ÁLGEBRAS DE CLIFFORD
E ESPINORES

ÁLGEBRAS DE CLIFFORD E ESPINORES

Jayme Vaz Jr.

Roldão da Rocha Jr.

Editora Livraria da Física
São Paulo – 2012

1a. Edição

Editor:	José Roberto Marinho
Assistente editorial:	Victor Pereira Marinho
Consultoria LaTeX:	Casa Editorial Maluhy & Co.
Capa:	Antonio Manuel Alves Morais

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Vaz Junior, Jayme
Álgebras de Clifford e Espinores / Jayme Vaz Jr, Roldão da Rocha Jr. – São Paulo : Editora Livraria da Física, 2012.

Bibliografia.
ISBN 978-85-7861-133-0

1. Álgebra 2. Álgebra de Clifford 3. Física matemática I. Rocha Junior, Roldão da. II. Título.

12-01560 CDD-512

Índices para catálogo sistemático:
1. Álgebra de Clifford e Espinores : Física matemática 512

ISBN 978-85-7861-133-0

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Livraria da Física Editora

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafísica.com.br

Prefácio

Em 1878 William Kingdon Clifford publicou um artigo no American Journal of Mathematics intitulado "Applications of Grassmann's extensive algebra"[Cl78]. Nesse trabalho Clifford apresentou uma nova estrutura matemática que ele denominou "álgebra geométrica", mas que hoje costuma ser mais conhecida como álgebra de Clifford. Alguns anos antes, em 1973, Clifford havia publicado um artigo no Proceedings of the London Mathematical Society denominado "Preliminary Sketch of Biquaternions", onde apresentou os primeiros rudimentos de suas ideias, que posteriormente evoluiram passando por dois manuscritos não publicados escritos em 1876 – chamados "Further note on Biquaternions"e "On the classification of Geometric Algebra" – até culminarem no artigo de 1878. Em poucas palavras, o que Clifford fez foi sintetizar duas estruturas matemáticas aparentemente dissociadas: os quaternions de Hamilton e a álgebra de extensão [Ausdehnungslehre] de Grassmann.

Podemos traçar a origem das álgebras de Clifford aos esforços em representar geometricamente um número complexo. A ideia de relacionar operações geométricas e algébricas já havia sido preconizada por Leibniz em 1679, em uma carta a Huygens, que foi posteriormente publicada em 1833. Essa ideia se manifestou para os números complexos em termos do chamado plano de Argand ou de Argand-Gauss – em homenagem aos resultados publicados com esse propósito por Argand em 1806 e Gauss em 1831. Entretanto, o primeiro a ter sucesso em representar os números complexos em um plano foi o norueguês Wessel, que em 1797 apresentou seus resultados à Real Acadêmia Dinamarquesa de Ciências e Letras através do trabalho "Om Directionens analytiske Betegning", o qual foi publicado em 1799, mas que permaneceu na obscuridade até a publicação de sua tradução em Francês em 1897.

O sucesso na representação geométrica dos números complexos levou Hamilton a buscar por uma generalização desses de forma a se relacionar com o espaço tridimensional. Após vários anos de tentativas frustradas, Hamilton alcançou o êxito em 1843 com os quaternions. Como consequência, Hamilton e seus seguidores buscaram por anos desenvolver a teoria dos quaternions e suas aplicações.

Por outro lado, em 1844 foi publicada a grande obra de Hermann Grassmann: *Die Lineale Ausdehnungslehre.* Nesse trabalho – influenciado por ideias de seu pai, Justus Grassmann – ele apresentou um sistema algébrico baseado em um produto geométrico que, de tão inovador e abstrato para época, mostrou-se de difícil compreensão. Numa tentativa de facilitar o conhecimento de sua obra, Grassmann apresentou em 1862 uma nova versão do *Ausdehnungslehre*. Mas o trabalho de Grassmann continuou obscuro para muitos, com notáveis exceções como a de Clifford.

Curiosamente, após a publicação em 1833 da carta de Leibniz a Huygens, a *Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaft* ofereceu em 1844 uma premiação para quem desenvolvesse as ideias de Leibniz. O prêmio foi concedido a Grassmann em 1846 com um trabalho onde ele desenvolveu um pouco mais o seu sistema algébrico apresentado no *Ausdehnungslehre* de 1844, mas nem essa premiação ajudou a chamar a atenção da maioria da comunidade científica para o trabalho de Grassmann. Mais sobre os trabalhos de Hamilton, Grassmann e outros importantes nomes na história da análise vetorial pode ser encontrado em [Cr94].

O grande achado de Clifford em 1878 foi essencialmente introduzir o análogo do produto de quaternions dentro da estrutura da álgebra de extensão de Grassmann, obtendo assim um sistema naturalmente adaptado para a geometria ortogonal de um espaço arbitrário. Nesse cenário, os quaternions se apresentam como um caso particular de uma álgebra de Clifford. Mas infelizmente Clifford não pode continuar seu trabalho: ele faleceu no ano seguinte, então com 33 anos.

Não demorou para as álgebras de Clifford serem reinventadas. Em 1880 Lipschitz estudou a representação de rotações por números complexos e quaternions e sua generalização para dimensões maiores, e dessa forma foi levado à definição da álgebra geométrica de Clifford e do grupo Spin.

O desenvolvimento da teoria das álgebras de Clifford teve a contribuição de vários personagens. Um dos mais importantes foi certamente Elie Cartan. Dentre outras contribuições, ele classificou as álgebras de Clifford como álgebras de matrizes e descobriu a periodicidade 8 dessas álgebras (teorema de periodicidade). Foi também Cartan quem introduziu em 1913 o conceito de espinor e em 1938 o de espinor puro.

Foi através do conceito de espinor que as álgebras de Clifford marcaram presença decisiva e definitiva na Ciência. Dirac mostrou, em 1928, que a equação fundamental da mecânica quântica relativística é escrita em termos de uma álgebra de Clifford, sendo o elétron descrito por um espinor, ou melhor, por um campo espinorial. Desde então várias outras aplicações das álgebras de Clifford foram encontradas, não apenas nas Ciências Físicas, mas também em Engenharias e Ciência da Computação. Como exemplos, pode-se citar [DL03, Ba96, Do07, Pe08].

Esse livro foi dividido em seis capítulos. No primeiro é feita uma revisão dos principais conceitos e resultados de Álgebra Linear que serão necessários para a sequência do livro. Uma maior atenção é dada aos tensores e á álgebra tensorial, pois desta podemos chegar às definições da álgebra exterior e da álgebra de Clifford.

O segundo capítulo é dedicado à apresentação das álgebras exterior e de Grassmann. Vários autores tomam essas denominações como sinônimos, o que não é o caso aqui. A álgebra exterior é entendida nesse livro como uma estrutura desprovida de métrica, enquanto a álgebra de Grassmann apresenta uma estrutura métrica. Nesse capítulo são introduzidos alguns conceitos fundamentais, tais como produto exterior, contração e isomorfismo de Hodge.

As álgebras de Clifford são definidas no terceiro capítulo. São ainda discutidas várias de suas propriedades e apresentadas três diferentes definições de álgebras de Clifford que realçam as suas mais diversas características.

No quarto capítulo são apresentados vários teoremas a respeito da estrutura das álgebras de Clifford, que são posteriormente utilizados para apresentar a classificação e representação das álgebras de Clifford em termos de álgebras de matrizes. É discutido ainda como construir explicitamente uma representação matricial.

Os grupos que estão associados com as álgebras de Clifford são os objetos de discussão do quinto capítulo. Devem ser destacados aqui os grupos Pin e Spin. São discutidas ainda as álgebras de Lie dos grupos associados e as transformações conformes.

O sexto capítulo é dedicado ao estudo dos espinores. São apresentadas três diferentes definições de espinores e discutidas suas propriedades. Os espinores dito puros são também analisados. Um estudo detalhado dos chamados espinores de Weyl, que é a base do formalismo de Penrose e Rindler [PR84], finaliza esse capítulo.

O projeto desse livro teve início com as notas de aula escritas pelo primeiro autor para dois cursos sobre álgebras de Clifford ministrados por ele em 1999 e em 2005 no Instituto de Matemática, Estatística e

Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Com a colaboração e a inserção de tópicos adicionais escritos pelo segundo autor, que também ministrou este curso em 2008 e 2010 na Universidade Federal do ABC, aquelas notas de aula se transformaram no presente livro. Aqueles que já tem familiaridade com as álgebras de Clifford e suas aplicações certamente darão conta de uma ausência importante: os operadores de Dirac. Uma discussão sobre os operadores de Dirac certamente seria benvinda, mas isso estava fora do objetivo daquelas notas de aula, que foi o de ser um material de apoio para um curso de 30 horas semestrais. Para um estudo dos operadores de Dirac, recomenda-se [GM91, Fr00, Ro07, No07].

Jayme Vaz Jr.
&
Roldão da Rocha Jr.

Sumário

À minha querida filha Maria Clara.
Jayme Vaz Jr.

Aos meus pais e minha família.
Roldão da Rocha Jr.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma revisão dos conceitos de espaço vetorial, espaço dual, produto tensorial, etc., que serão utilizados ao longo deste texto. Omitiremos a demonstração de muitos resultados uma vez que estes podem ser encontrados na literatura padrão (uma boa referência é o livro de Hoffmann & Kunze [HK79]).

1.1 Vetores e Covetores

O conceito de *espaço vetorial* é algo supostamente bem conhecido de todos. Neste texto nos interessarão os espaços vetoriais V sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ e em alguns casos sobre os quatérnions[1] $\mathbb{H}$. Restringiremos nossa discussão a espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ levando em conta que o caso so-

[1] Os quatérnions $\mathbb{H}$ consistem no conjunto dos elementos da forma $\{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ com produto associativo definido por $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ e $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

bre $\mathbb{C}$ é uma generalização facilmente efetuável. O caso envolvendo $\mathbb{H}$ requer mais atenção uma vez que a multiplicação por escalares (nesse caso elementos de $\mathbb{H}$) não é comutativa, de modo que devemos distinguir a multiplicação escalar pela *esquerda* e pela *direita*. Esses detalhes, entretanto, não vêm ao caso aqui. Portanto, nos limitaremos a considerar nesse capítulo os espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Consideraremos ainda apenas espaços vetoriais de dimensão *finita*, ou seja, $\dim(V) = n$ e utilizaremos, salvo informação ao contrário, a *convenção da soma* – por exemplo, se $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base para V então

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \mathbf{e}_i = v^i \mathbf{e}_i.$$

Um conceito já não tão discutido como o de espaço vetorial, embora igualmente importante e indissociável deste, é o de *espaço dual*. Vamos considerar uma aplicação $\alpha : V \to \mathbb{R}$. Esta aplicação é dita um *funcional linear* se for um homomorfismo de espaços vetoriais, ou seja, se satisfizer

$$\alpha(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\alpha(\mathbf{u}) + b\alpha(\mathbf{v}),$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Uma outra denominação muito comum para um funcional linear é um *covetor*. Iremos dar preferência a esta última denominação ao longo deste texto.

Se definirmos a soma de covetores através

$$(\alpha + \beta)(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v})$$

e a multiplicação por um escalar através de

$$(a\alpha)(\mathbf{v}) = a(\alpha(\mathbf{v}))$$

acabamos dotando o espaço dos covetores de uma estrutura de espaço vetorial (verifique!). O espaço vetorial dos covetores é chamado *espaço dual* do espaço V e denotado por V^*.

Consideremos o covetor α. O seu valor sobre um vetor $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ é calculado como

$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha(v^i \mathbf{e}_i) = v^i \alpha(\mathbf{e}_i) = v^i \alpha_i,$$

onde $\alpha_i = \alpha(\mathbf{e}_i)$. Esta expressão nos mostra ainda que um covetor α é completamente definido pelo seu valor α_i em uma base $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_i\}$ do espaço vetorial V.

Vamos agora considerar os covetores $\mathbf{e}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ definidos como

$$\boxed{\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}} \tag{1.1}$$

Não é difícil vermos que os covetores $\{\mathbf{e}^i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ definidos pela eq.(1.1) formam uma base para o espaço dual V^*. As coordenadas de um covetor arbitrário α nesta base são dadas pelo valor de α na base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V, ou seja, $\alpha = \alpha_i \mathbf{e}^i$ onde $\alpha_i = \alpha(\mathbf{e}_i)$. A base $\mathfrak{B}^* = \{\mathbf{e}^i\}$ é dita *base dual* da base $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_i\}$. Como consequência temos que

$$\dim(V^*) = \dim(V). \tag{1.2}$$

Transformações Gradiente e Contragradiente

A diferença entre vetores e covetores pode ser bem explorada considerando, por exemplo, o efeito de uma mudança de base. Vamos considerar uma mudança de bases $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ descrita por $\mathbf{e}'_j = B^i{}_j \mathbf{e}_i$. Um vetor $\mathbf{v}$ tem coordenadas $\{v^i\}$ na base $\mathfrak{B}$ e coordenadas $\{v'^i\}$ na base $\mathfrak{B}'$, de modo que $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^i \mathbf{e}'_i$. A relação entre estas coordenadas é portanto $v^j = B^j{}_i v'^i$.

Sejam agora $\mathfrak{B}^* = \{\mathbf{e}^i\}$ e $\mathfrak{B}'^* = \{\mathbf{e}'^i\}$ as bases duais das bases $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_i\}$ e $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_i\}$, respectivamente. Temos portanto $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}'^i(\mathbf{e}'_j) = \delta^i_j$. Como vimos acima, as coordenadas de um funcional α nas bases $\mathfrak{B}^*$ e $\mathfrak{B}'^*$ são dadas pelo valor deste funcional nas bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$, respectivamente. Logo $\alpha = \alpha_i \mathbf{e}^i = \alpha'_i \mathbf{e}'^i$ onde $\alpha_i = \alpha(\mathbf{e}_i)$ e $\alpha'_i = \alpha(\mathbf{e}'_i)$. Se $\mathbf{e}'_j = B^i{}_j \mathbf{e}_i$ então $\alpha'_j = B^i{}_j \alpha_i$ e daí $\mathbf{e}^j = B^j{}_i \mathbf{e}'^i$.

Em resumo, numa mudança de base as coordenadas de um covetor transformam-se da mesma maneira que os vetores da base, ou seja,

$$\mathbf{e}'_j = B^i{}_j \mathbf{e}_i, \qquad \alpha'_j = B^i{}_j \alpha_i,$$

enquanto as coordenadas de um vetor transformam-se da mesma maneira que os covetores da base dual, ou seja,

$$\mathbf{e}^j = B^j{}_i \mathbf{e}'^i, \qquad v^j = B^j{}_i v'^i.$$

Para as transformações inversas temos

$$\mathbf{e}_j = (B^{-1})^i{}_j \mathbf{e}_i, \qquad \alpha_j = (B^{-1})^i{}_j \alpha_i,$$

e

$$\mathbf{e}'^j = (B^{-1})^j{}_i \mathbf{e}^i, \qquad v'^j = (B^{-1})^j{}_i v^i.$$

Às vezes se denomina a transformação acima dos vetores da base de *gradiente* e a transformação das coordenadas de *contragradiente*. Segundo essa denominação então os vetores da base dual se transformam de maneira contragradiente enquanto as coordenadas dos covetores se transformam de maneira gradiente.

Exemplo 1.1. Sejam $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_i\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$, e $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_i\}$ uma outra base tal que $\mathbf{e}'_1 = (-1,-1,1)$, $\mathbf{e}'_2 = (-1,0,1)$ e $\mathbf{e}'_3 = (2,1,-1)$. Dado um vetor $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i = v'^i\mathbf{e}'_i$, a relação entre suas coordenadas $\{v^i\}$ e $\{v'^i\}$ com relação à estas bases pode ser expressa na forma

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix},$$

enquanto a relação entre os vetores das bases é

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2, \\ \mathbf{e}'_3 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3. \end{aligned}$$

Seja $\mathfrak{B}^* = \{\mathbf{e}^i\}$ é a base dual de $\mathfrak{B}$. Escrevendo os vetores $\{\mathbf{e}_i\}$ como

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

então a base dual é escrita como

$$\mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja agora $\mathfrak{B}'^* = \{\mathbf{e}'^i\}$ a base dual de $\mathfrak{B}'$. Devemos ter portanto $\mathbf{e}'^i(\mathbf{e}'_j) = \delta^i_j$, ou seja, $\mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_1) = 1$, $\mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_2) = \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_3) = 0$, etc. Para acharmos a relação entre os vetores das bases duais podemos, por exemplo, agir com $\mathbf{e}'^i$ sobre os vetores $\mathbf{e}_j$ expressos em termos de $\mathfrak{B}'$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_3) = \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_1) + \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_3) = 1, \\ \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}'^1(-\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2) = -\mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_1) + \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_2) = -1, \\ \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3) = \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_1) + \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_2) + \mathbf{e}'^1(\mathbf{e}'_3) = 1, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\mathbf{e}'^1 = \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3$. O procedimento análogo pode ser usado para expressar $\mathbf{e}^i$ em termos da base $\mathfrak{B}'^*$. Os resultados que encontramos são

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'^1 &= \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3, & \mathbf{e}^1 &= -\mathbf{e}'^1 - \mathbf{e}'^2 + 2\mathbf{e}'^3, \\ \mathbf{e}'^2 &= \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3, & \mathbf{e}^2 &= -\mathbf{e}'^1 + \mathbf{e}'^3, \\ \mathbf{e}'^3 &= \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3, & \mathbf{e}^3 &= \mathbf{e}'^1 + \mathbf{e}'^2 - \mathbf{e}'^3. \end{aligned}$$

Seja agora o funcional linear α tal que

$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3,$$

onde $\{\alpha_i\}$ são as componentes de α na base $\mathfrak{B}^*$. Se escrevemos as componentes de $\mathbf{v}$ em termos de uma matriz-linha, então as componente do funcional linear α podem ser escritas em termos da matriz-coluna

$$[\alpha]_{\mathfrak{B}^*} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Com isso

$$\alpha(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3.$$

Se α'_i são as componentes de α na base $\mathfrak{B}'^*$, ou seja, $\alpha = \alpha_i \mathbf{e}^i = \alpha'_i \mathbf{e}'^i$, encontramos a seguinte relação entre as componentes:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Com isso vemos que, ao multiplicar uma matriz pela direita por um vetor-coluna, estamos relacionando as coordenadas de um vetor em uma base A em termos das coordenadas em uma base B, enquanto ao multiplicar essa mesma matriz pela esquerda por um vetor-linha, estamos relacionando as coordenadas de um covetor na base B em termos das coordenadas na base A.

Exemplo 1.2. Seja $\mathcal{F}$ o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A integral

$$L(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \mathrm{d}\, x$$

define um funcional linear L sobre $\mathcal{F}$. Vamos agora considerar o subconjunto $\mathcal{P}_2$ de $\mathcal{F}$ formado pelas funções polinomiais P de grau menor ou igual a 2, ou seja, $P(x) = a + bx + cx^2$. Uma base para este espaço é portanto $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$, e denotaremos

$$\mathbf{e}_1 = 1, \qquad \mathbf{e}_2 = x, \qquad \mathbf{e}_3 = x^2.$$

Vamos definir os seguintes funcionais lineares sobre $\mathcal{P}_2$:

$$L^1(P) = \int_0^1 p(x) \mathrm{d}\, x, \qquad L^2(P) = \int_0^2 p(x) \mathrm{d}\, x, \qquad L^3(P) = \int_0^3 p(x) \mathrm{d}\, x.$$

Temos explicitamente

$$L^1(P) = a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} c, \qquad L^2(P) = 2a + 2b + \frac{8}{3} c, \qquad L^3(P) = 3a + \frac{9}{2} b + 9c.$$

Se $\{\mathbf{e}^i\}$ é a base dual de $\{\mathbf{e}_i\}$ então da equação acima podemos concluir que

$$L^1 = \mathbf{e}^1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}^2 + \frac{1}{3}\mathbf{e}^3, \qquad L^2 = 2\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2 + \frac{8}{3}\mathbf{e}^3, \qquad L^3 = 3\mathbf{e}^1 + \frac{9}{2}\mathbf{e}^2 + 9\mathbf{e}^3.$$

Seja $\{L_i\}$ a base da qual $\{L^i\}$ é a base dual, ou seja, $L^i(L_j) = \delta^i_j$, Como $L^i = \mathbf{e}^j L^i(\mathbf{e}_j)$ e $\mathbf{e}_j = L^i(\mathbf{e}_j)L_j$, e da expressão acima temos diretamente $\{L^i(\mathbf{e}_j)\}$, segue de imediato a expressão de $\{\mathbf{e}_i\}$ em termos de $\{L_i\}$,

$$1 = \mathbf{e}_1 = L_1 + 2L_2 + 3L_3, \quad x = \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}L_1 + 2L_2 + \frac{9}{2}L_3, \quad x^2 = \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3}L_1 + \frac{8}{3}L_2 + 9L_3.$$

A relação inversa pode ser obtida com as manipulações usuais e o resultado é

$$L_1 = 3 - 5x + \frac{3}{2}x^2, \qquad L_2 = -\frac{3}{2} + 4x - \frac{3}{2}x^2, \qquad L_3 = \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2}x^2.$$

Esta é portanto a base de $\mathcal{P}_2$ da qual a base $\{L^i\}$ é a base dual. Uma vez que $L_i = \mathbf{e}^j(L_i)\mathbf{e}_j$ e $\mathbf{e}^j = \mathbf{e}^j(L_i)L^i$, segue da expressão acima a relação para $\{\mathbf{e}^i\}$ em termos de $\{L^i\}$, ou seja,

$$\mathbf{e}^1 = 3L^1 - \frac{3}{2}L^2 + \frac{1}{3}L^3, \qquad \mathbf{e}^2 = -5L^1 + 4L^2 - L^3, \qquad \mathbf{e}^3 = \frac{3}{2}L^1 - \frac{3}{2}L^2 + \frac{1}{2}L^3.$$

Finalmente, um funcional arbitrário L,

$$L(P) = \int_{x_0}^{x_1} p(x)\mathrm{d}\,x,$$

pode ser escrito, por exemplo, na forma

$$L = \lambda_1\mathbf{e}^1 + \lambda_2\mathbf{e}^2 + \lambda_3\mathbf{e}^3 = l_1L^1 + l_2L^2 + l_3L^3$$

onde

$$\lambda_1 = (x_1 - x_0), \qquad \lambda_2 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{x_1^3 - x_0^3}{3},$$

enquanto as coordenadas $\{l_i\}$ são dadas por

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3/2 & 1/3 \\ -5 & 4 & -1 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

O Bidual

Como V^* é um espaço vetorial é natural nos perguntarmos se podemos definir também um espaço dual do espaço V^*. Isto é possível e para tal definimos os funcionais lineares $\xi_\mathbf{v}$ como

$$\xi_\mathbf{v}(\alpha) = \alpha(\mathbf{v}). \tag{1.3}$$