



Análise de Estruturas

Formulações Clássicas



LF

EDITORIAL
2016







Análise de Estruturas

Formulações Clássicas



Humberto Lima Soriano





Copyright © 2016 - Editora Livraria da Física

1ª Edição

Direção Editorial: José Roberto Marinho

Projeto gráfico e diagramação: H. L. Soriano

Capa: Antonio Manuel Alves Morais

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Soriano, Humberto Lima
Análise de estruturas: formulações clássicas /
H.L. Soriano. -- São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

Bibliografia.

ISBN 978-85-7861-392-1

1. Análise estrutural (Engenharia)
2. Engenharia de estruturas I. Título.

16-01136

CDD-624.17

Índices para catálogo sistemático:

1. Engenharia de estruturas 624.17

ISBN: **978-85-7861-392-1**

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.



Impresso no Brasil

Printed in Brazil

Editora Livraria da Física

Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413

www.livrariadafisica.com.br

Siga-nos nas redes sociais: www.facebook.com/fisica.lfeditorial





*Dedico esta obra à minha esposa Carminda e aos
meus filhos Humberto e Luciana.*



*A família é o esteio do homem e a
célula mater da sociedade.*







Retrato hipotético realizado por Rita Greer

“The power of any string is in the same proportion with the tension thereof”

A força de uma mola é proporcional à sua distensão.

Robert Hooke (1635-1703).

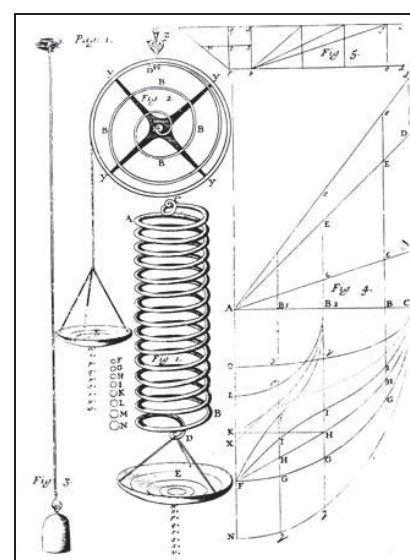
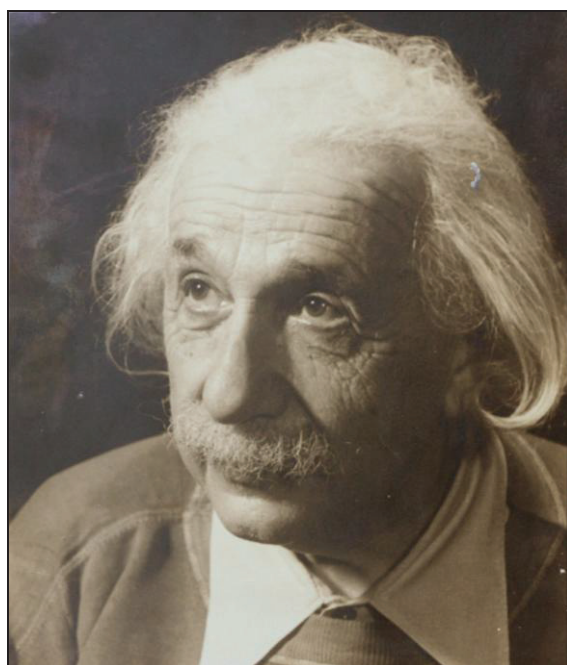


Ilustração de experimento realizado por Robert Hooke, em 1678.





*“Wer die Freude am Begreifen kennen gelernt hat,
der hat einen nie versagenden Freund fürs Leben gewonnen.
Das Denken ist für den Menschen, was das Fliegen für die Vögel.
Nimm Dir von diesen nicht das Huhn zum Vordild, wenn eine Lerche
aus Dir werden kann.
Für die Studenten von Anchieta College, Brasilien”.*¹

*Quem conheceu a alegria da compreensão, ganhou um amigo leal
para toda a vida.
O pensar é para as pessoas, o que o voar é para os pássaros.
Não tome como exemplo a galinha, quando podes ser uma cotovia.
Para os alunos do Colégio Anchieta.*

Albert Einstein (1879-1955), 24/6/1951.

¹ Foto e texto cedidos pelo Colégio Anchieta – Rede Jesuíta de Ensino
Porto Alegre, Brasil.





Apresentação

A engenharia de estruturas é de uso muito amplo e envolve projetos de diversos dispositivos modernos de dimensões gigantescas a peças muito pequenas. Isto implica que ela não é só necessária em projetos de pontes e edifícios, mas também em projetos de aviões, de navios, de veículos, de máquinas em geral e até em estudos de órgãos de animais e de plantas vivas, designada como biomecânica.

O estudo da análise de estruturas deve ser iniciado pela determinação de esforços e de deslocamentos de estruturas constituídas por barras, por serem mais simples de serem analisadas. Mas esta aprendizagem inicial servirá de base para todas as teorias mais avançadas que conseguem examinar o comportamento das estruturas constituídas por barras, cascas e sólidos, feitas com diversos materiais, tais como aço, concreto, madeira, plásticos, solo e rocha.

O ensino de análise de estruturas deve ser iniciado por meio de uma sistemática simples, mas muito bem conceituada. Esta introdução da análise de estruturas é fundamental para facilitar o estudo das diversas generalizações dos diferentes tipos de análises necessários ao desenvolvimento avançado das estruturas. Assim, a aprendizagem dos dois métodos clássicos de análise, o método das forças e o dos deslocamentos, é fundamental para todos os engenheiros que labutam em projetos de estruturas.

O professor Humberto Lima Soriano é um escritor de livros de teorias envolvendo diversas técnicas avançadas: elementos finitos, análise matricial de estruturas, análise dinâmica, etc. Assim, ele é mais do que capacitado a escrever livros sobre análise de estruturas com formulação clássica, de forma a permitir que o futuro engenheiro possa lidar com as teorias mais avançadas, estudando inicialmente as teorias básicas com um rigor matemático e mecânico.

O livro trata da análise de estruturas constituídas por barras na sua maior amplitude de estruturas planas e espaciais como treliças, grelhas e quadros. O primeiro método é o das forças também designado por método da flexibilidade e o segundo método é o dos deslocamentos ou método da rigidez. O método das forças é a base para o estudo avançado dos modelos com elementos de contorno. Por outro lado, os principais programas de análise, sejam eles de estruturas civis, mecânicas, aeronáuticas e navais, se baseiam no método dos deslocamentos, que generalizado se transforma no método dos elementos finitos.



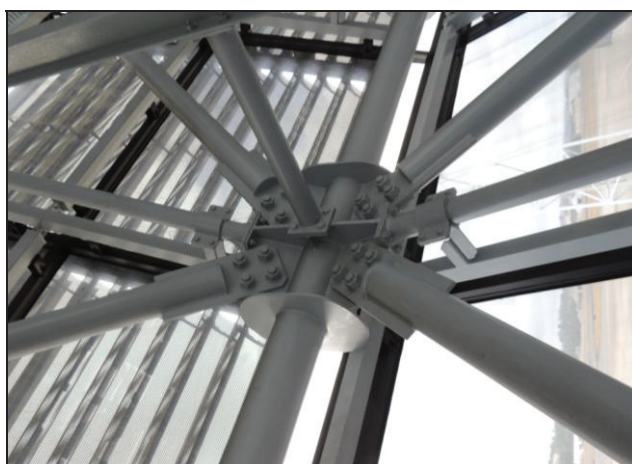


Análise de Estruturas – Formulações Clássicas – **H. L. Soriano**

O livro é destinado ao curso de graduação de várias engenharias sejam elas civis, mecânicas, navais e aeronáuticas. O grande mérito do livro é que os conceitos são apresentados com o maior rigor possível.

B. Ernani Diaz
Dr.-Ing., Dr.-Eng.
Professor Titular, Professor Emérito da UFRJ
Membro da Academia Nacional de Engenharia





Prefácio

O projeto de uma nova estrutura e/ou modificação de estrutura existente requer análises que prevejam o comportamento estrutural para efetuar o devido dimensionamento. Por essa razão, uma importante área da engenharia é a *Análise de Estruturas*, dividida em várias disciplinas.

Este livro é uma continuidade da obra *Estática das Estruturas* de minha autoria, que pode ser utilizado de forma independente, porque se inicia com um resumo dos necessários fundamentos. Sugere-se que seja adotado após a disciplina de *Estática das Estruturas* ou *Isostática* e após a de *Resistência dos Materiais* ou *Mecânica dos Sólidos*, em disciplina que costuma ser chamada de *Mecânica das Estruturas*, *Teoria das Estruturas* ou *Hiperestática*. Isto porque neste livro estão detalhados os tópicos de análise das estruturas constituídas de barras e estaticamente indeterminadas.

A presente abordagem é clássica, própria a ser utilizada com calculadora de bolso, e tem as vantagens de fundamentar os métodos numéricos de análise, de promover a compreensão do comportamento das estruturas constituídas de barras e de facilitar a interpretação de resultados de análises automáticas dessas estruturas. Substitui de forma ampla e didática, com melhor apresentação gráfica e detalhamento, o livro *Análise de Estruturas – Método das Forças e Método dos Deslocamentos*, em que sou o primeiro coautor. Antecede à formulação matricial de análise de estruturas que tratei em livro à parte e que é matematicamente mais concisa e geral, mas sem significado físico evidente e voltada para uso com computador.

Procurei escrever com rigor conceitual e matemático, mas de forma simples e com destaque da visão mecânica e das contribuições pioneiras nos diversos temas. Isto para facilitar e estimular o leitor na aquisição de amplo embasamento para estudos mais avançados de análise. Cada capítulo se inicia com uma justificativa de sua inclusão, juntamente com descrição geral das correspondentes seções. Segue com o desenvolvimento destas, cujos conceitos, teoremas, métodos e/ou processos estão ilustrados em exemplos conceituais e numéricos (de resultados com cinco algarismos significativos, para melhor evidenciar precisão em verificações de equilíbrio). Finaliza com a proposição de exercícios para resolução (em grande parte baseados em prática da engenharia) e de questões para reflexão, na ordem dos temas expostos e em dificuldade crescente. Ao todo são 110 exemplos detalhadamente explicados, 97 exercícios propostos com diversas subdivisões e 146 proposições para reflexão. Como em toda área de conhecimento que utiliza modelos matemáticos, a resolução de problemas e a reflexão sobre os correspondentes temas é a



melhor forma de testar, consolidar aprendizagem (de como se faz e por que se faz) e conquistar satisfação pelo saber adquirido. E, como na vida, aprende-se com os erros ao encontrar o caminho para os acertos.

Espero que este livro alcance o objetivo de ser útil e agradeço antecipadamente aos leitores que compartilharem comigo suas impressões no endereço eletrônico sorianohls@gmail.com.

Sou grato aos colegas que apresentaram sugestões durante o desenvolvimento dos manuscritos e aos alunos que, com suas perguntas, exerceram influência na forma de exposição do presente conteúdo. Além disso, cumpre-me registrar sinceros agradecimentos à *Faculdade de Engenharia da UERJ*, pela oportunidade de desenvolver os manuscritos na qualidade de professor titular, à *Editora Livraria da Física*, pela confiança nesses manuscritos ao transformá-los em livro, e à minha família, pelo continuado incentivo e apoio afetivo durante todo esse percurso.

Humberto Lima Soriano



Outros livros do autor

X



Sumário

Prefácio

Capítulo 1 – Fundamentos

Qual é o objetivo e como este livro está estruturado?	1
1.1 – Revisão de conceitos básicos	2
1.1.1 – Definições de tensão e de deformação	3
1.1.2 – Classificação dos modelos de estruturas	5
1.1.3 – Classificação das análises de estruturas	6
1.1.4 – Esforços seccionais em barras	7
1.1.5 – Equações de equilíbrio da Estática	12
1.2 – Estabilidade estática	13
1.3 – Diagrama tensão-deformação	20
1.4 – Energia de deformação e trabalho das forças externas	24
1.5 – Exercícios propostos	28
1.6 – Questões para reflexão	33

Capítulo 2 – Teoremas e métodos de energia

Qual é a importância dos teoremas de energia em Mecânica das Estruturas e como esses teoremas estão apresentados?	35
2.1 – Teorema dos Deslocamentos Virtuais	36
2.1.1 – Partículas e corpos rígidos	36
2.1.2 – Estruturas reticuladas	40
2.2 – Teorema das Forças Virtuais	49
2.3 – Teoremas de Castigliano, de Crotti-Engesser e de Menabrea	52
2.4 – Teoremas de reciprocidade	59
2.5 – Princípio da Mínima Energia Potencial Total	62
2.6 – Método de Rayleigh-Ritz	66
2.7 – Inter-relacionamento entre princípios, teoremas e métodos	70
2.8 – Exercícios propostos	72
2.9 – Questões para reflexão	74





Capítulo 3 – Modelos reduzidos de estruturas reticuladas simétricas

O que são modelos reduzidos de estruturas simétricas e qual é a vantagem desses modelos?	75
3.1 – Decomposição de sistema de forças	76
3.2 – Sistema de forças simétricas	78
3.3 – Sistema de forças antissimétricas	83
3.4 – Exercícios propostos	91
3.5 – Questões para reflexão	94

Capítulo 4 – Método da força unitária

O que é e qual é a importância do Método da Força Unitária?	95
4.1 – Estruturas sob forças externas	96
4.2 – Uso de tabela	102
4.3 – Estruturas sob ação de temperatura	121
4.4 – Estruturas com deslocamentos prescritos não nulos	128
4.5 – Estruturas com apoios elásticos discretos	130
4.6 – Exercícios propostos	135
4.7 – Questões para reflexão	142

Capítulo 5 – Método das forças

O que é e por que é importante o Método das Forças?	143
5.1 – Sistema principal	144
5.2 – Formulação clássica	147
5.3 – Estruturas sob ação de temperatura	160
5.4 – Estruturas com deslocamentos prescritos não nulos	165
5.5 – Estruturas com apoios elásticos discretos	173
5.6 – Redundantes simétricas e redundantes antissimétricas	184
5.7 – Esforços de engastamento de barra	195
5.8 – Coeficientes de rigidez de barra	203
5.8.1 – Barra biengastada	203
5.8.2 – Barra engastada-rotulada	205
5.8.3 – Barra com engaste e engaste deslizante	207
5.9 – Vigas hiperestáticas protendidas	207
5.10 – Exercícios propostos	215
5.11 – Questões para reflexão	224

Capítulo 6 – Método dos deslocamentos

O que é e por que utilizar o Método dos Deslocamentos?	227
6.1 – Sistema principal	228
6.2 – Formulação clássica	233
6.3 – Estruturas sob ação de temperatura	269
6.4 – Estruturas com deslocamentos prescritos não nulos	281
6.5 – Estruturas com apoios elásticos discretos	285
6.6 – Vigas hiperestáticas protendidas	294
6.7 – Consideração da deformação do esforço normal	298
6.8 – Comparação entre o Método dos Deslocamentos e o Método das Forças	309
6.9 – Exercícios propostos	310
6.10 – Questões para reflexão	317





Capítulo 7 – Processo de Cross

O que é e qual é a importância do Processo de Cross?	319
7.1 – Estruturas indeslocáveis	320
7.2 – Estruturas deslocáveis	340
7.3 – Exercícios propostos	344
7.4 – Questões para reflexão	347

Capítulo 8 – Forças móveis

Por que e como considerar forças móveis?	349
8.1 – Conceitos fundamentais	350
8.2 – Linha de influência de deslocamento	352
8.3 – Linhas elásticas de barra	355
8.4 – Linha de influência de esforço	359
8.4.1 – Processo de Müller-Breslau	359
8.4.2 – Processo baseado em modelos isostáticos	379
8.5 – Escolha do processo e do método em determinação de linha de influência	388
8.6 – Exercícios propostos	389
8.7 – Questões para reflexão	390

Apêndice – Propriedades de superfícies planas

Que propriedades de superfícies planas são importantes em análise de estruturas reticuladas?	391
A.1 – Momento estático	392
A.2 – Momento de inércia	394
A.3 – Momento polar de inércia	397
A.4 – Produto de inércia	398
A.5 – Exercícios propostos	404
A.6 – Questões para reflexão	406

Notações	407
Glossário	409
Bibliografia	415
Índice de temas	417
Índice de nomes históricos	421





Prédios da orla de Piedade, Jaboatão dos Guararapes, PE.





1

Fundamentos

Qual é o objetivo e como este livro está estruturado?

Este livro apresenta formulações clássicas de análise de estruturas constituídas de barras, que antecedem a formulação matricial de estruturas, própria para uso em programação automática. Trata-se dos teoremas de energia e dos principais métodos de análise de estruturas em que as equações da Estática não sejam suficientes, denominadas *estruturas hiperestáticas*. E para que essas teorias estejam autocontidas neste livro, este capítulo apresenta um resumo de seus fundamentos.

Em descrição deste capítulo, a próxima seção expõe conceitos básicos de análise de estruturas. A Seção 1.2 trata da identificação da estabilidade estática nas estruturas constituídas de barras, essencial em análise, e a Seção 1.3 apresenta os diagramas tensão-deformação que caracterizam propriedades elásticas utilizadas em análise das estruturas hiperestáticas. Já a Seção 1.4 aborda os temas energia de deformação elástica e trabalho das forças externas, fundamentais ao desenvolvimento teórico dessa análise. E em complemento a este capítulo e a todos os demais, as duas últimas seções propõem a resolução de exercícios e a reflexão de questões.

Quanto à continuidade deste livro, o próximo capítulo apresenta os *teoremas e métodos de energia* em estruturas constituídas de barras. O terceiro capítulo trata da construção de *modelos reduzidos* de estruturas simétricas, de análise com menor volume de cálculo do que os dos respectivos modelos completos. O quarto capítulo desenvolve o *Método da Força Unitária* destinado à obtenção geral de deslocamentos em estruturas constituídas de barras, o que é fundamental ao *Método das Forças* tratado no quinto capítulo e que objetiva a análise das estruturas hiperestáticas. O sexto capítulo detalha o importante *Método dos Deslocamentos*, que em formulação matricial é amplamente utilizado nas programações automáticas atuais e que antecede o desenvolvimento do *Método dos Elementos Finitos* tratado em livro à parte. E, no sétimo capítulo, o *Método dos Deslocamentos* está particularizado ao *Processo de Cross*, para a análise expedita das estruturas hiperestáticas de nós rígidos, principalmente as que têm apenas rotações nodais como graus de liberdade. O último capítulo trata de linhas de influência para a determinação de deslocamentos e esforços extremos em estruturas sob forças móveis que não desenvolvam forças de inércia relevantes, como as usuais pontes rodoviárias e ferroviárias. E para suporte à elaboração dos dados necessários à análise, um apêndice detalha a definição e obtenção das principais propriedades geométricas de superfícies planas, como as seções transversais das barras que constituem as estruturas reticuladas.



1.1 – Revisão de conceitos básicos

As estruturas são sistemas físicos capazes de receber e transmitir esforços. Em edifícios, pontes, veículos e equipamentos, são as partes concebidas como resistentes, para o funcionamento e utilização dos mesmos. Em caso de estrutura a construir ou a modificar é necessário prever o correspondente comportamento sob as ações previstas a ser aplicadas, para a tomada de providências que garantam o atendimento de critérios de resistência, rigidez e estabilidade, com vista à segurança em determinado prazo, de forma econômica, estética e sem danos ao meio ambiente. Para isto, as estruturas podem ser verificadas através de modelos físicos em escala reduzida de laboratório ou em real grandeza *in loco*. Contudo, é mais prático e econômico analisá-las de forma lógica, a partir de princípios ou leis físicas e hipóteses simplificadoras, que fundamentam uma determinada teoria. E como esquematizado na próxima figura, uma análise compreende:

- 1 – Construção de um modelo matemático que simule o comportamento previsto.¹
- 2 – Resolução das correspondentes equações, obtendo-se quantificações das variáveis relevantes que descrevem esse comportamento denominado *resposta da estrutura*.
- 3 – Interpretação e identificação da pertinência dessas quantificações, com avaliação da adequação do modelo adotado e/ou da necessidade de eventuais modificações desse modelo e/ou da estrutura, até a obtenção de resultados julgados adequados para a elaboração do correspondente projeto.

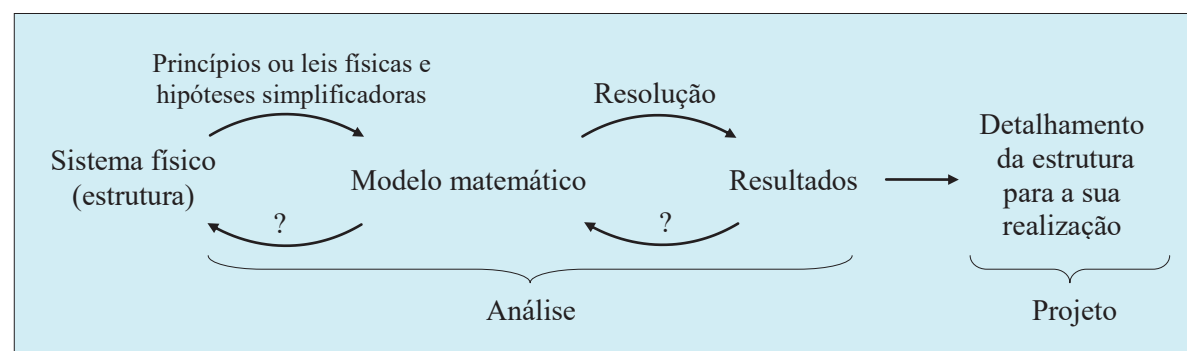
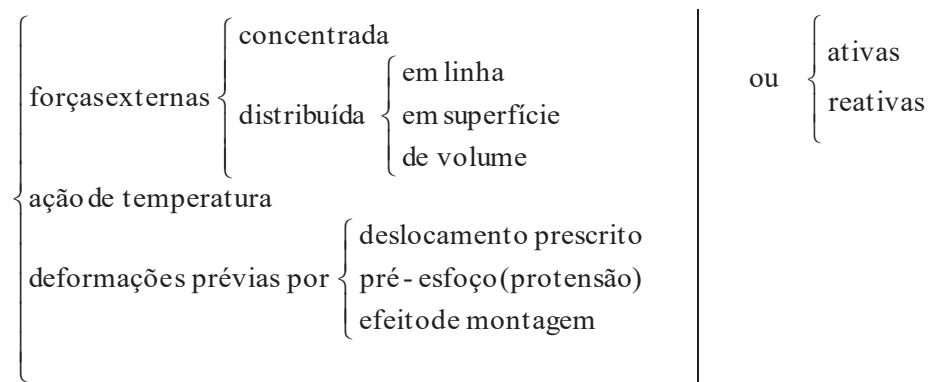


Figura 1.1 – Concepção de uma estrutura.

Uma aproximação intrínseca de toda análise matemática de estrutura é a idealização da matéria como meio contínuo deformável, em que as ações (externas) provoquem uma distribuição interna contínua de forças. Essas ações também guardam aproximações e são classificadas como:



¹ Em análise, o termo *estrutura* é também utilizado com a acepção de *modelo*.

O termo *força* tem sentido generalizado por ser utilizado na acepção estrita da grandeza *força* (de unidade newton), além de dizer respeito à grandeza *momento de força* (de unidade newton vezes metro). De forma análoga, o vocábulo *deslocamento* é utilizado na acepção de *translação*, assim como de *rotação*.

Os modelos de estruturas classificados na Subseção 1.1.2 devem atender a *propriedades mecânicas* de seus materiais, a *condições de equilíbrio* e a *condições de compatibilidade*.

Propriedades mecânicas são identificadas em experimentos de laboratório, como o ensaio de tração simples descrito na Seção 1.3.

Condições de equilíbrio estático são decorrentes da *primeira lei de Newton* que se desdobra nas *equações de equilíbrio da Estática* apresentadas na Subseção 1.1.5. E a estabilidade desse equilíbrio está descrita na Seção 1.2.

Condições de compatibilidade dizem respeito à continuidade idealizada na matéria e às continuidades em interfaces da estrutura com o meio exterior (condições de apoio). Essa idealização conduz aos conceitos de *tensão* e de *deformação*, apresentados na próxima subseção. Com o conceito de tensão em barras idealizadas nos correspondentes eixos geométricos, definem-se os *esforços seccionais* como detalhado na Subseção 1.1.4. E com esses esforços, a continuidade interna à estrutura particulariza-se em continuidade de deslocamento e de declividade dos eixos geométricos deformados, a menos que haja dispositivo concebido para que ocorra descontinuidade de certos componentes de deslocamento e em determinado ponto, denominado *articulação*.

As *Normas Técnicas* de cada país estabelecem procedimentos para ensaio de materiais e condições gerais que devem ser atendidas em análise, projeto, execução e controle das estruturas.

1.1.1 – Definições de tensão e de deformação

Diferentemente que o modelo atômico atual, a vantagem da idealização comportamental da matéria como meio contínuo deformável é poder utilizar o cálculo infinitesimal e integral (com base nos conceitos de *tensão* e de *deformação* que se relacionam através de propriedades de material) no desenvolvimento de teorias de resultados macroscópicos comprovados experimentalmente.

Para definir a grandeza *tensão (mecânica)*, seja um corte imaginário de um componente estrutural em equilíbrio sob forças externas, como ilustra a próxima figura em que ΔF é a resultante da força interna distribuída (consequência da idealização do efeito de uma parte do componente sobre a sua outra parte) em uma pequena superfície plana de área ΔA desse corte.

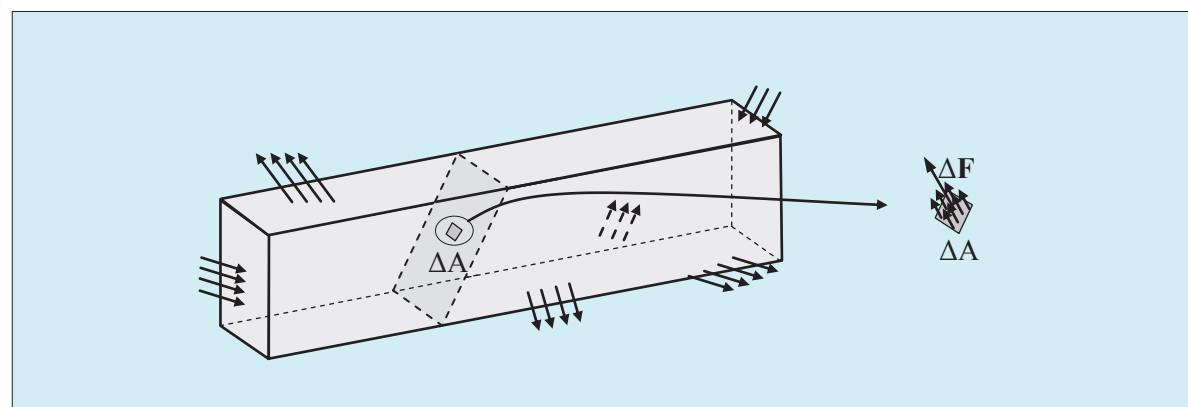


Figura 1.2 – Seção em um elemento estrutural em equilíbrio sob forças externas.

Define-se o *vetor tensão* na proximidade infinitesimal de um “ponto material” como:

$$\rho = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.1)$$

sem alterar a normal à seção de corte à medida que se reduz ΔA , e em que a intensidade desse vetor tem dimensão de força por unidade de área.²

Em análise, esse vetor é considerado através de seus componentes cartesianos, como mostra a parte esquerda da figura seguinte e sob a forma:

$$\rho = \sigma_x + \tau = \sigma_x + \tau_{xy} + \tau_{xz} \quad (1.2)$$

Nessa decomposição, σ_x é a intensidade do vetor *tensão normal* e τ , a intensidade do vetor *tensão de cisalhamento*, que por sua vez está decomposto nos componentes de intensidades τ_{xy} e τ_{xz} . Logo, em um paralelepípedo elementar sob tensão, podem ocorrer os componentes de tensão representados na parte direita da mesma figura, o que é denominado *estado múltiplo de tensões* e em que $(\tau_{xy} = \tau_{yx})$, $(\tau_{xz} = \tau_{zx})$ e $(\tau_{yz} = \tau_{zy})$, por questão de equilíbrio de rotação do paralelepípedo.

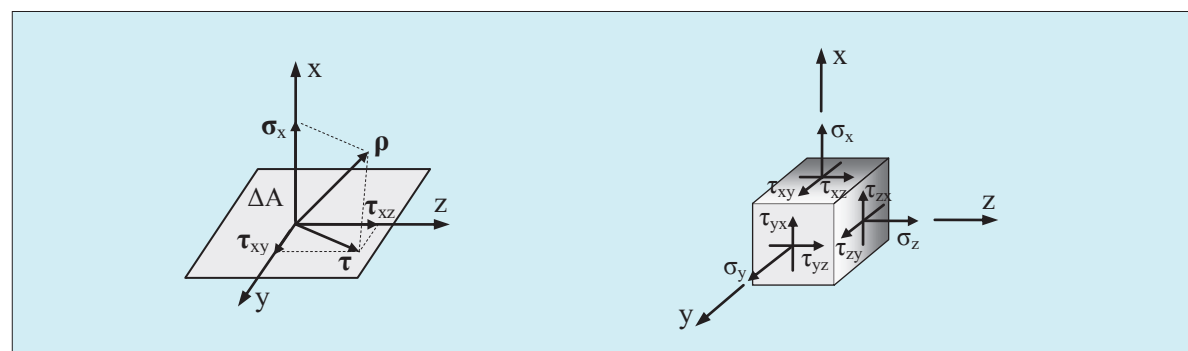


Figura 1.3 – Componentes de tensão.

Com a deformação de matéria idealizada como meio contínuo, os correspondentes pontos têm deslocamentos relativos entre si, sem que haja a formação de vazios. Assim, seja $u(x)$ uma função contínua do deslocamento de ponto ao longo de uma direção coordenada denotada por x , função esta de representação ilustrada na parte esquerda da próxima figura. Define-se a *deformação linear (específica ou unitária)* em um ponto A e na direção x , como:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_A + \Delta x) - u(x_A)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u_{,x} \quad (1.3)$$

A vírgula como índice indica derivada em relação à variável que lhe segue também como índice. Assim, a deformação ϵ_x é a razão da alteração do comprimento de um elemento infinitesimal dx do meio contínuo, sendo uma grandeza adimensional. É de forma semelhante, definem-se as deformações lineares $(\epsilon_y = v_{,y})$ e $(\epsilon_z = w_{,z})$, em que v e w denotam os deslocamentos nas direções y e z , respectivamente.

Considera-se, agora, a distorção de um elemento plano infinitesimal $dx-dy$ como mostra a parte direita da mesma figura. Define-se a *distorção ou deformação angular (específica)* como:

² A idealização da matéria como meio contínuo e as descritas concepções de tensão e de deformação (pequena) foram apresentadas pelo matemático francês *Augustin-Louis Cauchy* (1789-1857), em 1822. Trata-se de abstrações de cálculo úteis em estudo do comportamento macroscópico dos sólidos deformáveis.