

# A GEOMETRIA DE

*René Descartes*

*2a. edição*



**Tradução, Introdução e Comentários de:**

*Bruna F. Barbosa*

*Clediane M. da Silva*

*Filipe B. Brant*

*Raquel A. Sapunaru*

# **A Geometria de RENÉ DESCARTES**

*2a. edição*



Editora Livraria da Física

São Paulo – 2017

Copyright © 2017 Editora Livraria da Física

2a. edição

Editor: JOSÉ ROBERTO MARINHO

Projeto gráfico e diagramação: EDI CARLOS PEREIRA DE SOUSA

Capa: EDI CARLOS PEREIRA DE SOUSA

Impressão: RENOVAGRAF

*Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.*

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

---

A Geometria de René Descartes / tradução, introdução e comentários de: Bruna F. Barbosa...[et al.]. – 2. ed. – São Paulo : Editora Livraria da Física, 2017.

Bibliografia.

ISBN 978-85-7861-509-3

1. Descartes, René, 1596-1650 2. Geometria 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Matemática - Filosofia I. Barbosa, Bruna F. II. Silva, Clediane M. da. III. Brant, Filipe B.. IV. Sapunaru, Raquel A..

17-07987

CDD-510.1

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Filosofia 510.1

ISBN 978-85-7861-509-3

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil

*Printed in Brazil*



Editora Livraria da Física

Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413

[www.livrariadafisica.com.br](http://www.livrariadafisica.com.br)

**A  
GEOMETRIA  
DE  
RENÉ DESCARTES**

**Tradução, Introdução e Comentários**

de

Bruna Fernandes Barbosa, Clediane Marciana da Silva, Filipe  
Bruzanga Brant e Raquel Anna Sapunaru

**Segunda Edição Brasileira**

DIAMANTINA

MMXVII

# AGRADECIMENTOS

*À UFVJM e ao CNPq pela bolsa do discente Felipe Bruzinga Brant. Ao meu grupo de discentes, Bruna, Clediane e Filipe que me fazem lembrar a cada encontro a razão pela qual estou no ICT e ao Professor Carlos Alberto Gomes dos Santos meu eterno orientador. (Raquel Anna Sapunaru)*

*Um enorme obrigada a Jesus e a minha família, pois sem eles eu não estaria aqui. Gostaria de agradecer também a minha querida orientadora e ex-professora Raquel Anna Sapunaru pela oportunidade. E por último aos meus companheiros de projeto Clediane e Filipe por tornarem tudo tão leve e prazeroso. Amo a todos. (Bruna Fernandes Barbosa)*

*Agradeço primeiramente a Deus por ter me possibilitado estar aqui hoje. À professora Raquel Sapunaru por ter me dado a oportunidade de participar desse projeto. E aos meus familiares e amigos que me incentivaram a participar deste trabalho. (Clediane Marciana Silva)*

*Agradeço imensamente a minha orientadora e professora Raquel Sapunaru, pelas diversas orientações na área Matemática e Filosofia, as quais foram essenciais para o êxito desta obra. Além dela agradeço a Deus, meus familiares e companheiros de projeto, pela motivação diária. (Filipe Bruzinga Brant)*

*Nós todos agradecemos ao professor Douglas F. G. Santiago pela ajuda incondicional a este projeto.*

# SUMÁRIO

## INTRODUÇÃO À SEGUNDA EDIÇÃO

Apresentação .....	1
--------------------	---

## INTRODUÇÃO À PRIMEIRA EDIÇÃO

Por que traduzir <i>A Geometria</i> de Descartes? .....	3
Qual a Influência de <i>A Geometria</i> de Descartes para o Método e à Matemática de <i>Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural</i> de Newton? .....	5
O que Descartes propõe, de forma resumida, nos três livros de <i>A Geometria</i> ? .....	14

## LIVRO I

### PROBLEMAS QUE PODEMOS CONSTRUIR EMPREGANDO SOMENTE CÍRCULOS E LINHAS RETAS

Como o cálculo da Aritmética se relaciona com as operações da Geometria? .....	17
A Multiplicação, A Divisão e A Extração da raiz quadrada? .....	18
Como podemos usar símbolos na Geometria? .....	18
Como encontrar as equações que servem para resolver os problemas? .....	20
Quais são os problemas planos e como eles se resolvem? .....	21
Exemplo tirado de Pappus .....	24
Resposta à questão de Pappus .....	28
Como devemos trabalhar os termos para encontrar a equação nesse exemplo? .....	29
Como descobrimos que esse problema é plano quando ele não é proposto para mais de cinco linhas? .....	31

## LIVRO II

### SOBRE A NATUREZA DAS LINHAS CURVAS

Quais são as linhas curvas que podemos admitir na Geometria? .....	33
O modo de distinguir todas as linhas curvas de certos gêneros e de conhecer a relação que há entre todos os seus pontos com aqueles de linhas retas .....	36
Continuação da explicação da questão de Pappus posta no livro anterior .....	40
Solução dessa questão quando ela só é proposta para três ou quatro linhas .....	40
Demonstração de tudo o que acabou de ser explicado	45
Quais são os lugares planos e sólidos e o modo de encontrá-los? .....	47
Qual é a primeira e a mais simples de todas as linhas curvas que serve para a questão dos antigos quando ela é proposta em cinco linhas? .....	48
Quais são as linhas curvas que descrevemos para encontrar vários de seus pontos que podem ser admitidos na Geometria? .....	50
Quais são também aquelas que descrevemos com uma corda e que podem ser admitidas? .....	51
Para encontrar todas as propriedades das linhas curvas é suficiente saber a relação que têm todos os seus pontos com aqueles de linhas retas e a maneira de desenhar as outras linhas que as cortam em todos esses pontos fazendo ângulos retos .....	53
Modo geral para encontrar linhas retas que cortam as linhas curvas dadas ou suas tangentes a ângulos retos .....	54
Exemplo dessa operação em uma elipse e em uma parábola do segundo gênero .....	54
Outro exemplo em uma oval do segundo gênero ...	55
Exemplo da construção desse problema na conchóide	62
Explicação de quatro novos gêneros de ovais que servem à óptica .....	62
As propriedades dessas ovais no tocante às reflexões e às refrações .....	65
Demonstração das propriedades dessas ovais no tocante às reflexões e às refrações .....	67
Como podemos fazer uma lente tanto convexa quanto côncava, em uma das suas superfícies, quando quisermos que se reagrupem em um ponto dado, todos os raios que vêm de um outro ponto dado? .....	70



Como podemos fazer uma lente que tenha o mesmo efeito que a precedente e que a convexidade de uma de suas superfícies tenha a proporção dada com aquela da outra? .....	72
Como podemos aplicar o que foi dito aqui às linhas curvas descritas sobre uma superfície plana àquelas que se descrevem em um espaço que tem três dimensões? .....	73

### LIVRO III

#### SOBRE A CONSTRUÇÃO DE PROBLEMAS SÓLIDOS, OU MAIS QUE SÓLIDOS

De quais linhas curvas podemos nos servir para a construção de cada problema? .....	75
Exemplo tocante à invenção de muitos meios proporcionais .....	75
Sobre a natureza das equações .....	76
Quantas raízes é possível ter em cada equação? .....	76
Quais são as falsas raízes? .....	77
Como podemos diminuir o número de dimensões de uma equação quando conhecemos algumas de suas raízes? .....	77
Como podemos examinar se alguma quantidade dada é o valor de uma raiz? .....	77
Quantas raízes verdadeiras podem existir em cada equação? .....	78
Como fazemos para que as falsas raízes de uma equação tornem-se verdadeiras e as verdadeiras tornem-se falsas? .....	78
Como podemos aumentar ou diminuir as raízes de uma equação sem as conhecer? .....	78
Assim aumentando as verdadeiras raízes, diminuímos as falsas e ao contrário .....	79
Como podemos eliminar o segundo termo de uma equação? .....	80
Como podemos fazer com que todas as raízes de uma equação tornem-se verdadeiras sem que as verdadeiras tornem-se falsas? .....	81
Como fazemos para que todas os lugares de uma equação sejam preenchidos? .....	82
Como podemos multiplicar ou dividir as raízes sem as conhecer? .....	82

Como reduzimos os números rompidos de uma equação a inteiros? .....	82
Como tornamos a quantidade conhecida de um dos termos de uma equação igual a qualquer outra que quisermos? .....	83
Como fazemos a quantidade conhecida de um dos termos de uma equação igual a qualquer outra que quisermos? .....	84
A redução das equações cúbicas quando o problema é plano .....	84
O modo de dividir uma equação por um binômio que contém sua raiz .....	85
Quais problemas são sólidos quando a equação é cúbica? .....	86
A redução das equações que têm quatro dimensões, quando o problema é plano; e quais são aqueles que são sólidos? .....	86
Exemplo da utilidade dessas reduções .....	90
Regra geral para reduzir as equações que passem à biquadrática .....	92
Modo geral para construir todos os problemas sólidos redutíveis a uma equação de três ou quatro dimensões .....	92
A invenção de dois meios proporcionais .....	95
O modo de dividir um ângulo em três .....	96
Todos os problemas sólidos podem ser reduzidos a essas duas construções .....	97
O modo de expressar o valor de todas as raízes das equações cúbicas e, em seguida, de todas aquelas que não ultrapassem as biquadráticas .....	99
Por que os problemas sólidos não podem ser construídos sem as secções cônicas, nem aqueles que são mais compostos sem algumas outras linhas mais compostas? .....	100
Modo geral para construir todos os problemas reduzidos a uma equação que não tem mais de seis dimensões .....	101
A invenção de quatro meios proporcionais .....	107
REFERÊNCIAS .....	109
BIBLIOGRAFIA .....	112

# INTRODUÇÃO À SEGUNDA EDIÇÃO

A primeira edição da primeira tradução brasileira completa, com comentários, de *A Geometria* de Descartes foi fruto do meu trabalho de pós-doutoramento. Este trabalho, devido aos curtos prazos impostos, ficou devendo em alguns aspectos. Assim, o que a princípio parecia ser um problema, na verdade tornou-se uma grande oportunidade. Isso porque o que faltou na primeira edição no que diz respeito à acurácia da tradução, à modernização da Matemática e à complementação de algumas notas, tornou-se um projeto de pesquisa do curso de Bacharelado de Ciência e Tecnologia (BC&T), do Instituto de Ciência e Tecnologia (ICT), da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) *Campus JK*, em Diamantina, Minas Gerais. O projeto intitulado *O Nascimento da Geometria Analítica na Obra A Geometria de Descartes*, agregou três novos integrantes, discentes do BC&T que, junto comigo, revisaram a tradução, atualizaram a Matemática e inseriram novas notas. Com isso, eles passaram a ser coautores do livro e, mais do que tudo, tiveram a experiência de lidar com uma edição, programaram em LaTeX e se apaixonaram por Descartes.

Para mim, Bruna Fernandes Barbosa, *A Geometria* é uma das mais célebres obras Matemáticas da modernidade. Nela, Descartes rompe com o passado, ao introduzir uma nova simbologia Matemática que viria fazer parte da física no estudo da óptica geométrica. Além disso, *A Geometria* como apêndice do *Discurso do Método*, foi caracterizada como a única obra de cunho puramente matemático de Descartes e pode ser retratada como emblemática para o desenvolvimento da geometria analítica. Eu espero que você, leitor, venha entender os problemas com os quais os matemáticos se deparavam naquele período e como, através de suas técnicas, alcançavam seus resultados. No mais, que você possa aproveitar bem essa leitura de modo a aprofundar-se no cenário matemático-filosófico do século XVII, compreendendo como a contribuição de Descartes foi essencial para a Matemática.

Eu, Clediane Marciana da Silva, iniciei minha participação no projeto *O Nascimento da Geometria Analítica na Obra A*

*Apresentação*

*Geometria de Descartes* por influência positiva de um amigo, o qual ficou sabendo da seleção e me falou. Como gosto muito de Matemática e tenho certa facilidade, decidi me inscrever e, para minha alegria e surpresa, fui selecionada entre exímios discentes, mesmo estando apenas no segundo período do BC&T. Participar desse projeto foi muito importante para mim enquanto acadêmica. É algo que me agrega muito valor e conhecimento, além de ser excelente para meu currículo. Isso porque, poucos têm a oportunidade de trabalhar com pessoas tão competentes, ver que os resultados são positivos e que futuramente vai poder colher os frutos desse esforço. Para mim, saber como as coisas surgiram é fascinante e a possibilidade de estudar e entender como naquela época, apenas com ferramentas mecânicas, um estudioso foi capaz de contribuir tão grandiosamente para os estudos que realizamos hoje, foi o que mais despertou o meu interesse por este projeto. Descartes foi e ainda é muito importante para a Matemática, sobretudo para a constituição da geometria analítica, pois ele foi competente para associar figuras geométricas às expressões algébricas.

O desenvolvimento desta edição iniciou-se devido a um e-mail enviado pelo ICT. Ao recebe-lo e lê-lo, rapidamente eu, Filipe, me interessei pelo assunto, pois se tratava de dois conteúdos com as quais tenho certa afinidade: a Matemática e a filosofia. Além disso, ao saber que o projeto era coordenado pela minha ex-professora Raquel, meu interesse pelo projeto cresceu ainda mais. O projeto que visa uma reestruturação do livro *A Geometria* de René Descartes tem se fundamentado como um dos principais motivos da minha satisfação acadêmica, seja pela grandiosidade de uma coautoria em um livro ou pelo enorme conhecimento adquirido em todo o percurso da produção desta edição. Assim, é de grande relevância a publicação deste livro ao lado das minhas companheiras de projeto que, juntamente comigo, valorizaram a importância do trabalho em equipe.

Por fim, é inevitável falar que este projeto representa um grande orgulho pessoal e acadêmico em minha vida. Ao preparar esta edição, tentamos mostrar a importância de Descartes para a geometria através de suas magníficas deduções aritméticas. Dessa forma, esperamos que ao lê-la, vocês entendam a riqueza e a beleza da Matemática idealizada por Descartes em uma linguagem moderna e por vezes com um pequeno grau de complexidade.

# INTRODUÇÃO À PRIMEIRA EDIÇÃO

Durante o meu doutorado, concluído em abril de 2010, estudei alguns aspectos do pensamento de Leibniz em contraposição ao de Newton. Frequentemente, o nome de Descartes aparecia, ora argumentando em favor de Leibniz, ora de Newton. Um dia, em 2005, fui avisada de que havia uma edição bilingue, francês-inglês, de *A Geometria* de Descartes em um sebo, por um preço irresistível. Assim que pude, a comprei, pois, afinal, minha tese estava intimamente ligada aos aspectos matemáticos das obras de Leibniz e Newton e *A Geometria* de Descartes poderia ser de grande utilidade. Logo que comecei a estudá-la, percebi que seu conteúdo não seria muito útil para a discussão que estava propondo em minha tese. Assim, abandonei temporariamente a leitura de *A Geometria*, tendo em vista retomá-la em uma ocasião mais propícia.

Entre 2012 e 2013, já trabalhando como docente no Instituto de Ciência e Tecnologia (ICT), da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), *Campus Diamantina*, Minas Gerais, coordenei um projeto intitulado "Determinação das origens histórico-filosóficas dos Cálculos Diferencial e Integral de Leibniz", que produziu o artigo *Os conceitos de infinitesimal e diferencial nas regras de derivação de Leibniz*.<sup>1</sup> Grosso modo, esse artigo aponta e questiona a falta de explicação de Leibniz sobre o método que utilizou para chegar às regras de derivação. Vale ressaltar que Leibniz foi um filósofo excessivamente cuidadoso com seus escritos, principalmente os escritos matemáticos, por acreditar piamente que havia uma razão para todas as coisas e que tudo poderia e deveria ser demonstrado. A axiomatização não fazia parte do repertório de métodos de Leibniz. Portanto, o fato de ter suprimido a explicação de como chegou a procedimentos e regras tão precisas, nos levou a uma investigação que deu origem ao artigo que mencionei acima. Nesse ínterim, surgiu novamente o nome de Descartes e dessa vez junto com *A Geometria*, pois concluímos que além de Leibniz conhecê-la muito bem, essa obra continha

*Por que traduzir A Geometria de Descartes?*

---

<sup>1</sup>Artigo publicado na revista REnCiMa, v.4, n.2, p.1-15, 201 (<http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/822>). (NT)

elementos que poderiam tê-lo levado a ignorar passos importantes, saltando da Geometria Euclidiana convencional diretamente para a Geometria Analítica e para a Álgebra. Esta, nos pareceu uma explicação razoável para a falta de demonstração das regras de derivação e para chegarmos até elas, tivemos que mergulhar a fundo em *A Geometria* de Descartes.

Foi desse modo que percebi a grandeza do que Descartes havia escrito em *A Geometria*. Optei por não ler a tradução em inglês, mas somente consultá-la quando fosse inevitável. Todavia, ler *A Geometria* no francês do século XVII foi um desafio extra. Descartes, em *O Discurso do Método*, falou repetidamente sobre o “claro e distinto”, mas em *A Geometria* esta clareza e distinção deixou um pouco a desejar porque ele exagerou nos detalhes de algumas explicações e omitiu os de outras, tornando a obra “escura e baralhada”.<sup>2</sup> Desse modo, o problema da língua e o estilo mal aparado somados às dificuldades naturais do conteúdo tornaram a leitura do original de *A Geometria* um pouco desconfortável. Isso é uma pena, pensei na ocasião, já que em paralelo ao projeto a que me referi anteriormente, também coordenava um outro intitulado *Euclides para os Vales* no qual estudávamos a melhor forma de levar às escolas públicas da região urbana de Diamantina um modo diferente de ensinar a Geometria Euclidiana. Para tal, utilizamos uma ótima tradução brasileira de *Os Elementos* de Euclides e foi justamente essa tradução que nos permitiu trabalhar com um grupo grande de discentes do ICT. Daí, surgiu a ideia de traduzir *A Geometria* de Descartes, mas ainda havia um problema: Como me dedicar a uma tarefa dessa monta, sem sacrificar minhas atividades docentes?

---

<sup>2</sup>Gostaria de deixar bem claro que o “escuro e baralhado” que mencionei, não diminui em nada o valor de *A Geometria* como uma obra fundamental para o desenvolvimento da Matemática do século XVII. Dito isso, minha posição é diametralmente oposta à do matemático Simmons, autor de livros didáticos de sucesso, direcionados a discentes de nível superior. Em seu livro *Cálculo com Geometria Analítica* Simmons comenta: “Sua [de Descartes] *A Geometria* foi pouco lida então e menos ainda hoje e bem merecidamente, pois toda obra é uma traição grotesca ao que ele anteriormente chamava de ‘transparência e clareza’ insuperáveis que são próprias de uma Matemática corretamente ordenada.” (SIMMONS, 2008, p.692). Ora, *A Geometria* foi pouco lida, não porque “é uma traição grotesca” aos princípios de clareza da Matemática, mas porque poucos teriam a capacidade de compreender a mudança de pensamento proposta por Descartes naquela época. Até então, havia praticamente só a Matemática dos antigos e foi o método descrito em *A Geometria* que abriu as portas para os matemáticos do século XVIII e XIX e foram eles que desenvolveram aquilo que o próprio Simmons ensina em seus livros. Logo, a obra é relevante.(NT)

Felizmente, ao final de 2014, obtive permissão da UFVJM para me afastar por um ano e fazer um pós-doutorado no Instituto de Física (IF) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), que se interessou pelo projeto de tradução dessa obra. Lá, fui recebida pelo professor Vitorvani Soares, do Departamento de Física-Matemática e finalmente consegui realizá-la.

Após o ápice da Geometria dos antigos, o estudo das linhas curvas sofreu um grande processo de desaceleração, com alguns poucos trabalhos isolados, como, por exemplo, os de Oresme no século XIV. Isso durou até o século XVII com o surgimento dos trabalhos de Viète, Fermat e Descartes. Porém, somente através dos escritos de Descartes é que os métodos foram introduzidos na Geometria. Graças a esse escritor, foi possível construir um sistema de classificação de curvas planas que se ordenavam como graus de uma equação, ou, como Descartes preferiu enunciar, como gêneros. Desse modo, Descartes conseguiu estabelecer uma notável conexão que aliava a Geometria à Álgebra, possibilitando o estudo das linhas retas e curvas associadas a um sistema de coordenadas. Tal conexão chama-se Geometria Analítica<sup>3</sup> e foi apresentada pela primeira vez em *A Geometria* em 1637. Segundo o matemático Monna, "*A Geometria Analítica, como a conhecemos, foi desenvolvida gradualmente sob a influência do livro de Descartes.*" (MONNA, 1977, p.14) e no mesmo século XVII, graças à obra *A Geometria* os pro-

*Qual a Influência de A Geometria de Descartes para o Método e à Matemática de Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural de Newton?*

---

<sup>3</sup> Acredito ser importante deixar claro que a Geometria Analítica de Descartes é bem diferente da atual. Mesmo assim, apesar de algumas críticas, como a do matemático Simmons, podemos dizer que sua definição permanece inalterada. Por conseguinte, a Geometria Analítica continua sendo a parte da Matemática que determina as relações que há entre a Álgebra e a Geometria: por exemplo, uma linha reta, uma linha curva ou um lugar geométrico quaisquer podem ter suas propriedades discutidas e entendidas por meio de métodos algébricos. No Livro I, Descartes nos diz: "*Sejam [...], etc., linhas dadas em posição [...]*", ou seja, coordenadas, ou eixos, se preferir; e no Livro II, ele continua: "*Se quero encontrar o gênero que essa linha curva pertence, escolho uma linha reta, como  $\overline{AB}$ , para relacionar todos os pontos dela e em  $\overline{AB}$ , escolho um ponto, como  $A$ , para começar o cálculo.*" Ora, não resta dúvida que Descartes está usando o ponto  $A$  como a origem da abscissa, do eixo  $x$ . Logo, aqui se encontra o embrião da Geometria Analítica (NT). Na Matemática atual, a Geometria Analítica tem outro semblante, aparentemente mais complexo e sobre isso, Avritzer pondera que "*Para Descartes, as verdades claras e distintas, no caso da Geometria, são os segmentos que ele, como os gregos anteriormente, identifica com os números. Na consideração de um certo problema, diz ele, devemos escrever a equação que liga os segmentos conhecidos aos desconhecidos e a partir delas resolver os problemas. Ele observa que a Geometria é 'difícil' e a Álgebra 'fácil' e que seu método, nesse caso, se limitava a resolver os problemas difíceis que os gregos haviam proposto pela Álgebra, mais clara e fácil de manipular.*" (AVRITER, 2009, p.12).

gressos matemáticos possibilitaram o desenvolvimento dos Cálculos Diferencial e Integral e da Física como um todo. Sobre esse desenvolvimento, Hawking afirma que *"Isaac Newton não poderia nunca ter formulado suas leis sem a Geometria Analítica de René Descartes e nem a sua própria invenção do cálculo."* (HAWKING, 2007, p.13). Creio, que o mesmo se aplica a Leibniz.

Dito isso, começo analisando o método de Descartes, conforme descrito em *O Discurso do Método* de 1637. Na primeira edição desse livro, *A Geometria* aparece como um apêndice e, será fácil para o leitor concluir que ela serviu de teste para os métodos de Descartes, pelo menos para um deles. A seguir, elaboro um breve resumo dos quatro métodos, a saber: a) o primeiro é o da "evidência", pois não se deve admitir nenhum conhecimento como verdadeiro, caso não se tenha evidências indiscutíveis para tal. Em outras palavras, nenhum conhecimento deve ser julgado precipitadamente, nem preconceitos de qualquer ordem devem ser alimentados e só se deve admitir como verdadeiro o conhecimento "claro e distinto", isto é, aquele do qual não se pode duvidar. Assim, antes de tudo, temos que duvidar para chegarmos à verdade; b) o segundo é o da "análise", que nos ensina a dividir um problema em tantas partes quantas forem possíveis, até que suas dificuldades tornem-se facilidades; c) o terceiro é o da "síntese", que traça um caminho contrário ao da "análise", partindo do problema mais simples e mais fácil, para o mais composto e mais difícil, por ordem. No fim, deve-se examinar cuidadosamente as conclusões do composto para impedir descuidos que levem ao erro e; d) o último é o da "enumeração", ou método do "desmembramento". Esse método fundamenta-se em desmembrar e enumerar exaustiva e ordenadamente um problema composto, impossibilitando a supressão de qualquer parte dele. Através dele, garantimos que nada será esquecido ou perdido no processo de solução do problema. (DESCARTES, 1950-1956, p.16). Observe que a proposta de Descartes é simples: devemos fazer uma e só uma coisa de cada vez, para alcançar a solução verdadeira de qualquer problema e é o próprio Descartes que justifica suas regras:

*"Estas longas cadeias de razões, tão simples e fáceis das quais os geômetras têm costume de se servir para chegar as suas mais difíceis demonstrações, levaram-me a imaginar que todas as coisas que podem cair sob o conhecimento dos homens*



*encadeiam-se do mesmo modo e que, com a única condição de nos abstermos de aceitar por verdadeira alguma que não o seja e de observarmos sempre a ordem necessária para deduzi-las umas das outras, não pode existir nenhuma tão afastada que não possamos enfim chegar a ela e nem tão escondida que não a descubramos.”(DESCARTES, 2007, p.17).*

No entanto, alguns pensadores, historiadores da ciência e filósofos, discutem e divergem sobre a utilização dos quatro métodos na *A Geometria*. Em linhas gerais, na Matemática, o conhecimento deve girar em torno da síntese e/ou da análise, pois fora assim com os antigos e é assim até hoje. Na Matemática, a análise está ligada à utilização dos métodos algébricos, enquanto a síntese aos métodos geométricos e essa diferença aparece logo no início do Livro I de *A Geometria*. Um dos objetivos de Descartes quanto a essa obra era introduzir a Álgebra na Geometria dos antigos para facilitar a resolução de alguns problemas. Por conseguinte, tanto no entendimento matemático, quanto no metodológico, análise e síntese seriam coisas opostas para a maioria dos comentadores. Isso pode ser corroborado por Fernandes como se segue:

*“A análise foi usualmente tomada, através dos séculos dezesete e dezoito, como o caminho metodológico condutor dos fatos às teorias; a síntese, das teorias aos fatos. A análise era pensada a proceder do desconhecido para o conhecido, ou do relativo para o absoluto; a síntese, do conhecido para o desconhecido, ou da certeza absoluta (pelo menos no sentido dado por Descartes) para a certeza relativa. A análise era essencialmente uma subtração, ou abstração; a síntese, uma adição ou construção. A análise reduziu complexos, como experiências complexas, a seus simples constituintes; a síntese reconstruía estes complexos a partir destes [constituintes] simples. A análise era um regresso ao simples, que é, o mais simples para entender, intuitivamente, ainda que o mais difícil para identificar; a síntese um progresso do simples para o complexo.”(FERNANDES, 1985, p.39).*

Todavia, em se tratando de método, nem todos os pensadores concordam com o tipo de relação que se estabelece ao aplicá-los à Matemática, ou a outra ciência.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Descartes não rejeita o uso dos sentidos, mas sua meta é a verdade.

Koyré em seu artigo, "As Origens da Ciência Moderna", argumenta que o lugar que a metodologia ocupa no desenvolvimento de uma ciência não é no início, mas sim em seu meio. O pensador defende que as ciências nunca tiveram seus inícios em um *tractatus de methodo* nem nunca progrediram às custas da aplicação de um método de forma abstrata. (KOYRÉ, 1968, p.58). Descartes, ao escrever *O Discurso do Método* e ao adotá-lo em *A Geometria* procurou mostrar exatamente o contrário do que afirma Koyré:

*"Nas Matemáticas, a progressão do mais simples e do melhor conhecido ao complexo era chamada "síntese" pelos gregos e a progressão do mais complexo ao mais simples, "análise". Mas, num certo sentido, não há diferença fundamental entre esses processos, ou métodos, tendo em vista que tanto as premissas como as conclusões são indiscutíveis, necessárias e até evidentes por si mesmas."* (KOYRÉ, 1991, p.61).

A seu turno, tal citação confronta-se com a posição de Gaukroger sobre o que fez Descartes em *A Geometria*. Para Gaukroger, está claro que Descartes só utilizou o método da análise, pois não há indícios de elemento algum constituinte da síntese e também, diferentemente dos antigos, não partiu de axioma algum. De acordo com Gaukroger:

*"Descartes apresenta algumas provas sintéticas, mas é a análise que nos leva adiante; e depois de algumas preliminares o leitor é lançado num dos problemas matemáticos mais difíceis que a Antiguidade nos legou: o problema do lugar geométrico de quatro linhas ou mais, enunciado por Pappus, que Descartes passa sem maiores delongas, a tentar resolver analiticamente."* (GAUKROGER, 2002, p.169).

Como Gaukroger, penso que Descartes na obra *A Ge-*

---

Assim, ele deixa claro que para se chegar a um fim, deve-se dar um passo de cada vez e procurar um método capaz de questionar qualquer certeza, ou seja, é preciso duvidar de tudo. Por outro lado, considerava as verdades da Matemática importantes e logo passa a usá-las na aplicação do seu método, pois tudo que se torna objeto do conhecimento verdadeiro, pode vir a ser objeto do conhecimento matemático. Newton, sem dúvida fez uso dessa Filosofia para escrever *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. (NT)

*ometria* estava focado somente na solução de problemas, pois para ele, essa era a verdadeira missão da Matemática. A axiomática dos antigos era coisa do passado: não poderia ter vez nessa nova fase da Matemática que ele estava prestes a inaugurar. Assim sendo, em *A Geometria* onde Descartes revela sua Geometria Analítica, em se tratando de método, ele não faz uso da síntese em momento algum, mas somente da análise.

A partir desse ponto, discuto a passagem da Geometria à Álgebra, ou melhor, a junção da Geometria com a Álgebra, Geometria Analítica. Essa nova forma de trabalhar com os problemas matemáticos permitiu que fosse feita uma revolução científica, seguida de um período de evolução, particularmente da Física, como nunca se viu anteriormente na História. Em primeiro lugar, para compreender *A Geometria* de Descartes, é preciso sempre ter em mente que ela foi escrita para demonstrar os métodos do raciocínio correto discutidos em *O Discurso do Método*. Assim, como dito anteriormente, não foi por acaso que *A Geometria* surgiu pela primeira vez como um apêndice de *O Discurso do Método*. Descartes, enquanto leitor de Viète, trabalhou a relação da Geometria com a Álgebra através dos lugares geométricos e enquanto leitor de Fermat, trabalhou essa mesma relação através de soluções geométricas para equações algébricas. Tal abrangência de métodos e pensamentos torna *A Geometria* uma obra especial e importante para o desenvolvimento das ciências, principalmente, para a Física de Newton. A razão disso encontra-se na Álgebra que Descartes propôs, unindo Geometria e Aritmética em uma teoria de equações, suplantando tanto os escritos dos antigos que consideravam essas duas coisas imiscíveis, quanto aos escritos dos seus contemporâneos.

Além disso, para Descartes, sua Álgebra era uma técnica de solução de problemas que utilizava seu método de análise de forma sistemática. Segundo Gaukroger "*Descartes acreditava que a demonstração algébrica revelava de um modo completamente transparente os passos implicados na resolução de problemas. Em sua nova Álgebra, com efeito, Descartes julgava serem do mais alto valor a transparência das operações e o caráter abstrato.*" (GAUKROGER, 2002, p.224-225). Cabe destacar que essa Álgebra contida na obra *A Geometria* de Descartes foi extremamente útil para a composição de *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, obra extraordinária de Newton, que não só mudou a face da Física, ao torná-la o que ela é hoje, mas também a forma de entender o mundo.

A chamada "Revolução Científica" iniciada por Galileu, só chegou ao fim com a Física de Newton. A Física de Galileu, apesar de bem matematizada, não conseguiu extinguir por completo as ideias medievais que ainda reinavam em sua época. Foi Newton quem abriu as portas para uma Matemática totalmente aplicada e integrada ao mundo físico, visto que antes e depois de *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, enquanto estudioso e professor de Matemática de Cambridge, fez uso de *A Geometria* de Descartes para ir além dela. No que tange somente às suas descobertas Matemáticas, destaco: o método das fluxões que deu origem aos Cálculos de Fluxões e Fluêntes e o binômio que leva seu nome, o "Binômio de Newton".<sup>5</sup> (MOL, 2013, p.105). No entanto, são nos três livros que compõem *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* é que *A Geometria* de Descartes se mostra mais influente.

Inicialmente, para o historiador Cohen, o objetivo de Newton, ao dividir *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* em três volumes distintos, foi mostrar que os princípios matemáticos ou abstratos dos dois primeiros livros poderiam ser aplicados ao mundo físico representado no terceiro. (COHEN apud COHEN; WESTFALL, 2002, p.165). Fernandes continua argumentando que o conhecimento dos fenômenos naturais foi concebido por muitos filósofos como passível de expressão pela Matemática de cunho prático e relações entre leis. (FERNANDES, 1985, p.36). Portanto, uma das consequências mais relevantes da nova Matemática de Descartes foi o modo pelo qual ela influenciou o raciocínio matemático de Newton, adequando-o à análise de problemas físicos e à construção e alteração de modelos, constructos, sistemas imaginários, não limitando-o à pura interpretação de dados empíricos. Essa interpretação vai de encontro a uma afirmação de Fernandes, pois "Se a irreversível ordem do fenômeno [natural] era ser constituído racionalmente, ou inteligivelmente, então ele tinha que ser expresso matematicamente." (FERNANDES, 1985, p.37). A nova Geometria Analítica de Descartes permitiu uma matematização à altura da ambição de Newton, mas essa nova Matemática não veio sozinha: junto com ela vieram também os métodos de *O Discurso do Método*.

Para Newton, os métodos de análise e síntese eram considerados os métodos básicos da investigação científica e a prova disso encontra-se em *Os Princípios Matemáticos da*

---

<sup>5</sup>O binômio de Newton: é a potência da forma  $(a + b)^n$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ .(NT)