José Maria Filardo Bassalo
Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Elementos de Física Matemática

Volume III

Equações integrais e
Integrais de trajetória não relativísticas

Editora Livraria da Física — Casa Editorial Maluhy & Co.
São Paulo — 2012

Copyright © 2012 Editora Livraria da Física
Copyright © 2012 Casa Editorial Maluhy & Co.

Texto atualizado conforme o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa em vigor no Brasil a partir de 2009.

Projeto gráfico e diagramação Casa Editorial Maluhy & Co.
Preparação de figuras Mika Mitsui
Capa Eduardo Bertolini

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bassalo, José Maria Filardo
Elementos de física matemática : volume III : equações integrais e integrais de trajetória não relativísticas / José Maria Filardo Bassalo, Mauro Sérgio Dorsa Cattani. – São Paulo : Editora Livraria da Física, 2012.

Bibliografia
ISBN 978-85-7861-162-0
ISBN 978-85-61516-12-3

1. Equações integrais 2. Equações integrais de tragetória não relativística 3. Física matemática I. Cattani, Mauro Sérgio Dorsa. II. Título.

12-07368 CDD-530.15

Índices para catálogo sistemático:
1. Física matemática 530.15

1ª edição — 2012

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Todos os direitos reservados à

Casa Editorial Maluhy & Co.
Tel. +55 (11) 3733 8956
www.maluhy.com.br

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 (11) 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafísica.com.br

Os Autores (Bassalo e Cattani) dedicam este livro, respectivamente, a:

CÉLIA, JÔ, GISA, LUCAS, VÍTOR

ÁDRIA, SAULO, ANNA-BEATRIZ e MATHEUS

e

MARIA LUIZA, MARIA BEATRIZ, MARTA e OLÍVIA

PREFÁCIO

Este livro dá continuidade aos Volumes 1 e 2 do estudo da aplicação da Matemática à Física, nos quais os autores trataram da solução das ***Equações Diferenciais Ordinárias*** (EDO). No caso de coeficientes constantes, no Volume 1, usamos os métodos usuais de solução: Método Geral (Operadores Diferenciais e Séries de Fröbenius) e Método das Transformadas (Laplace e Fourier). Nas EDO de coeficientes variáveis, lançamos mão de algumas Funções Especiais (Bessel, Hermite, Hipergeométricas, Laguerre e Legendre). Por sua vez, o Volume 2 é composto de duas partes. Na **Parte I** são resolvidas algumas das ***Equações em Derivadas Parciais*** (EDP) de uso frequente em livros textos de Física: D´Alembert, Fourier, Laplace, Poisson e Schrödinger. Na solução dessas equações usamos, basicamente, as técnicas da Separação de Variáveis e da Função de Green. A **Parte II** trata do ***Cálculo das Variações***. Depois de apresentarmos um pequeno histórico de como surgiu esse Cálculo, estudamos a ***Equação de Euler-Lagrange*** em três situações: a) diversas variáveis dependentes; b) diversas variáveis independentes; c) diversas variáveis dependentes e independentes. Depois tratamos dos ***Multiplicadores de Lagrange***, para o estudo dos problemas variacionais com vínculos. O Volume 2 é concluído com o ***Método Variacional de Rayleigh-Ritz***.

Este Volume 3 também é composto de duas partes. Na **Parte I**, estudamos as ***Equações Integrais*** (EI). Iniciamos com uma Introdução Histórica seguida de uma apresentação dos diversos tipos de EI. Segue, então, as soluções da ***Equação de Volterra*** e da ***Equação de Fredholm***. A **Parte I** é finalizada com um Capítulo destinado a estudar as aplicações das EI a alguns tópicos da Física. A **Parte II** é dedicada ao estudo das ***Integrais de Trajetórias Não Relativísticas***. Depois de uma Introdução Histórica, apresentamos a definição de ***Propagador de Feynman*** (PF) e de ***Integrais de Trajetória*** seguido de seus respectivos cálculos. A **Parte II** é encerrada com o cálculo do PF de oito Equações de Schrödinger Não Lineares.

Um dos autores (MSDC) agradece à Maria Luiza Mattos Cattani pela revisão gramatical e ortografia do texto.

Por fim, os autores agradecem a Roberto Maluhy Jr. pela preparação da edição deste livro, a José Roberto Marinho, da *Editora Livraria da Física*, pela sua divulgação e distribuição, e a Virgínia de Paiva, Bibliotecária do *Instituto de Física da Universidade São Paulo* (IF/USP), pelo auxílio na pesquisa das referências contidas no texto.

Belém e São Paulo, abril de 2012

José Maria Filardo Bassalo
Diretor Executivo da *Fundação Minerva* e
Membro da *Academia Paraense de Ciências*

Mauro Sérgio Dorsa Cattani
Professor Titular do IF/USP e
Membro das *Academias Paulista e Paraense de Ciências*

Sumário

Parte I

Equações Integrais

1

Introdução histórica

Uma *equação integral* é uma equação na qual uma função desconhecida aparece sob o sinal de integral e o problema resume-se, então, em determinar essa função, resolvendo-se essa integral. O termo *equação integral* é devido ao matemático francês Paul Du Bois Reymond (1831-1889), que o apresentou no *Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik*, em 1888.

Antes de ter o *status* e uma metodologia própria para tratá-la, o físico, astrônomo e matemático francês Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749-1827), em 1782, considerou a seguinte equação integral:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} g(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

equação essa que passou a ser conhecida como *transformada de Laplace* da função $g(t)$. Contudo, foi o matemático francês Simeon Dénis Poisson (1781-1840) quem obteve uma expressão para $g(t)$ a partir da equação (1.1), em 1823, a saber:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} e^{xt} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

para $a \gg 1$.

Outro exemplo histórico de equação integral foi apresentado pelo matemático francês Jean Baptiste Joseph, Barão Fourier (1768-1830) em seu célebre livro *Théorie Analytique de La Chaleur*, editado em 1822. Nesse livro, encontramos as expressões:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \cos(xt)\, u(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

e sua inversa:

$$u(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos(xt)\, f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

expressões essas que passaram a ser conhecidas como *transformada (antitransformada) de Fourier*, respectivamente.

A formulação e a solução de uma equação integral é devida ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), em 1823 e 1826, ao considerar o seguinte problema mecânico: Uma partícula desliza ao longo de uma curva suave e contida num plano vertical. Embora a velocidade da partícula seja independente da forma da curva, o mesmo não acontece com seu tempo de queda. O problema então colocado por Abel era: conhecido o tempo T como função de x, encontrar a velocidade. Assim, usando a lei de queda livre, Abel encontrou que o tempo $T(x)$ é dado por:

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{x-\xi}}, \qquad (g = \text{aceleração da gravidade}). \tag{1.5}$$

A partir dessa expressão, Abel obteve a seguinte solução para a velocidade $v(\xi)$:

$$v(\xi) = \int_0^\xi \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\xi - x}}. \tag{1.6}$$

Em virtude desse sucesso, Abel resolveu então um problema mais geral, qual seja, a partir da equação:

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(x)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^\lambda} \quad ; \quad 0 < \lambda < 1, \tag{1.7}$$

obteve:

$$u(\xi) = \frac{\operatorname{sen}(\pi\lambda)}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \int_a^\xi \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{(\xi - x)^{1-\lambda}}. \tag{1.8}$$

Por seu lado, o matemático francês Joseph Liouville (1809-1882), em 1832, resolveu alguns casos especiais de equações integrais. Em 1837, mostrou como resolver certas equações diferenciais por intermédio da solução de equações integrais. Por exemplo, Liouville mostrou que a equação diferencial

$$y'' + [\rho^2 - \sigma(x)]\, y = 0, \tag{1.9}$$

com as condições iniciais:

$$y(a) = 1 \quad ; \quad y'(a) = 0, \tag{1.10}$$

tem a seguinte solução:

$$y(x) = \cos[\rho(x-a)] + \frac{1}{\rho} \int_a^x \sigma(\xi) \operatorname{sen}[\rho(x-\xi)]\, y(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.11}$$

Para obter essa solução Liouville usou um método de sucessivas substituições, mais tarde aperfeiçoado pelo matemático alemão Carl Gottfried Neumann (1832-1925), em 1877.

As equações integrais obtidas por Abel e Liouville são, portanto, de dois tipos. A de Abel é da forma:

$$f(x) = \int_a^x K(x,\xi)\, u(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{1.12}$$

e a de Liouville da forma:

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,\xi)\, u(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{1.13}$$

Em ambas as equações $f(x)$ e $K(x,\xi)$ são funções conhecidas, e $u(\xi)$ é a função a conhecer.

O interesse pelas equações integrais começou a aumentar na medida em que, na metade do século passado, começaram a ser resolvidos problemas de condições de contorno associados a algumas equações em derivadas parciais. Por exemplo, o matemático e filósofo francês Jules Henri Poincaré (1854-1912), em 1894 e 1896, transformou a equação diferencial parcial:

$$\Delta u + \lambda u = f(x,y), \tag{1.14}$$

na seguinte equação integral:

$$u(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\, u(y)\, \mathrm{d}y = f(x). \tag{1.15}$$

Contudo, o começo do estudo da teoria geral da equações integrais surgiu com os trabalhos do matemático italiano Vito Volterra (1860-1940), realizados em 1896 e 1897.

Nesses trabalhos, Volterra desenvolveu um método para resolver a equação do tipo (1.13) (com o limite superior da integral $x = b$) com a condição de que $K(x,\xi) = 0$ para $\xi > x$. Volterra, também, resolveu a equação (1.12) reduzindo-a a uma equação do tipo (1.13). Ainda em 1896, Volterra observou que uma equação integral do tipo estudada por Abel (equação (1.12) com $x = b$ no limite superior da integral) é o caso limite de um sistema de n equações algébricas, quando $n \to \infty$. Por outro lado, o matemático sueco Erik Ivan Fredholm (1866-1927), em 1900, ao resolver o famoso *problema de Dirichlet* [encontrar a solução da *equação de Laplace* ($\nabla V = 0$) numa região cuja fronteira é conhecida a função incógnita V], aproveitou a mesma ideia utilizada nessa solução para resolver a equação integral estudada por Liouville [equação (1.13)], sem aquela condição imposta à $K(x,\xi)$ por Volterra. Como Volterra, Fredholm também utilizou a analogia entre equações integrais e equações algébricas lineares (e os limites constantes para a integral), porém, ele não usou o processo de limite para o número infinito dessas equações algébricas como fizera Volterra e sim, usou a *Regra de Cramer* para esse sistema de equações.

As equações integrais de Volterra e Fredholm foram também objeto de estudo por parte do matemático alemão David Hilbert (1862-1943) em uma série de seis *artigos* escritos entre 1904 e 1910 e publicados na *Nachrichten Von Der Königlishen Gessellschaft Der Wissenschalften zu Göttingen*. Nesses trabalhos, Hilbert introduziu a terminologia usada até hoje, ou seja, referiu-se a essas equações como sendo de *1ª espécie* [equação (1.12)] e de *2ª espécie* [equação (1.13)], bem como denominou de *Kernel* a função $K(x,\xi)$. Além disso, Hilbert deu importantes contribuições para o estudo dessas equações. Por exemplo, em seu primeiro trabalho sobre esse tema, apresentou um rigoroso processo de passagem ao limite do sistema de equações algébricas lineares. Além do mais, Hilbert estabeleceu uma teoria especial geral para Kernéis simétricos e formulou o famoso problema de Sturm-Liouville em termos de uma equação integral, isto é, mostrou que as autofunções de autovalores desse problema, traduzido pela equação diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\rho(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]+f(x)u+\lambda u=0, \tag{1.16}$$

sujeita as condições de fronteira:

$$u(a)=0; \tag{1.17a}$$

$$u(b)=0, \tag{1.17b}$$

são as autofunções e autovalores da equação integral:

$$\phi(x)-\lambda\int_a^b G(x,\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi=0, \tag{1.18}$$

onde $G(x,\xi)$ é a função de Green da equação (1.16). É oportuno observar que Hilbert aplicou seus estudos sobre as equações integrais a uma variedade de problemas em Física e em Geometria. Além do mais, depois dos trabalhos de Hilbert, nos quais mostrou como converter equações diferenciais em equações integrais através da *função de Green*, houve um aumento considerável do uso desse método na solução de problemas físicos.

O trabalho de Hilbert sobre as equações integrais foi ampliado pela contribuição de outros matemáticos. Com efeito, o alemão Erhard Schmidt (1876-1959) em 1907, estudou as equações integrais com Kérneis não simétricos. Por seu lado, o húngaro Friedrich Riesz (1880-1956), ainda em 1907, generalizou as ideias de Hilbert ao considerar a função $f(x)$ na equação integral de 2ª espécie [equação (1.13)] como uma função qualquer, ao invés de ser apenas contínua, conforme Hilbert a considerou, juntamente com a função Kernel $K(x,\xi)$. Por exemplo, Riesz considerou que os coeficientes de Fourier da função $f(x)$

poderiam ser determinados em relação a um conjunto de funções integráveis segundo *Lebesgue*. Esse trabalho de Riesz foi completado com o do matemático alemão Ernst Fischer (1875-1959), no qual introduziu, também em 1907, o conceito de *convergência na média*, ou seja: um conjunto de funções $\{f_n\}$ definido no intervalo (a, b) é dito *convergir na média* se:

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1.19}$$

e $\{f_n\}$ é dito *convergir na média* para f se:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f - f_n(x)]^2\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1.20}$$

sendo as integrais tomadas no sentido de Lesbegue, isto é, do quadrado integrável L^2. Em 1910, Riesz tentou generalizar a teoria das equações integrais introduzindo os conceitos de *convergência forte e fraca*, sendo as integrais consideradas como de Lesbegue de potência p integrável L^P.

Como as equações integrais consideradas por Volterra e Fredholm e estudadas por Hilbert, Schmidt e Riesz são lineares, a evolução natural, portanto, seria no sentido de estudar as não lineares. Um primeiro trabalho nesse sentido foi apresentado pelo matemático alemão Hermann Weyl (1885-1955), em 1908. Depois, outros trabalhos foram feitos e hoje esse estudo constituiu-se num novo ramo da Matemática chamado de *análise funcional*. Essa introdução histórica que acabamos de apresentar teve como base o livro de Kline (1972).

2

TIPOS DE EQUAÇÕES INTEGRAIS

Chama-se *equação integral* a uma equação que contém a função incógnita sob o sinal de integral, tal como:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, \mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

onde f e K são funções dadas e u é a função a determinar. A equação (2.1) tem a particularidade de que ela é uma equação *linear*, pois a função incógnita u aparece linearmente na mesma. Contudo, existem problemas que conduzem a necessidade de se considerar equações integrais não lineares como, por exemplo, a do tipo:

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)\, g[u(t),t]\, \mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

em que K e g são funções dadas. Nesse livro, no entanto, iremos considerar apenas equações integrais lineares.

A equação (2.1) é denominada de *equação de Fredholm de segunda espécie*, enquanto que a equação:

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, \mathrm{d}t, \tag{2.3}$$

é conhecida como *equação de Fredholm de primeira espécie*. Se o Kernel $K(x,t)$ verificar a condição:

$$K(x,t) = 0, \qquad \forall\, t > x, \tag{2.4}$$

então as equações (2.1) e (2.3) transformam-se em:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, \mathrm{d}t \tag{2.5}$$

e

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\,u(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.6}$$

conhecidas, respectivamente, como *equação de Volterra de segunda e primeira espécies*.

Se nas equações (2.1), (2.3), (2.5) ou (2.6) a função f é nula, a equação resultante é *homogênea*. Em caso contrário, ela é chamada de *não homogênea*.