

Matemática para pais (e) interessados

Volume 2 – Geometrias

MICHEL JANOS

Matemática para pais (e) interessados

Volume 2 – Geometrias



Copyright © 2011 Editora Livraria da Física
1ª edição

Direção editorial José Roberto Marinho
Editor-assistente Victor Pereira Marinho

Revisão Fabricia Carpinelli

Revisão de prova O autor

Capa Ana Maria Hitomi/TypoDesign
Projeto gráfico e diagramação TypoDesign

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Janos, Michel
Matemática para pais (e) interessados:
volume 2: geometrias / Michel Janos. –
São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

ISBN 978-85-7861-100-2

1. Geometria 2. Matemática - Estudo e ensino
I. Título.

11-02974

CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático
1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei no 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

Para Halina, Beth, Small, Nixie e Mimo

“A matemática é a arte de dar o mesmo nome para coisas diferentes”.

Poincaré

Uma Boa Educação

“Ignorância, a raiz de todo mal”

Platão.

Este livro foi escrito para quem *não sabe* matemática. E quem não sabe matemática talvez também não saiba o que está perdendo. Mas mais do que isso, apreciar matemática, assim como apreciar a boa música, literatura, arquitetura ou biologia, para citar alguns assuntos, fazem parte de uma boa educação. Uma boa educação, não no sentido da moralidade, mas no sentido de que uma boa educação permite uma vida mais prazerosa.

Muita gente pergunta: afinal para que serve a matemática? Todas estas fórmulas e teoremas que nunca vamos usar... Bem, vá suficientemente fundo em qualquer assunto e você encontrará matemática.

Ainda em nossos dias não vemos claramente a Matemática. A matemática está em quase tudo, mas escondida. Ela foi usada para projetar o freio do seu automóvel, a tela de sua televisão, desenvolver a vacina contra a gripe, determinar o nível do aquecimento global, o juro do seu cartão de crédito, etc. Porém é verdade que poucas pessoas fazem a matemática envolvida nestes processos; são somente alguns poucos engenheiros e cientistas, e é pouco provável que você, ou algum de seus filhos, seguirá uma carreira tão especializada, principalmente no Brasil.

Mas isto está mudando muito rapidamente. Você sabe quais são as

áreas mais promissoras para as próximas gerações? Um estudo americano mostrou que, nas áreas relacionadas à ciências, elas são:

- Robótica Médica
- Bioinformática
- Engenharia Biomédica e Células Tronco
- Reconhecimento de Padrões
- Nanotecnologia
- Engenharia de Simulação
- Engenharia de Fontes de Energia
- Engenharia Aeroespacial
- Geofísica
- Ecologia e Sustentabilidade
- Engenharia de Computação e Software

Você sabe quais destas áreas usam *extensivamente* a Matemática? Todas. Nos próximos anos a Matemática será uma ciência muito mais importante e visível do que hoje.

Mas mesmo que você ou seus filhos não se tornem profissionais de matemática, eu posso lhe assegurar que ela é *bacana* (de Baco, deus da alegria). Quer dizer, ela é interessante, divertida e bela. Tem uma piada que diz que os estudantes que realmente captam os conceitos da matemática são reconhecidos por não terem sobranças. De tão impressionados e seduzidos pelo assunto, suas sobranças foram subindo, subindo, até finalmente sumir atrás da cabeça.

Educação x Treinamento

Por cerca de mil anos (século 5 a.C até século 5 d.C), a civilização grega manteve uma esplêndida tradição de trabalho na matemática (especialmente na geometria), assim como na astronomia e na música, estas consideradas como disciplinas associadas à matemática, além da poesia do drama e da filosofia.

Pode-se dizer que a cultura e a importância de uma pessoa era medida pelo seu conhecimento nestes assuntos. Em contraste com os gregos, os romanos consideravam as artes da guerra e da política como as mais nobres.

Certa ou errada, a atitude romana de relegar a uma segunda classe a matemática e as ciências em geral é, sem dúvida, a que vigora em nossos dias. Quantos políticos, empresários ou celebridades sabem explicar o movimento das marés ou o que é um antibiótico?

Decididamente a matemática é vista em nossa sociedade como algo enfadonho e complicado e que deve ser engolido à força.

Falando de maneira específica sobre o ensino da matemática, é clara a confusão entre treinamento e educação. Nos últimos anos em nosso país, a forma de lecionar tem sido exclusivamente condicionada para a aprovação em vestibulares, ou seja, concentra-se no treinamento de certas habilidades que serão úteis nestas provas. A isso não se pode dar o nome de educação matemática. Esta tem de contemplar a história das ideias, os métodos de demonstração e em como os conceitos da matemática são transferidos para as outras ciências.

Nos meus dias de ginásio eu usava lápis e borracha para calcular logaritmos e raízes quadradas, (felizmente não cheguei à raiz cúbica). Hoje em dia será difícil encontrar alguém, mesmo um matemático, que se lembre como extrair uma raiz quadrada à mão. Saber extrair raízes realmente não tem nada a ver com saber matemática. Decorar fórmulas e resolver exercícios automaticamente aplicando as fórmulas também não. Hoje não precisamos saber de cor nenhuma fórmula, nem mesmo fazer contas, para saber e fazer matemática, pois para isso temos as máquinas, que, por sinal, são muito melhores que nós nestas tarefas. Segundo Einstein: *“É um milagre que a curiosidade sobreviva a educação formal”*.

Este livro, embora trate de assuntos bastante básicos, não é um livro didático para ensinar matemática nas escolas. Escrevi este livro pensando principalmente nas pessoas mais maduras – os pais interessados principalmente – para que possam entender um pouco do assunto e assim direcionar seus filhos para o aprendizado de algo que poderá tornar suas vidas mais interessantes.

O que é Matemática?

Um dos maiores problemas da matemática é explicar o que ela é. Vamos começar pelo que ela não é. Matemática não é sobre símbolos nem cálculos. Símbolos são ferramentas e, assim como a música não é uma sequência de notas, a matemática não é sobre símbolos. Matemática também não é sobre cálculos. Cálculos são processos que levam a algum resultado. Como dissemos, atualmente quase todos os cálculos ficam para as máquinas. De modo genérico podemos dizer que a matemática é sobre ideias. Dado que uma informação existe, o que se segue a ela?

O objetivo da matemática é entender o que existe, desprezar o que é irrelevante e extrair daí um novo resultado consistente. Isso é feito formulando conjecturas e estabelecendo provas através de métodos de dedução baseados em axiomas. O matemático Benjamin Pierce chamou a matemática de *“a ciência que tira conclusões necessárias”*.

Mas a matemática é apenas uma ciência. Se o pensamento científico fosse sempre derivado por processos matemáticos, nossa compreensão do mundo físico seria muito pequena. Seria como decidir jogadas num jogo de pôquer usando apenas a teoria das probabilidades.

Na matemática pura, um novo resultado, em geral, não tem aplicação prática imediata, ou, às vezes, nunca terá, mas isso realmente não incomoda os matemáticos. Por exemplo, o Princípio da Tricotomia diz que “qualquer número real é zero ou positivo ou negativo”. Uma pergunta típica de um matemático seria: Porque devo aceitar este princípio? O fato de não ter sido encontrado um número diferente destes três tipos não prova nada. Há até respeitáveis especulações que tal número poderia existir.

Não é possível fazer uma precisa classificação da matemática em grupos estanques, como dividimos os campos da física ou da química e a maioria assuntos. Por exemplo, é comum dividir a matemática em matemática pura e matemática aplicada, porém as fronteiras entre as duas não são evidentes e, muitas vezes, elas se sobrepõem.

Mas, se alguma classificação deve ser feita, optamos pela que subdivide a matemática em quatro grupos:

Fundamentos: consideram essencialmente as questões relativas à Ló-

gica e a Teoria dos Conjuntos.

Álgebra: concerne às regras para manipular operações aritméticas. Em geral, é o assunto introduzido nos primeiros anos do estudo da matemática.

Geometria: trata das dimensões, formas, posições relativas no espaço e as propriedades dos espaços.

Análise: estuda as funções, isto é, as relações entre duas ou mais entidades, principalmente aquelas ligadas ao movimento.

O primeiro volume desta série tratou dos Fundamentos e Álgebra. Neste livro vamos nos concentrar nas diversas Geometrias. Além da teoria, apresento diversos exemplos e questões, com as soluções, para você tentar resolver. As questões são mais que meros exercícios de aplicações de fórmulas e algumas são difíceis. Minha recomendação é que você realmente tente resolver as questões com persistência, não desistindo facilmente, mesmo que você tenha que deixar uma questão para depois, e só vá encontrar a solução depois de um esforço razoável.

Ao ser perguntado o que alguém ganharia em aprender geometria, Euclides chamou seu escravo e disse: “*Dê a ele três moedas visto que ele deve ganhar algo em troca do que aprende*”. Quando você aprende matemática, você ganha prazer e satisfação.

É com este espírito que este texto foi escrito.

Michel Janos – Julho de 2010

Conteúdo

1	O que é um Triângulo?.....	17
2	O Que é Geometria?.....	21
3	A Geometria Euclidiana.....	35
	3.1 Os Polígonos	36
	3.2 Os Triângulos	36
	3.3 Os Quadriláteros	37
	3.4 O Círculo	38
	3.5 Áreas.....	41
	3.6 Teorema de Tales (1).....	46
	3.7 Teorema de Tales (2).....	48
	3.8 A Semelhança e a Congruência entre Triângulos.....	49
	3.09 A Soma dos Ângulos do Triângulo	50
	3.10 A Soma dos Ângulos do Polígono Convexo.....	50
	3.11 O Comprimento dos Lados do Triângulo	51
	3.12 A Construção do Triângulo Equilátero	52
	3.13 O Teorema de Pitágoras.....	53
	3.14 Os Pontos Especiais do Triângulo	57
	3.15 As Bissetrizes e seus Teoremas	60
	3.16 Concorrência em um ponto – Teorema de Ceva.....	62
	3.17 A Linha de Euler.....	64
	3.18 O Círculo de Nove Pontos	65
	3.19 Teorema de Napoleão.....	66
	3.20 O Teorema de Stewart.....	66
	3.21 Teorema de Morley	68
	3.22 Ponto de Fermat.....	69
	3.23 Teoremas para O Círculo.....	70
	3.24 A Linha de Simson.....	76
	3.25 Os problemas de Apolônio.....	77

3.26	Quadraturas	78
	A Quadratura do Retângulo.....	78
	A Quadratura do Triângulo.....	79
	A Quadratura da Luna (por Hipócrates)	80
	A Quadratura do Círculo	81
3.27	Poliedros	84
	Poliedros Regulares	85
	Poliedros Semirregulares	87
	Primas, Pirâmides, Cilindros e Cones	89
3.28	Volumes	92
3.29	Sólidos de Revolução	98
3.30	A Característica de Euler.....	99
3.31	Arquimedes	104
	A Triseção do ângulo.....	107
	Esferas e Cilindros	112
	O Volume da Esfera.....	117
3.32	As secções Conicas	123
4	Trigonometria e Navegação.....	127
4.1	Um Pouco de História.....	127
4.2	Primeiras Medições.....	132
4.3	Noções Básicas de Trigonometria Plana	135
4.4	Grau e Radiano	144
4.5	Identidades trigonométricas.....	147
	A Lei dos Senos.....	148
	Seno do ângulo duplo	151
	Cosseno do ângulo duplo.....	152
	Teorema de Ptolomeu	152
	O Seno da soma de dois ângulos.....	155
	A Lei dos Cossenos	156
	Tangente da soma de dois ângulos.....	167
	Tangente do ângulo duplo	158
	A Lei das Tangentes.....	158
4.6	Trigonometria Esférica	160
4.7	Navegando a Terra e os Céus	171
	A Circuferência da Terra.....	171
	A Construção de Mapas	175
	O Mapa de Mercator.....	180
	Triangulando o Universo	184
	Conceitos Básicos de Navegação.....	187
5	Novas Bases para a Geometria.....	191
6	Transformações.....	195
6.1	Simetrias	198
	Rotação.....	200

	Reflexão.....	201
	Translação.....	202
6.2	A Transformação da Inversão.....	203
6.3	Teoria dos Grupos.....	207
	Grupos.....	211
7	Geometria Projetiva.....	215
7.1	O Ponto do Infinito.....	223
7.2	As Transformações na Geometria Projetiva.....	225
7.3	A Razão Cruzada.....	227
7.4	Os Axiomas da Geometria Projetiva.....	233
7.5	Dualidade.....	234
7.6	Três Teoremas da Geometria Projetiva.....	234
	Teorema do Quadrilátero Completo.....	234
	O Teorema de Desargues.....	236
	Teorema de Dandelin.....	237
7.7	Razão Cruzada nas Cônicas.....	240
8	A Geometria Analítica.....	243
8.1	Os Sistemas de Coordenadas.....	246
8.2	A Equação da Reta.....	247
8.3	A Equação do Círculo.....	254
8.4	Determinação de distâncias.....	257
8.5	A Área do Triângulo.....	258
8.6	Algumas Curvas Notáveis.....	259
	Corrente Elétrica e Música – Seno.....	259
	O Crescimento de Bactérias – Exponencial.....	262
8.7	Espirais.....	264
8.8	As Cônicas.....	270
8.9	Tratamento Unificado das Cônicas.....	273
9	Topologia.....	277
9.1	Espaços Topológicos.....	278
9.2	As Pontes de Königsberg.....	281
9.3	O Circuito Hamiltoniano.....	284
9.4	O Metrô de Londres.....	287
9.5	Curva de Jordán.....	288
9.6	Superfícies.....	289
9.7	Orientabilidade e Número de Arestas – A Tira de Möbius.....	290
9.8	Característica de Euler.....	294
9.9	Três Superfícies Esquisitas.....	296
	A Garrafa de Klein.....	296
	A Esfera Cornuda de Alexander.....	297
	A Bola Cabeluda.....	298
9.10	Nós.....	300
9.11	Dois Grandes Problemas de Topologia.....	305
	O Teorema das Quatro Cores.....	305

O Último Teorema de Fermat.....	308
10 Regularidade e Padrões	315
10.1 Padrões Geométricos Naturais	315
10.2 Padrões Geométricos Matemáticos.....	320
10.3 Pavimentando o Plano.....	325
10.4 Ladrilhos de Penrose	329
10.5 Papéis de Parede.....	334
11 O Espaço de N dimensões	337
11.1 Superfícies e Dimensões	337
11.2 Conceito Abstrato de Dimensão	338
11.3 Conceito Abstrato de Distância	342
11.4 Conceito Geométrico de Dimensão	344
11.5 O Hipercubo.....	345
11.6 A Hiperesfera	347
11.7 Polítopos	353
12 Geometria Fractal	355
12.1 Fractais Clássicos.....	356
O Conjunto de Cantor	357
A Cardinalidade de C	360
A Curva de Koch.....	360
A Cesta de Sierpinski.....	362
A Samambaia de Barnsley	364
12.2 Transformações Autossemelhantes.....	365
A Função Iterativa (FI).....	368
Dimensões Fractais	371
Dimensões de Objetos Naturais	377
12.3 Geometria Fractal e Computação Gráfica.....	384
12.4 O Fractal de Mandelbrot	385
Comportamento Caótico	389
Existe Arte Fractal ?	390
13 Geometrias Não-Euclidianas	393
13.1 A Geometria no Espaço Curvo	396
Curvatura	396
A Geometria de Riemann	398
A Geometria do Universo.....	404
Será o Universo Finito?	406
14 Questões Resolvidas de Geometria	409
Índice Remissivo	431
Bibliografia	439

(1)

O que é um Triângulo?

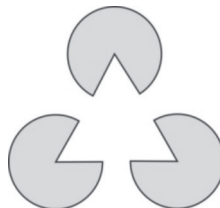
*“Geometria é uma habilidade dos olhos e das mãos,
bem como da mente.”*

Jean Pedersen

O que você vê na figura abaixo?



Bem, por incrível que pareça, algumas pessoas veem um triângulo. Agora, na figura a seguir, muitas pessoas veem um triângulo.



Porém não existe um triângulo em nenhuma das figuras. Os triângulos observados são uma ilusão de ótica produzida pela mente, porque o sistema visual cognitivo humano procura padrões geométricos armazenados em nossa memória.

Mas o que é um triângulo para nossa mente?

Certamente não é cor, nem espessura nem tamanho. O triângulo é reconhecido pela sua *forma*. Quando três linhas que se interceptam formam uma figura fechada, a reconhecemos como um triângulo. Da mesma forma reconhecemos o número três, independentemente se vemos três camelos ou três bicicletas. Podemos dizer que um triângulo, assim como número 3, são abstrações. Na matemática, uma abstração exprime algo que remove toda a dependência com objetos do mundo real com as quais ela poderia estar inicialmente conectada, generalizando assim uma ideia para uma grande gama de aplicações.

Por exemplo, existem línguas primitivas que tem palavras para todas as cores do arco-íris, mas não tem palavra para a palavra “palavra”. Segundo Bertrand Russel, deve ter se passado muito tempo até que o homem tenha descoberto que um par de camelos e o ciclo dia-noite são ambos instancias do número dois. Já se descobriram tribos que tinham palavras diferentes para expressar números; por exemplo, duas canoas, duas lanças e dois homens eram expressos com palavras diferentes para a quantidade dois. Outras se referiam a um pássaro com duas asas para denotar o número dois, um lobo para denotar quatro (patas), os dedos das mãos para denotar cinco, etc. Outras ainda juntavam dez sementes para simbolizar o recrutamento de dez homens.

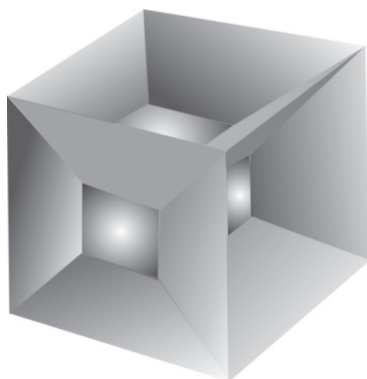
Portanto, na matemática, o concreto precede o abstrato. A matemática só passou a existir depois que alguém passou do *concreto para o abstrato*. De fato, a abstração vem, às vezes, com dificuldade, como parte de nosso desenvolvimento intelectual. Por exemplo, Jean Piaget mostrou que o conceito abstrato de volume não é inato. Crianças pequenas não conseguem reconhecer que um copo de água alto e fino pode conter o mesmo volume de água que um grosso e baixo, mesmo quando elas veem sendo transferido o líquido de um copo para o outro, a tendência é achar que o copo alto contém mais água. Assim também o conceito

abstrato de número parece ser aprendido pelas crianças, após elas terem aprendido a contar. A mente e a cultura humanas desenvolveram não só o conceito de número, bem como todo um sistema de pensamento, classificação e exploração de padrões, chamado matemática.

Infelizmente quanto mais abstrato um conceito, maior a dificuldade de aprendê-lo, e a matemática feita pelos especialistas está cada vez mais abstrata. Por outro lado, as ferramentas de que dispomos hoje para estudar matemática são muito mais poderosas. Por exemplo, se não conseguimos ver figuras em quatro dimensões, pelo menos podemos usar um computador para calcular suas medidas.

O conceito de forma gerou, e continua gerando, disciplinas dentro da matemática, das quais a mais antiga é a Geometria Euclidiana e a mais recente a Topologia. Existem muitas Geometrias, e entre as mais recentes, aquelas que já não podemos representar com desenhos nem mesmo mentalmente, como as geometrias de dimensões acima da 3ª.

Bem até podemos representar um cubo em 4 dimensões – um hipercubo, mas esta é uma figura que não existe no mundo real, mas somente em nossa imaginação.



Hipercubo

Do ponto de vista matemático, qualquer geometria – ou qualquer disciplina da matemática – que não produzir contradições é aceitável. Entretanto, estamos sempre procurando a geometria que melhor repre-

senta o mundo físico. Até o século 19 nosso mundo era representado usando a Geometria Euclidiana. Mas isso mudou.

A maioria das pessoas não se dá conta de que a cerca de um século e meio uma revolução aconteceu cujo impacto na geometria pode ser considerado equivalente ao impacto causado pela Teoria da Evolução das Espécies de Darwin na biologia.

Infelizmente esta revolução não parece estar sendo passada aos alunos que continuam a estudar quase que exclusivamente a Geometria Euclidiana. É como se os estudantes da escola média ainda não tivessem sido informados que a Cortina de Ferro caiu. As geometrias que *não incluem* entre seus axiomas o postulado das paralelas (“*duas retas paralelas nunca se encontram*”), são chamadas de geometria não-Euclidianas, e a elas devemos, entre outras descobertas, a Teoria da Relatividade.

Mas, como você verá ao longo da leitura deste livro, a Geometria não-Euclidiana é talvez uma pequena parte e o exemplo mais marcante do que *não é ensinado* aos alunos.