matemática, com a concreção inerente à vida e com a subjetividade sentimental própria das artes. Os temas propostos em cada capítulo são enlaçados à tríade, o fio condutor da obra, como que a tramar uma linda e



artística tapeçaria de ideias. O autor leva sua trama com o mesmo olhar do artista que vê sua obra pronta, antes mesmo de tê-la iniciado, tal qual os ditos de Michelangelo:

*Em cada bloco de mármore vejo uma estátua;  
Vejo-a tão real como se estivesse na minha frente.*

A exploração dos assuntos não se limita ao relato puro e simples, vai muito além. Como no caso da sequência numérica de Fibonacci, por exemplo, além do relato de seu surgimento, o assunto retorna em várias relações com outros aspectos das artes, da vida e da própria Matemática. Posso até mesmo dizer que a visão do autor ocorreu ao modo das palavras de Blaise Pascal, matemático francês:

*Devemos olhar para além de cada ação - para o nosso passado, presente e futuro - e perceber as relações entre todas as coisas envolvidas.*

Nas abordagens históricas, ao olhar para *além de cada ação*, o autor poderia, por seu pensar, ser compelido em direção a críticas mais severas em relação à igreja, aos estados brasileiro e estrangeiro, ou a qualquer forma de poder opressor negligente ou hipócrita. Digo isso porque li os originais e porque concordo com suas opiniões. Mas, para preservar a diretriz de sua obra, praticou a arte proferida por William James, psicólogo norte-americano:

*A arte da sabedoria é a arte de saber o que ignorar.*

Também já li os três volumes de *Matemática, Uma Breve História*, de sua autoria, e conheço as dificuldades pelas quais passou até conseguir a primeira edição. Haja empecilhos! Haveria motivos de sobra para que não praticasse a *arte de saber o que ignorar*. Entretanto, mostrou-se capaz de superar obstáculos, como quem recita a arte dos versos de Carlos Drummond de Andrade, escritor brasileiro:

*No meio do caminho tinha uma pedra  
tinha uma pedra no meio do caminho tinha uma pedra  
no meio do caminho tinha uma pedra.*

Há números e proporções singulares que a natureza possui como parte integrante de sua essência. Esses valores compõem nossa vida, porquanto natureza somos. O autor manifesta alegria e entusiasmo quando se refere a esses elementos essenciais. Não obstante a clareza de sua explanação, há capítulos que merecem ser lidos várias vezes, tais como *Pitágoras e a secção áurea*, *A proporção áurea na história*, *A Música e os números de Fibonacci* e *A geometria da vida*. Em vários capítulos, os problemas enfrentados pelos pensadores do passado são apresentados de modo a conduzir o leitor a entender tanto suas soluções como as motivações que os originaram, da forma como diz Bertrand Russell, pensador, filósofo e matemático inglês:

*O maior desafio de qualquer pensador é enunciar o problema de tal modo que possa permitir uma solução*

Tenho certeza de que ao terminar a leitura de *A Matemática na Arte e na Vida*, você nunca mais verá uma pintura como antes. Creio também que observará mais atentamente as esculturas, obras arquitetônicas e peças de arte utilitária. Sei que encontrará elementos matemáticos na dança, na ópera, no teatro, no cinema e nas artes gráficas. Com relação à arte da palavra, que inclui Matemática por possuir métrica e ritmo, gostaria que procedêssemos como Johann Wolfgang von Goethe, escritor alemão, precursor do romantismo:

*Todos os dias, devemos ouvir pelo menos uma breve canção, ler um bom poema, ver uma pintura de qualidade e, se possível, dizer algumas palavras sensatas.*

E, quando você ouvir uma canção, lembre-se de que devemos a Pitágoras o padrão ocidental de divisão de um intervalo de oitava em doze partes. Esse padrão determina nosso gosto e nossa cultura musical. E lembre-se de que a música tratada friamente como Matemática aplicada é passível de ser executada por um computador, mas somente através da interpretação de pessoas apaixonadas consegue tornar-se arte verdadeira. E quando você tiver vontade de cantar, poderá dividir o tempo matematicamente e expressar-se artisticamente, tal qual a primeira estrofe do poema *Motivo* de Cecília Meireles, escritora e poetisa brasileira:

*Eu canto porque o instante existe  
e a minha vida está completa.  
Não sou alegre nem sou triste: sou poeta.*

Ao encerrar sua leitura, desejo que suas expectativas tenham sido atendidas. Espero que, além das artes e de qualquer tipo de expressão esteticamente organizada, você passe a olhar a própria vida com mais atenção, se é que já não o faz. Observe as flores, os vegetais, os frutos, as sementes e os legumes, pois foram todos criados com muita arte e dotados de elementos matemáticos essenciais da Natureza. Por fim, observe-se a si mesmo e ao seu semelhante e entenda que fomos criados dentro da mesma arte-matemática que se expressa nas matérias e energias do mundo ao qual pertencemos e que temos obrigação de preservar.

Ao autor, meu amigo e ex-aluno, desejo que este livro atinja os objetivos propostos e que sua obra cresça sempre. Espero que suas ideias sejam úteis aos estudantes brasileiros, tão negligenciados pelo estado. E que evolua na mesma proporção de um filho, da vida e, porque não dizer da própria Matemática, que conquistou o mundo. Alias, agradecendo o convite para escrever este prefácio, creio realmente que sua obra sensibilizará tanto quanto o poema *Emergência* de Mário Quintana, poeta e escritor brasileiro:

*Quem faz um poema abre uma janela.  
Respira, tu que estás numa cela abafada,  
esse ar que entra por ela.  
Por isso é que poemas têm ritmo  
Para que possas profundamente respirar.  
Quem faz um poema salva um afogado.*

*Francisco Aparecido da Costa estudou no Instituto de Física da USP.  
Lecionou durante 17 anos em diversas escolas de São Paulo em nível de 2º grau e  
em vários cursos preparatórios para vestibular.*



# Índice

---

- Introdução.....	19
- Os Planetas e a origem do pentagrama .....	23
- O pentagrama e sua história .....	31
- O que foi o Renascimento? .....	45
- Pitágoras.....	57
- <i>Números poligonais</i> .....	62
- <i>Números pentagonais</i> .....	62
- <i>Números hexagonais</i> .....	62
- <i>Números perfeitos</i> .....	63
- <i>Números amigáveis</i> .....	63
- <i>Números pitagóricos</i> .....	64

- Números racionais .....	64
- Números irracionais .....	64
- Dedução do Teorema de Pitágoras.....	68
- Média aritmética.....	71
- Média geométrica ou proporcional .....	72
- Relação entre média aritmética e média geométrica .....	73
- Média harmônica .....	73
- Proporções .....	77
- Sólidos Platônicos .....	82
- Pitágoras e a secção áurea .....	85
- Prelúdio a um número.....	95
- Equação algébrica geral da Proporção Áurea .....	98
- Obtenção geométrica da proporção inversa .....	100
- Como construir um segmento áureo num segmento de reta qualquer .....	103
- A proporção áurea na história .....	105
- A divina proporção .....	111
- Propriedades algébricas da Proporção Áurea.....	111
- Progressão Geométrica áurea .....	113
- Método para obter geometricamente o segmento áureo .....	114

- Método para obter geometricamente o retângulo áureo.....	115
- Método de Euclides.....	116
- Obtenção do segmento áureo no círculo .....	117
- Obtenção do segmento áureo no decágono.....	118
- Obtenção do segmento áureo no pentágono.....	119
- Método para obter geometricamente	
<i>a espiral áurea ou a spira mirabilis</i> .....	124
- Crescimento do raio da espiral áurea .....	126
- A espiral retangular.....	127
- Cálculo do comprimento total da espiral retangular .....	129
- A espiral e o triângulo áureo .....	130
- O pentagrama .....	132
- O que é Simetria?.....	137
- O que é Harmonia? .....	145
- O problema de Fibonacci.....	147
- Cálculo do termo geral da sequência de Fibonacci.....	150
- Relação entre os termos de Fibonacci de grau $n$ e $(n - 1)$ .....	153
- Soma dos $n$ primeiros números elevados ao cubo .....	155
- Um pouco sobre Blaise Pascal .....	156
- Os números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal.....	161
- Os números de Fibonacci e seu determinante.....	164

- Um guia para a verdadeira beleza .....	165
- <i>As medidas mágicas</i> .....	166
- <i>A relação áurea infinita</i> .....	168
- <i>A estrela mágica</i> .....	169
- A Arquitetura e a secção áurea .....	171
- <i>Luca Pacioli</i> .....	174
- <i>Le Corbusier</i> .....	178
- A Arte e a secção áurea .....	183
- A Música e os números de Fibonacci .....	193
- <i>Conceitos básicos de Música</i> .....	193
- <i>Escala diatônica e escala temperada</i> .....	197
- <i>As notas musicais e os números de Fibonacci</i> .....	200
- <i>Kepler e os números de Fibonacci</i> .....	203
- A Natureza .....	209
- <i>A reflexão da luz e o número <math>\phi</math></i> .....	211
- <i>O floco de neve</i> .....	213
- <i>O átomo de Hidrogênio e os números de Fibonacci</i> .....	214
- <i>O quadrado, o círculo, a Terra e a Lua</i> .....	217



- Os Hexágonos e as abelhas .....	219
- A Geometria da vida.....	225
- O Homem e a Proporção Áurea .....	245
- Considerações finais .....	255
- Bibliografia .....	261



## Introdução

*A experiência de criar algo novo ou descobrir alguma beleza oculta é um dos prazeres mais intensos que a mente humana pode experimentar.*

*H. E. Huntley<sup>1</sup>*

Pode parecer estranho, mas a apreciação e o entendimento da beleza depende não apenas de nossas sensações primitivas, mas também de uma habilidade física que comprovadamente necessita, para um desempenho total, de muita prática e estudo. É impossível perceber, por completo, a beleza dos versos de um grande compositor brasileiro, se não conhecermos, no mínimo, os conceitos básicos sobre nossa gramática, ou admirar uma obra musical, se não estudarmos um pouco sobre Música. É mesmo caso nas obras de Leonardo da Vinci e Michelangelo, entre tantos outros, que exigem, para admirá-las por completo, conhecimentos sobre a *Proporção Áurea*.

A beleza é um conceito subjetivo e pode até mesmo ser dividida, conforme determinadas áreas. Podemos chamar de *beleza científica* uma demonstração matemática, uma reação química ou uma comprovação

---

<sup>1</sup> De origem inglesa, Huntley foi escritor e Professor de Matemática. É autor do livro *The Divine Proportion*.

física; de *beleza artesanal* aquela que vemos quando admiramos uma pintura, uma escultura; de *beleza natural* uma paisagem, uma montanha; de *beleza poética* a admiração que sentimos ao ler uma poesia. Não importa, apesar de todas serem totalmente diferentes elas possuem algo em comum, precisam de certo *padrão estético*. Este padrão, na realidade, não varia em função da tinta usada, das curvas da escultura, da teoria escrita ou da arquitetura do poema. É uma beleza intrínseca a cada objeto ou cada ente, e este conceito de beleza é um padrão estético que pertence ao homem pois, por ele foi desenvolvido.

Este trabalho é uma tentativa de mostrar como a Matemática pode explicar esse padrão estético, assim como a beleza e a harmonia da Natureza, desde o microcosmo, passando por um simples inseto, pelo formato de um cristal ou de um tornado, até o macrocosmo, como as galáxias.

Quando conseguimos entender a beleza, ela mexe com nosso coração, com nosso sentimento, com nossa capacidade de enlevar, com nossa capacidade de abstrair e ver nessa abstração, como quando acontecem as revelações ao cientista, ao poeta, ao pintor, ao escultor, ao matemático, e ao físico: se deparam com o *belo*. Mas como o homem pode atingir tamanho grau de perfeição? Qual parâmetro ou qual referência deve usar? A resposta a estas perguntas é simples: a Natureza. Sim, ela está repleta de padrões elegantes e sutis, além de que, tem sua própria concepção de beleza. Coube ao homem a tarefa de investigar como funcionam os surpreendentes mecanismos desse Universo que nos envolve. Qual seu alicerce e qual o segredo de sua arquitetura? Foi nessa tarefa ou nessa busca que revelou-se, entre tantos outros, um grande segredo que foi batizado como *número de ouro*. É óbvio que nunca existiu uma procura específica a esse número, acredito que jamais na história da humanidade, alguém em algum momento, ou lugar tenha dito: *vou sair à procura do número de ouro*. Sua origem é muito mais complexa e está ligada às muitas indagações e pesquisas realizadas pelo próprio homem.

De qualquer maneira, ele foi descoberto, sua presença é marcante não só nos vegetais, mas nos seres vivos em geral, inclusive no homem, nos cristais, na Natureza e no próprio cosmos. Depois de sua descoberta, de forma brilhante, o homem, através da Álgebra, o equacionou e chegou numa proporção, à qual deu o nome de *Proporção Áurea*, e foi através,