COGNIÇÃO MATEMÁTICA:
História, Antropologia e Epistemologia

LF EDITORIAL

Sociedade Brasileira de
História da Matemática

Radford 16x23.indd 1 09/10/12 16:35

Luis Radford

Organização e Revisão Técnica da Tradução
Bernadete Morey
Iran Abreu Mendes

COGNIÇÃO MATEMÁTICA: História, Antropologia e Epistemologia

LF EDITORIAL

Sociedade Brasileira de História da Matemática

Radford 16x23.indd 3 09/10/12 16:35

Copyright © 2011 Editora Livraria da Física/SBHMat
1ª edição

Direção editorial José Roberto Marinho
Editor-assistente Victor Pereira Marinho

Coleção História da Matemática para Professores

Coordenação
Iran Abreu Mendes – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
Conselho Editorial
Antonio Miguel – Universidade Estadual de Campinas, Brasil
Antonio Vicente Marafioti Garnica – UNESP/Rio Claro; UNESP/Bauru, Brasil
Circe Mary Silva da Silva Dynnikov – Universidade Federal do Espiírito Santo, Brasil
Eva Maria Siqueira Alves – Universidade Federal de Sergipe, Brasil
Fulvia Furinghetti – Universidade de Gênova, Itália
Iran Abreu Mendes – universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
José Manuel Matos – Universidade Nova de Lisboa, Portugal
Luis Radford – Universidade Laurentienne, Canadá
Sergio Nobre – UNESP/Rio Claro, Brasil
Ubiratan D'Ambrosio – Universidade Bandeirante de São Paulo, Brasil

Apoio
Sociedade Brasileira de História da Matemática

Capa: Ana M. Hitomi/Typodesign
Projeto gráfico e diagramação: Typodesign

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Radford, Luis
Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia / Luis Radford; organização e revisão técnica da tradução Bernadete Morey, Iran Abreu Mendes. –
São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

Bibliografia
ISBN 978-85-7861-108-8

1. Matemática 2. Matemática - Estudo e ensino 3. Matemática - História 4. Professores - Formação I. Morey, Bernadete. II. Mendes, Iran Abreu. III. Título. IV. Série.

11-09554 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei no 9.610, de 19 de fevereiro de 1998

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

Índice

Apresentação 07

1. Antes que as outras incógnitas fossem inventadas: investigações didáticas acerca dos métodos e problemas da álgebra italiana medieval 15

2. A invenção de uma ideia matemática: a segunda incógnita em álgebra 49

3. Sobre psicologia, epistemologia histórica e o ensino da Matemática: rumo a uma história sociocultural da Matemática 73

4. Equações do segundo grau em sala de aula: uma abordagem babilônica 99

5. A origem histórica do pensamento algébrico 117

6. Sobre os limites epistemológicos da linguagem: conhecimento matemático e prática social durante a Renascença 155

7. As condições epistelomológico-culturais da emergência do simbolismo algébrico 193

8. Cultura, conhecimento e o self: matemática e a formação de novas sensibilidades sociais no Islã medieval e renascentista 221

Radford 16x23.indd 5 09/10/12 16:35

9. Cultura e cognição: por uma antropologia do pensamento matemático 259

10. A ética de ser e conhecer: rumo a uma teoria cultural da aprendizagem 311

O Autor 341

Radford 16x23.indd 6 09/10/12 16:35

Apresentação

Iran Abreu Mendes
Bernadete Morey

Os interesses da pesquisa de Luis Radford abrangem aspectos teóricos e práticos da Matemática que tratam do pensamento, do ensino e da aprendizagem matemática. A linha central de sua pesquisa, conforme palavras do próprio pesquisador, referem-se a uma participação sustentada no trabalho da sala de aula com professores e estudantes.

Como um teórico sociocultural, Radford tem manifestado interesse em mover-se para além dos discursos pedagógicos centrados nos estudantes burgueses. Interessa-se pela escola de pensamento histórico-cultural de Vygotsky, da epistemologia de Evald Ilyenkov. Seus trabalhos mais recentes centram-se na elaboração de uma aproximação teórica na qual o problema de ensinar e de aprender é formulado em torno do conceito de alteridade, influenciado por Emmanuel Lévinas e de Mikhail Bakhtin. Em tal aproximação, a aprendizagem é concebida enquanto um processo social, político e transformativo com que os estudantes encontram criticamente outras vozes e perspectivas (históricas e contemporâneas) para erguer-se, mediados pela práxis cultural, em direção a sua aprendizagem. A esse respeito Radford discute, não somente o saber, mas também o tornar-se (tornar-se alguém com outros).

Radford 16x23.indd 7 09/10/12 16:35

Para o autor a teoria da objetivação não é uma teoria da cognição humana, não é uma teoria psicológica, nem é uma teoria etnomatemática. É uma teoria da aprendizagem. Suas premissas teóricas fundamentais apontam que o pensamento matemático compartilha um mesmo "*sistema simbólico*" com outras formas culturais de pensamento, como o pensamento ético, artístico, político, científico, etc. A aprendizagem, então, é tomada como um processo cultural e histórico no qual saber e estar sejam mutuamente constitutivos e conduzam a uma concepção não-utilitarista e não-instrumentalista da sala de aula e da educação.

O autor considera que no Renascimento apareceram novas formas de subjetividade muito diferentes das medievais. O conceito de pessoal se modifica e aparece a ideia de autonomia. Embora na Grécia antiga a autonomia fosse derivada de uma estrutura político-social segundo a qual se nasce ou não autônomo, a partir do Renascimento a autonomia é um atributo que pode ser adquirido. Essas formas de subjetividade do espaço político-econômico se traduzem, na arte, em novas formas de representar o mundo caracterizadas pela maneira em que este aparece ao indivíduo. O mundo é visto pela primeira vez do ponto de vista do sujeito. Essa é precisamente o que expressa a perspectiva, considerada pelo autor como um método, ou seja, uma forma sistemática e invariável de representação do mundo. A álgebra simbólica é exatamente isso, um método que permite representar e resolver problemas de diferentes tipos (comercial, geométrico, teorico-numérico, etc.) da mesma forma.

A teoria da objetivação de Luis Radford é uma teoria de ensino-aprendizagem na qual o conceito fundamental é o conceito de pensamento. Para entender o pensamento matemático devemos primeiro definir o pensamento em geral. Devemos fazê-lo de tal maneira que o pensamento seja visto em relação direta com a cultura. A objetivação é um processo de dotação de significados aos objetos conceituais e formas de raciocínios que o aluno encontra em sua cultura por intermédio da escola ou outros contextos não formais de instrução.

Sobre o pensamento, Radford considera o mesmo como uma forma cultural de reflexão sensível, intelectual sobre o mundo; uma reflexão mediatizada sobre o mundo, operacionalizada de acordo com as formas

Radford 16x23.indd 8 09/10/12 16:35

das práticas sociais (práxis) dos indivíduos, ou seja, o pensamento não é simplemente gerado no decurso da prática humana. Isso signfica, portanto, que a forma da prática imprime sua marca no pensamento e em seus produtos, ou seja, o saber cultural.

Em sintese, a objetivação é a tomada de consciência da lógica cultural com que os objetos histórico-conceituais e as formas de raciocínios correspondentes tem sido adotadas pela cultura ao longo do tempo. A objetivação é uma teoria sociocultural da aprendizagem que se inspira na etnomatemática de D'Ambrosio, no trabalho de Vigotsky e na fenomenologia de Husserl. Seu objetivo é explicar os processos de aquisição, pelo aluno, de formas culturais de pensamento matemático. O problema fundamental da teoria da objetivação é a aquisição, pelo aluno, de formas culturais de ação e reflexão. Em particular, o problema é dar conta da aquisição de formas culturais de reflexão matemática.

Este livro está organizado em 10 capítulos e têm como finalidade constituir uma visão, mesmo que panorâmica, do processo de instituição de sua teoria da objetivação. O capítulo 1, denominado "Antes que as outras incógnitas fossem inventadas: investigações didáticas acerca dos métodos e problemas da álgebra italiana medieval", é um estudo que refere-se ao do fato de que, geralmente, nos programas escolares, os métodos de resolução de problemas de enunciado usados para introduzir a álgebra são baseados no uso de uma única incógnita, enquanto que a introdução das outras incógnitas acontece somente alguns anos depois. Portanto, é adequado, do ponto de vista do ensino, tentar entender claramente as características do «pensamento algébrico de única incógnita.

Nesse sentido, Radford faz um estudo da álgebra italiana medieval para olhar os vários tipos de problemas e métodos usados para resolvê-los, a partir de uma abordagem epistemológica histórica na qual a compreensão dos elementos cognitivos subjacentes à atividade algébrica tem que levar em consideração a dimensão sóciocultural na qual esta atividade está embutida e com a qual ela interage – uma interação que molda a própria atividade matemática.

No capítulo 2, denominado "A invenção de uma ideia matemática: a segunda incógnita em álgebra", o autor se propõe a abordar o problema

Radford 16x23.indd 9 09/10/12 16:35

da invenção nas matemáticas dos abacistas, ou seja, as matemáticas praticadas nas escolas de ábaco da Idade Média e do inicio da renascença italiana. Recordemos aqui que sob formas semióticas diferentes a segunda incógnita algébrica já tinha aparecido na Mesopotâmia assim como de maneira muito pontual nos árabes em uma obra escrita provavelmente no inicio do século XI, extraído do Fakhrî, pelo matemático Aboû Beqr Mohammed Bem Alhaçan Alkarkhî.

O capítulo 3, intitulado "Sobre Psicologia, Epistemologia Histórica e o Ensino da Matemática: Rumo a uma história sóciocultural da Matemática", faz uma reflexão acerca das possibilidades e os limites de um uso não-ingênuo da história da Matemática para fins educacionais. Trata inicialmente de dois problemas de natureza historiográfica que qualquer pesquisa epistemológica de história da Matemática tem de abordar: quais as hipóteses que tornam possível confrontar o desenvolvimento conceitual passado com o moderno?

Em seguida o autor examina alguns pressupostos subjacentes à versão psicológica de Piaget e Garcia do recapitulacionismo de Haeckel e apresenta uma crítica baseada em uma concepção sóciocultural do conhecimento (Vigotsky). Propõe uma análise crítica de uma das perspectivas histórico-epistemológicas mais influentes, usada por pesquisadores em Educação Matemática como a dos obstáculos epistemológicos. Amplia suas discussões sobre a profundidade da raiz e do molde do conhecimento por seu contexto social e cultural. Fornece alguns exemplos retirados da Matemática Chinesa e da Matemática dos períodos clássicos Grego e Alexandrino. Por fim discute as possibilidades que uma história sóciocultural da Matemática

No capítulo 4 denominado "Equações do segundo grau em sala de aula: uma abordagem babilônica", Radford apresenta uma sequência de ensino cujo propósito é levar os estudantes a reinventarem a fórmula que resolve a equação quadrática em sua forma geral. A sequência de ensino está centrada na resolução de problemas geométricos relacionados a retângulos usando um elegante método visual desenvolvido por escribas babilônios durante a primeira metade do segundo milênio a. C.. A meta do autor é alcançar um itinerário progressivo do pensamento o qual se

Radford 16x23.indd 10 09/10/12 16:35

inicia com o uso de materiais manipulativos que contribui para desenvolver o pensamento em um processo investigativo de resolução de problemas, combinando tanto a experiência numérica como a geométrica.

Em vez de envolver os estudantes com simbolismo algébrico moderno já no início - algo que geralmente desanima muitos deles – os símbolos algébricos são introduzidos somente no final, depois que os estudantes já tenham realmente compreendido o método geométrico. Esta sequência de ensino tem sido sucessivamente empreendida em salas de aula no nível do ensino médio.

No capítulo 5, denominado "A origem histórica do pensamento algébrico", Radford procura demonstrar que o pensamento algébrico (numérico) emergiu a partir de um raciocínio proporcional como meio rápido, direto e alternativo de resolução de problemas "não práticos". Com o objetivo de provar esta colocação, o autor descreve sucintamente algumas das características do raciocínio proporcional mesopotâmico, em seguida propõe suas teses referentes à evidência histórica e técnica e argumenta a esse respeito, considerando que um certo conhecimento dos métodos algébricos de Diofanto é necessário, faz um resumo geral do tratado *Aritmética* de Diofanto, que se ocupa da álgebra geométrica Babilônica.

A segunda questão deste capítulo refere-se ao papel da linguagem e do simbolismo no pensamento algébrico, considerando que a Matemática acadêmica é uma manifestação semiótica da cultura na qual a Matemática é praticada. Consequentemente, sugere que o papel do simbolismo no pensamento algébrico precisa ser estudado através de um sentido social da Álgebra e através das diferentes formas de simbolização que a cultura em análise utiliza para simbolizar os objetos (não importando se tais formas são matemáticas ou não). Por esse motivo, em muitos exemplos, o autor se refere a alguns componentes socioculturais do mundo dos escribas Mesopotâmicos. Ao final do capítulo apresenta algumas observações pedagógicas.

No capítulo 6, intitulado "Sobre os limites epistemológicos da linguagem: conhecimento matemático e prática social durante a Renascença", o autor considera que uma característica importante das reflexões

Radford 16x23.indd 11 09/10/12 16:35

contemporâneas em Educação Matemática consiste na atenção dada à linguagem e ao discurso. Já não mais sendo vista como uma única ferramenta mais ou menos útil para expressar pensamento, o autor admite que hoje a linguagem parece ser vista com possibilidades cognitivas e epistemológicas sem precedentes. Afirma que poderíamos dizer que a barreira entre a linguagem e o pensamento rompeu-se ao ponto de não mais sabermos agora onde termina uma e onde começa a outra.

Argumenta, ainda, que de qualquer modo, a tese de que há independência entre a elaboração de um pensamento e sua codificação não é mais aceitável. Para Radford a atenção dada à linguagem não pode ignorar a questão de seus limites epistemológicos. Mais precisamente, podemos atribuir à linguagem e à atividade discursiva a força de criar os objetos teóricos do mundo dos indivíduos? O autor sugere, então, que todo o esforço para entender a realidade conceitual e a produção de conhecimento não pode se restringir à linguagem e a atividade discursiva. Ao contrário, é necessário que sejam igualmente as práticas sociais subjacentes. Este ponto é ilustrado pela análise da relação entre conhecimento matemático e a prática social da Renascença.

O capítulo 7, denominado "As condições epistelomológico-culturais da emergência do simbolismo algébrico", tem como foco principal o simbolismo algébrico iniciado na Renascença como parte de um novo tipo de pensamento formado pelas atividades socioeconômicas que surgiram progressivamente no fim da Idade Média. O autor afirma que na sua mais curta formulação, o simbolismo algébrico emerge como uma forma semiótica de representação do conhecimento inspirado por um mundo substancialmente transformado pelo uso de artefatos e máquinas. Defende que o simbolismo algébrico é uma máquina metafórica por si só, englobada por uma nova forma geral abstrata de representação e pelo conceito tecnológico de eficiência da Renascença.

Para responder a questão das condições que tornaram possíveis a emergência do simbolismo algébrico, Radford indaga-se sobre os modos culturais de representação do conhecimento e experiência humana e procura pelas possibilidades históricas que aconteceram em formas cognitivas e sociais de significação.

Radford 16x23.indd 12 09/10/12 16:35

O capítulo 8 denominado "Cultura, conhecimento e o Self: matemática e a formação de novas sensibilidades sociais no Renascimento e Islã Medieval" traz uma discussão acerca da relação entre Matemática e cultura. Apoiado em uma perspectiva sociocultural centrada em princípios teóricos da sociologia da Matemática e nos estudos sobre as bases culturais e históricas da Matemática como Raymond Wilder, D'Ambrosio, Osvald Splenger, Vigotsky entre outros, o autor reivindica nos objetos matemáticos seu reconhecimento não apenas como entidades existentes, mas como objetos conceituais gerados no decurso da atividade humana. Sua intenção foi investigar o papel social da Matemática na criação de formas culturais novas de entender estilos modernos de subjetividade. Procura, ainda, mostrar que a Matemática é muito mais que uma forma de produção de conhecimento: é um exercício de teorização. Argumenta que se é verdade que os indivíduos criam Matemática, não é menos verdade que a Matemática afeta os indivíduos no seu modo de viver e pensar sobre eles e os outros.

No capítulo 9, intitulado "Cultura e cognição: Por uma antropologia do pensamento matemático" o autor parte de uma reflexão sobre algumas escolas de pensamento antropológico e cultural, sugere que o pensamento em geral e o pensamento matemático em geral, são formas de práxis social mediada e reflexiva na qual a organização dos processos cognitivos sensoriais do individuo estão relacionadas ao significado das coisas conforme elas se tornam objetivadas em atividade prática e teórica. Para evitar a tentação de ver a atividade prática e teórica através do prisma racionalista ocidental, Radford explica as atividades dos indivíduos e os objetivos que eles buscam em termos de seus próprios contextos culturais, "racionais". Argumenta que o entendimento de tais racionalidades, matemáticas e cientificas, é, de fato, a preocupação primária de qualquer abordagem antropológica e que esse é um modo de investigar o elo entre cultura e cognição. Analisa alguns resultados de investigações em etnomatemática e perspectivas culturais que claramente mostram diferentes modos culturais de pensamento matemático. Compara dois tipos de pensamento matemático enfatizando as dimensões epistemológicas e ontológicas que formam cada um deles. Uma vez

Radford 16x23.indd 13 09/10/12 16:35

que o discurso histórico e antropológico tem usualmente apresentado a Matemática ocidental como o pico do processo evolucionista e tem mostrado outros tipos de Matemática como versões primitivas dele, discute as raízes históricas de tais visões, apoiado em Levy-Bruhl sobre o mito do progresso. Com isso formula o conceito de pensamento como práxis cognitiva e mostra que todas as culturais estão resumidas a estruturas super-simbólicas que emprestam significado a artefatos e ações e que essas super-estruturas dinâmicas orientam as formas de comportamento e investigações matemáticas e científicas. Finaliza apontando conclusões e algumas implicações para a Educação Matemática.

No capítulo 10, denominado "As éticas de ser e conhecer: rumo a uma teoria cultural da aprendizagem", Radford delineia de forma mais abrangente sua teoria de ensino e aprendizagem de Matemática apoiada em algumas escolas antropológicas e histórico-culturais de conhecimento, intitulada *teoria de objetivação do conhecimento*. Nesta teoria o autor discute o problema de aprender como um processo social pelo qual os estudantes se tornam progressivamente familiarizados com formas culturais de reflexão. Inicialmente o autor discute algumas suposições problemáticas freqüentemente adotadas por muitas teorias contemporâneas de ensino e aprendizagem, em particular suposições relacionadas ao estudante, o conteúdo para ser aprendido e o processo de aprender. Faz uma discussão epistemológica e ontológica para fundamentar a defesa de sua teoria cultural. Os conceitos de aprendizagem matemática de sala de aula retratados nesta teoria são apresentados e em seguida são reunidas as idéias principais em que as questões educacionais que cercam as éticas de ser e saber são discutidas.

Natal, Dezembro, 2011

Radford 16x23.indd 14 09/10/12 16:35

1 Antes que as outras incógnitas fossem inventadas: investigações didáticas acerca dos métodos e problemas da álgebra italiana medieval[1]

1. Introdução

Uma das abordagens emergentes em estudos de educação matemática atuais diz respeito à construção histórica do conhecimento matemático (cf. v. gr. Glaeser, 1981; Filloy et Rojano, 1984). Esta abordagem, a da investigação epistemológica histórica, nos ajuda a:

(a) melhor compreender as dificuldades cognitivas vivenciadas por nossos alunos, bem como melhor interpretar os erros e conceitualizações incorretas que surgem quando eles aprendem conteúdos matemáticos específicos (Vergnaud, 1990, p.16);
(b) tomar decisões melhor fundamentadas no que diz respeito ao conhecimento que está sendo ensinado; em particular, tal abor-

1 Este trabalho é parte de um programa de pesquisa apoiado por uma bolsa de estudo da FCAR N. 95ER0716 (Quebec) e de Fundos de Pesquisa da Laurentian University (Ontario). Publicado em *For the Learning of Mathematics*, 15 (3), 28-38 (Fevereiro de 1997). Traduzido por Francisco de Assis Bandeira e Jesus Victoria Flores Salazar.

Radford 16x23.indd 15 09/10/12 16:35

dagem pode propiciar o surgimento de novos modos de organizar e articular este conhecimento na sala de aula[2].

Além disso, os resultados da investigação epistemológica didático-histórica também podem levar a novos caminhos de pesquisa didática e nos fornecer uma compreensão profunda acerca dos conceitos inclusos nos currículos atuais.

No que diz respeito a este último ponto, vale a pena enfatizar o papel que a pesquisa histórica pode exercer em programas de formação e formação continuada de professores. De fato, na maior parte do tempo, as concepções dos professores acerca do conteúdo matemático que eles ensinam decorrem da *formulação matemática contemporânea* do conteúdo sob consideração[3]. No entanto, a *formulação contemporânea* é o resultado de um longo processo de mudanças e transformações conceituais e não necessariamente é o melhor ponto de partida para os alunos. Entretanto, na falta de outras alternativas, a *formulação contemporânea* torna-se uma camisa de força na escolha de conteúdo a ser ensinado, em sua organização, e em sua articulação com outros conhecimentos[4].

No que diz respeito à álgebra, a *formulação contemporânea* favorece, em particular, ao 'simbolismo' da álgebra (Lefebvre, 1991/92); neste contexto, a álgebra geralmente é vista como o domínio de uma certa linguagem simbólica de modo que, desde o começo, todos os esforços na sala de aula são feitos para que os alunos tornem-se competentes nesta linguagem. Historicamente, entretanto, o 'simbolismo' (em seu sentido moderno, aquele que encontramos nos livros didáticos atuais) só se tornou

2 Para um exemplo de uma sequência de ensino para a equação de 2° grau ver o capítulo 4 deste livro.

3 Para uma visão geral acerca deste problema, ver Chevallard, 1985.

4 E. Barbin (1992, p. 576) fornece um exemplo perfeito do fenômeno ao qual nos referimos: ela comenta sobre as dificuldades vivenciadas pelos professores quando tentam ensinar o conceito do limite de uma sequência. Nos antigos programas de Matemática o conceito de limite era ensinado usando a definição formal. Os novos programas de matemática franceses incentivam a não mais usar esta definição como ponto de partida e sugerem que o conceito de limite deve ser alcançado através dos próprios problemas; E. Barbin observa como esta mudança causa muita dificuldade para os professores.

Radford 16x23.indd 16 09/10/12 16:35

a força motriz do desenvolvimento algébrico no período da Renascença (isto é, mais de 30 séculos depois de as primeiras ideias algébricas terem visto a luz do dia!)

É possível introduzir a álgebra na escola sem ter o objetivo *imediato* de dominar a moderna linguagem simbólica? Quando fazemos a professores em formação esta pergunta, e pedimos a eles que elaborem uma sequência de ensino para a introdução da álgebra excluindo o uso de símbolos (x, y, z, ...), eles ficam pasmos; para eles, a álgebra sem os símbolos simplesmente não existe. Embora não seja um assunto para alunos no ano inicial do ensino médio, seguindo o mesmo caminho feito pelos matemáticos antigos na construção de seu conhecimento, nos parece que a mudança de cenário intelectual, permitida pela análise histórica fornece aos professores novos pontos de referência e uma maior flexibilidade em suas escolhas de sala de aula.

Entretanto, voltar-se para a História da Matemática causa aos didáticos certos problemas de ordem metodológica. A natureza *didática* das perguntas que guiam a pesquisa histórica geralmente significa que os textos antigos devem ser lidos seguindo-se uma metodologia diferente do que aquela que geralmente se encontra nos trabalhos e artigos "clássicos" que tratam da História da Matemática[5]. Sem dar todo o crédito à nova invenção historiográfica da pesquisa em didática da Matemática, Thomaidis (1993, p. 71) diz:

> *... as perguntas formuladas pela didática requerem nova pesquisa histórica que penetre em profundezas notáveis e tragam à superfície assuntos que não foram até até o momento tratados historiografia da matemática.*

Recentemente tem-se visto muitos paradigmas surgir dentro de um arcabouço didático da historiografia, cada um deles sendo uma função de um determinado problema e uma concepção particular de conhecimento matemático. Não é nosso objetivo aqui discutir suas se-

5 Este ponto é discutido em detalhe em Radford, 1995a.

Radford 16x23.indd 17 09/10/12 16:35

melhanças ou suas diferenças. Ainda assim, podemos resumidamente observar que, em nosso caso, nosso programa de pesquisa didática historiográfica[6] concentra-se na investigação das raízes sociais nas quais a atividade matemática está embutida e na investigação da dimensão triádica funcional dos conceitos, problemas, e dos procedimentos da solução de problemas. Uma vez que um conceito não pode ser limitado à sua formulação verbal formal, acreditamos que sua natureza pode ser mais bem compreendida nas relações dinâmicas que unem o conceito a outros conceitos, aos problemas aos quais ele se aplica e aos procedimentos de resolução que são construídos a fim de resolver esses problemas (Radford, 1993a; 1993b).

O presente capítulo, que concentra sua atenção sobre a especificidade do "pensamento algébrico de única incógnita", é parte de um programa de pesquisa em andamento cuja meta é dar uma contribuição para a compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico. Nosso estudo deriva do fato de que, geralmente, nos programas escolares, os métodos de resolução de problemas de enunciado usados para introduzir a álgebra são baseados no uso de uma única incógnita, enquanto que a introdução das outras incógnitas acontece somente alguns anos depois[7]. Portanto, é adequado, do ponto de vista do ensino, tentar entender claramente as características do "pensamento algébrico de única incógnita"[8].

A fim de obter alguma informação didática importante relacionada a isto, um estudo da história das ideias algébricas parece ser um dos assuntos mais apropriados a se explorar. De fato, a história mostra que

6 A *Epistemologia Didática* cujas bases podem ser encontradas no capítulo 5 deste livro.

7 Que é o que acontece em Ontário e em Quebec.

8 Nos programas escolares atuais, a álgebra não é introduzida apenas através da resolução de problemas de enunciado, mas também, entre outras coisas, como uma ferramenta de generalização e modelização (cf. Bednarz, Kieran, Lee (ed.) 1996). Não obstante, é necessário ter em mente que o conceito chave no primeiro caso é o da *incógnita*, enquanto, nos outros casos, o conceito chave é o da *variável* e que esses dois conceitos são completamente diferentes (cf. Schoenfeld e Arcavi, 1988; para uma análise epistemológica acerca das diferenças entre incógnitas e variáveis, ver Radford, 1996).

Radford 16x23.indd 18 09/10/12 16:35

a invenção da segunda incógnita foi um fenômeno recente[9]. Assim, a álgebra, por muitos séculos, esteve baseada somente em uma incógnita. Uma análise didático-epistemológica exaustiva da álgebra em seus primórdios – isto é, quando ela tinha ainda somente uma incógnita – pode então nos ajudar a melhor compreender o significado profundo das primeiras ideias algébricas e então, ainda mais adiante, nos ajudar a retirar informação que pode ser usada no ensino.

Tendo em vista o anteriormente exposto, propomos aqui um estudo da álgebra italiana medieval que irá olhar para vários tipos de problemas e os métodos usados para resolvê-los. Entretanto, como dissemos antes quando mencionamos as linhas principais de nossa abordagem histórico-epistemológica, a compreensão dos elementos cognitivos subjacentes à atividade algébrica tem que levar em consideração a dimensão sócio-cultural na qual esta atividade está embutida e com a qual ela interage – uma interação que molda a própria atividade matemática[10]. A estrutura cognitiva do pensamento matemático, em geral – e do pensamento algébrico, em particular – tem que ser esmiuçada, em seu ambiente social e intelectual e não pode ser verdadeiramente compreendida exceto através da fusão de fatores cognitivos e sociais. Assim, na seção a seguir, iremos – dentro das limitações deste capítulo – fazer uma incursão no ambiente social e intelectual da álgebra italiana medieval.

2. Fatores sociais e intelectuais na álgebra italiana medieval

A corrente algébrica ocidental em questão aqui tem suas raízes na álgebra árabe e é parte de um movimento intelectual que data pelo menos do século XII. É nesse período que as traduções latinas de certos trabalhos matemáticos aparecem em al-Andalus (região da Espanha que foi

9 Historicamente, há uma lacuna de mais de 13 séculos entre a concepção da 'primeira incógnita' e a concepção da 'segunda incógnita': (cf. Bednarz *et al.*, 1995).

10 Não acredito que exista uma teoria matemática ideal – racional, atemporal, independente de posições sociais – rumo a qual sucessivas teorias matemáticas iriam, mais ou menos, seguir ao longo do tempo.

Radford 16x23.indd 19 09/10/12 16:35

dominada pelos muçulmanos de 711 até 1492). Assim, a primeira parte do *Traité Concis des règles de l'al-jabar et l'al-muqabala* (Tratado conciso das regras de restauração e redução) de al-Kwharizmi é traduzida por Robert de Chester em Segovia, em 1145 e por Gerardo de Cremona em Toledo apenas alguns anos depois. Três outros trabalhos importantes desta época incluem: the *Incipit prologus in libro algoarismi di practica arismetrice* de Joannes Hispalensis (João da Espanha) que possui um capítulo sobre a álgebra, o *Liber Mensurationum* of Abû Bekr que foi escrito mais ou menos ao mesmo tempo que o trabalho de al-Kwharizmi e traduzido para o latim por Gerardo de Cremona, e o *Liber embadorum* de Savasorda (um trabalho de inspiração árabe pertencente à tradição dos medidores de terra (surveyors), como o de Abû Bekr) traduzido do hebraico para o latim em 1116 por Platão de Tivoli.

A atividade intelectual ocidental do século XII estava ligada a uma recepção favorável das ciências nas cortes reais, que encorajava a astronomia, agricultura, medicina e a matemática (por exemplo, o oftalmologista Sulayman b. Harit al Quti deixou Toledo e foi para Sevilha em 1160, atraído pelo patrocínio dos *almohades*); ideias científicas foram então disseminadas para outros lugares além das fronteiras de al-Andalus, onde o crescente desenvolvimento econômico de cidades como Florença, Veneza, e Pisa, necessitava de pessoas capazes de realizar cálculos de modo eficiente – cálculos de juros, preços de revenda, custos de seguros para viagem (por terra ou por mar), etc.[11] Necessidades econômicas levaram ao surgimento e ao desenvolvimento de novo conhecimento comercial que resultou na criação de uma nova instituição educacional: as *Botteghe* ou *Scuole d'abaco* (Escolas de Ábaco). Essas escolas eram o passo final na formação profissional para alguém que queria trabalhar em um banco, em um emprego público, ou em algum escritório comercial (por exemplo, escritórios de fabricação de roupa ou de construção); essas escolas também eram frequentadas por aqueles que, posteriormente, queriam seguir uma carreira em pintura, escultura ou arquitetura (Franci, 1988, p. 184). Os *Maestri d'abaco* forneciam

11 Cf. Le Goff, 1956.

Radford 16x23.indd 20 09/10/12 16:35