

# **As matemáticas, o monocórdio e o número sonoro**

Copyright © 2017 Editora Livraria da Física  
1ª Edição

**Direção editorial**

José Roberto Marinho

**Projeto gráfico e diagramação**

Reno Stagni

**Capa**

Fabício Ribeiro

**Revisão**

Rafael Donisete Bellettato

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

---

Bromberg, Carla

As matemáticas, o monocórdio e o número sonoro / Carla Bromberg, Fumikazu Saito.  
– São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. – (Série temas em história da ciência /  
coordenação Maria Helena Roxo Beltran)

ISBN 978-85-7861-494-2

1. Analogia 2. Aprendizagem - Metodologia 3. Matemática 4. Matemática - Estudo e  
ensino 5. Matemática - História 6. Música - História 7. Significado (Filosofia) I. Saito,  
Fumikazu. II. Beltran, Maria Helena Roxo. III. Título IV. Série.

17-05913

CDD-781.209

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática e música: História 781.209

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida  
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.

Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107  
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



Editora Livraria da Física  
[www.livrariadafisica.com.br](http://www.livrariadafisica.com.br)

Carla Bromberg  
Fumikazu Saito

# As matemáticas, o monocórdio e o número sonoro



HISTÓRIA DA CIÊNCIA

Observatório da Educação (Projeto no. 8017/2012)



**LF**  
EDITORIAL  
2017



## Sumário

Apresentação .....	7
Prefácio.....	9
Introdução.....	13
1 Música, número e som.....	27
2 Música, instrumento e medida.....	61
3 Ritmo e tempo .....	93
4 Matemática e música .....	115
Referências bibliográficas .....	141



## Apresentação

A formação continuada e especializada de professores é um dos objetivos do projeto “História da ciência e ensino: abordagens interdisciplinares no Ensino Superior (diagnóstico, formação continuada e especializada de professores)”, desenvolvido junto ao PEPG em História da Ciência da PUCSP com apoio da Capes no âmbito do Programa Observatório da Educação (Capes/Inep – Proc. Nº 23038.002603/2013-47).

Para tanto, a elaboração de materiais de apoio se apresenta como uma necessidade imediata. Assim, a Série Temas em História da Ciência foi planejada, dentro do mesmo projeto, para responder a essa demanda.

Voltada a professores de todos os níveis de ensino e também a licenciandos, a Série Temas em História da Ciência é iniciada pelo volume *História da Ciência para Formação de Professores*, o qual aborda a construção e a transformação dos pressupostos teórico-metodológicos dessa área, bem como aspectos particulares do ofício do historiador da ciência. Além disso, são apresentadas e

discutidas possibilidades de interface entre história da ciência e ensino e entre ciência, técnica e tecnologia na história, procurando focalizar debates atuais na educação em ciências.

Complementando a série têm-se os volumes temáticos. Cada um desses volumes traz estudo sobre episódio, escrito por especialista, com base em pesquisa no campo da história da ciência. Cada volume traz também sugestões para abordagens em sala de aula.

Assim, a Série Temas em História da Ciência procura responder aos professores interessados em levar a história da ciência para a sala de aula, com base em materiais de sólida fundamentação.

Este volume, resultado de um trabalho desenvolvido juntamente com o grupo de estudos em pesquisa HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática/PUCSP), aborda a relação entre música e matemática, privilegiando os contextos de elaboração, transformação e transmissão (bem como de apropriação) dos conhecimentos compartilhados pela música e pela matemática. Esperamos que a leitura deste material, juntamente com outras que versam e discorrem sobre o mesmo assunto, propiciem novas discussões e reflexões que contribuam para introduzir novas abordagens de investigação na articulação entre história e ensino de ciência e de matemática.

Maria Helena Roxo Beltran  
Coordenadora do Projeto



## Prefácio

O grupo de estudos e pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática da PUC/SP tem se orientado na aproximação entre historiadores e educadores da matemática e organiza seminários em que se discute o encontro da matemática com outras especialidades ao longo da história. Desses seminários têm resultado importantes estudos e trabalhos com vistas a construir interfaces entre história e ensino das ciências, especialmente, da matemática. O Seminário é direcionado a docentes e educadores matemáticos e de áreas afins que estejam interessados nos recentes debates e discussões sobre a articulação entre história e ensino de ciência e de matemática.

Este livro é organizado em quatro capítulos, versando sobre os conceitos de música, número e som; analisando as relações entre a música, o instrumento e a ideia de medida, assim como as contextualizações de ritmo e tempo. Os títulos de cada capítulo indicam claramente o que é tratado neles. O livro escapa da linearidade cronológica e da narrativa descritiva que privilegiam a coerência interna

e lógica do discurso matemático, que é o estilo comum nas histórias da matemática e das outras ciências. Os autores propõem um texto que flui muito bem, tornando sua leitura agradável. Uma inovação muito interessante é a inserção, no decorrer do texto, de boxes com objetivo de complementar as informações textuais. São 26 boxes de comentários históricos, inseridos no corpo do texto. Além de ajudar na compreensão dos argumentos, o recurso aos boxes dá ao livro uma aparência gráfica original.

Os autores destacam três linhas principais associadas aos estudos da música. A mais comum, que prevalece desde a Antiguidade, é considerar a música como uma ciência matemática. Buscam relatos e narrativas históricas, nos mostram as formas e utensílios musicais, bem como resgatam instrumentos musicais e outras peças comumente pesquisadas na arqueologia. Mostram que a partir da Idade Média, a música, juntamente com a geometria, a aritmética e a astronomia, compunha o que ficou conhecido por *quadrivium* e que essas quatro ciências matemáticas foram ainda agrupadas com outras três, gramática, lógica e retórica, que compunham o *trivium*, criando assim o conjunto de disciplinas denominado as sete artes liberais. Já nos primórdios da Idade Moderna surge o interesse de interpretar a música a partir de vibração sonora, dando origem à acústica, um novo ramo de investigação que se incorporou à filosofia natural e hoje à física. Mostram ainda a fase na qual a música é tratada como uma das belas-artes. Essas três fases são exemplos da evolução da institucionalização da intelectualidade, a partir das academias para as

escolas curriculares, para as universidades e para a formação profissional. Nesse sentido, vale notar que, enquanto atualmente o conhecimento musical é prático e parte do pressuposto que o músico é aquele que toca um instrumento. Na Antiguidade e no período medieval, prevalecia a percepção que tocar ou cantar eram ações de uma classe social não erudita. O músico, aquele que tocava ou cantava, não era confundido com o estudioso que, muitas vezes nem sequer tocava ou cantava, nem com o artesão que fabricava os instrumentos.

Os autores têm como foco principal da pesquisa que resultou neste livro os estudos da filosofia natural e das matemáticas. Um aspecto da originalidade deste livro é contextualizar a origem das relações entre matemática e música, não apenas focalizando os períodos históricos, mas analisando o processo de formação dos conhecimentos e de novas proposições. Os autores dizem que assim estão se distanciando da postura historiográfica que tende a ler o passado com os olhos do presente e procuram compreender os contextos e os processos de elaboração, transformação, transmissão e apropriação do conhecimento, buscando esclarecer as razões e os critérios epistemológicos, ontológicos, axiológicos, teológicos e outros que relacionam os conhecimentos matemáticos e musicais no passado, problematizando as relações entre música e matemática.

A análise da relação complexa entre os conhecimentos compartilhados pela música e pela matemática leva a desconstruir uma concepção ingênua e linear de conheci-

mento, que permeia muitas das narrativas históricas a esse respeito. Esperamos que a leitura deste material, juntamente com outras que versam e discorrem sobre o mesmo assunto, propiciem novas discussões e reflexões que contribuam para introduzir novas abordagens de investigação na articulação entre história e ensino de ciência e de matemática.

Este livro é uma importante contribuição à história da ciência e da matemática e foi elaborado a partir de discussões sobre documentos originais e estudos e investigações recentes em história da ciência, muitos dos quais pouco conhecidos por parte do público acadêmico brasileiro, principalmente dos docentes de ciências e de matemática.

São Paulo, abril de 2017  
Ubiratan D'Ambrosio

## Introdução

**E**ste livro é resultado de um trabalho conjunto desenvolvido pelo grupo de estudos e pesquisa HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática/PUCSP), ligado ao projeto “História da Matemática e Ensino: As matemáticas nos séculos XVI e XVII”, do PEPG em Educação Matemática/PUCSP, e o Programa Observatório da Educação/CAPES, no âmbito do projeto “História da ciência e ensino: abordagens interdisciplinares no Ensino Superior (diagnóstico, formação continuada e especializada de professores)”, do PEPG em História da Ciência/PUCSP. Tem por objetivo aprofundar o diálogo entre historiadores e educadores, com vistas a construir interfaces entre história e ensino, especialmente, da matemática. Ele é, assim, direcionado a docentes e educadores matemáticos e de áreas afins que estejam interessados nos recentes debates e discussões sobre a articulação entre história e ensino de ciência e de matemática<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Sobre interface entre história da ciência e ensino, vide: Beltran, Saito & Trindade, *História da Ciência para Formação de Professores*, 101-118; Trindade et. al. “História da Ciência e Ensino: Alguns Desafios”;

O conteúdo deste livro foi elaborado a partir de questões que surgiram numa série de quatro seminários, realizados pelo grupo HEEMa, com o objetivo de revisitar as relações entre música e matemática por um viés histórico, abordando quatro temas: as “Evidências das relações entre música e matemática”, a “Ideia de se ensinar matemática através da música”, as “Interfaces práticas e teóricas da Música com a Matemática” e “Sobre a lenda da invenção da Música e Pitágoras”<sup>2</sup>. As discussões e os debates durante os seminários revelaram que grande parte da audiência, composta basicamente por docentes de matemática, não estava a par dos novos desdobramentos da pesquisa sobre o assunto, compartilhando uma visão bastante tradicional e conservadora. Além disso, notamos que a maioria dos participantes não costuma problematizar a relação entre música e matemática, considerando-a natural. Assim, embora todos os participantes admitissem a dimensão artística (e também estética) da música, compartilhavam entre si a ideia de que a música era naturalmente redutível a uma “ciência do número” e, portanto, era essencialmente matemática.

Sabemos que essa ideia se encontra ancorada na no-

---

Beltran, “História da Ciência e Ensino”; Beltran & Saito, “História da Ciência, Epistemologia e Ensino” particularmente, sobre a construção de interfaces entre história da matemática e ensino aqui proposta, cf.: Saito & Dias, “Interface entre História da Matemática e Ensino,” 89-100; Saito, “História e Ensino de Matemática”; Saito, “Construindo Interfaces entre História e Ensino da Matemática”.

<sup>2</sup> Os seminários foram realizados no grupo HEEMa, no PEPG em Educação Matemática/PUCSP no primeiro semestre de 2016.

ção, bastante disseminada, de que a música sempre foi considerada, se pudermos arriscar uma definição, uma “ciência do número aplicado ao som”. Não que esta definição apresente problemas, nem que matemática e música não se relacionassem e, tampouco, que o número não fosse aplicado ao som. Mas que essa definição e essas relações não são consideradas pelos docentes frutos de um construto teórico que fora elaborado e justificado de diferentes modos no passado.

Podemos nos referir à música no passado porque recorreremos à história e resgatamos informações suficientes que evidenciam a sua existência, seja ela através de relatos e narrativas históricos, transmitidos à nós através da escrita e da história oral, de desenhos e de pinturas em diversos suportes, que nos provêm as formas e utensílios musicais, bem como do resgate propriamente dito de instrumentos musicais e outras peças pesquisadas pela arqueologia.

Embora encontremos muitas evidências de sua existência no passado, grande parte delas é identificada e compreendida por meio da noção de música que possuímos hoje, conduzindo-nos a anacronismos que não só distorcem o sentido histórico, mas também ocultam outros aspectos que são essenciais para compreendermos a natureza da relação entre música e matemática nos dias de hoje.

É preciso ter em consideração que os conhecimentos que caracterizam uma área ou disciplina não compõem necessariamente esta disciplina em todos os períodos da

história. Isso porque as atuais disciplinas que reconhecemos, por exemplo, por Física, Química, Biologia, Matemática, Música, entre muitas outras, não encontram paralelo antes do século XIX.

Sem dúvidas, podemos nos referir a conhecimentos de física, de química, de biologia, de matemática, de música etc. quando nos reportamos ao passado. Porém, esses conhecimentos organizavam-se de diferentes maneiras segundo critérios muitos diversos daqueles que hoje são adotados. É por essa razão que devemos tomar o cuidado de não confundir “conhecimento musical” e “música”, bem como “conhecimento matemático” e “matemática” antes do século XIX. Não porque esses conhecimentos inexistissem no passado, mas porque a “música” e a “matemática”, como áreas autônomas e unificadas de conhecimentos “musicais” e “matemáticos”, só surgiram nos séculos XVIII e XIX respectivamente. Antes disso, os conhecimentos relativos à música e à matemática encontravam-se “pulverizados” e eram parte integrante de outros segmentos de conhecimento que eram conhecidas como “matemáticas” (isso mesmo, no plural)<sup>3</sup>.

Até meados do século XVIII, as matemáticas constituíam-se como campos de conhecimentos complexos, que incluíam vários domínios de saber, desenvolvendo outros tantos ao longo da história. Assim, juntamente com a geometria, a aritmética, a hidrostática, a pneumática, a mecânica, a astronomia, a óptica, somente para apresentar

---

<sup>3</sup> Vide: Saito, *História da Matemática*.



alguns exemplos, a música sempre fizera parte de um conjunto de disciplinas que eram consideradas matemáticas.

Desse modo, para compreendermos a relação entre música e conhecimento matemático, é preciso examiná-la retomando o lugar por ela ocupado no mapa do conhecimento em diferentes épocas. Como veremos nos próximos capítulos, a música nem sempre foi considerada em si mesma e, por um longo período, foi classificada como uma ciência subordinada à aritmética, da qual foi gradativamente se separando num lento processo até adquirir autonomia e constituir-se como área de conhecimento ligada às belas artes.

Esse processo que conduziu ao delineamento do que hoje reconhecemos por matemática e música foi bastante complexo e esteve ligado ao movimento que conduziu à especialização moderna cuja origem remonta aos séculos XV, XVI e XVII. Nesse processo, a música desdobrou-se em pelo menos três ramos de investigação a partir do século XVII. A parte que lidava com as razões e as proporções aritméticas passou a receber atenção dos estudiosos de matemáticas que passaram a discuti-la conjuntamente com os recentes desdobramentos da álgebra e da geometria. Outra, nova, por sinal, que procurava investigar sobre a vibração sonora, deu origem a um novo ramo de investigação, denominada acústica, que migrou, inicialmente para filosofia natural e, posteriormente, para o que hoje reconhecemos como ciência física. E uma terceira, que procurou considerar a música em si mesma, passou a ser tratada por compositores e músicos como uma das “belas-

artes” a partir do século XVIII.

A compreensão desse processo que, em última instância, definiu as bases da matemática e da música modernas, lança luz sobre a complexa relação entre esses dois segmentos do conhecimento a começar pelo próprio estatuto da música que hoje é considerada uma arte, ou ainda, em sua forma generalizada, um tipo de entretenimento.

A esse respeito, devemos considerar que a distinção que hoje estabelecemos entre “arte” e “ciência” também não encontra paralelo no passado, visto que inexistiam áreas de conhecimento especializadas antes do século XIX. Além disso, a própria “arte”, e mesmo a “ciência”, não tinham o mesmo significado que lhes atribuímos atualmente, pois as diferentes frentes do saber afiguravam-se de forma muito diversa, revelando um quadro multifacetado de conhecimentos inter-relacionados.

Portanto, quando nos referimos à música antes do século XVIII, devemos ter muita cautela ao empregarmos o termo “arte”. Isso porque a música esteve sempre ligada à aritmética (e, em algumas ocasiões, até à geometria ou mesmo à astronomia) e dela extraía os princípios que a definiam como campo de investigação. Consequentemente, o conhecimento e a definição das estruturas e dos elementos que compunham a música, tais como sons (notas), ritmos, escalas e sistemas de afinação, eram matemáticos e não “artísticos”, isto é, da arte (*ars*)<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> Em períodos anteriores ao século XVIII, o termo “arte” (*ars*) desig-

A música, juntamente com a geometria, a aritmética e a astronomia, compunha o que ficou conhecido por *quadrivium* a partir da Idade Média. Essas quatro ciências matemáticas foram ainda agrupadas pelos medievais com outras três (gramática, lógica e retórica) do *trivium*, compondo um conjunto de disciplinas denominado “sete artes liberais”<sup>5</sup>.

Por “artes liberais”, os antigos e os medievais designavam um rol de conhecimentos especulativos (portanto, teóricos) da ciência. Durante a Antiguidade e a Idade Média era comum contrapor “artes liberais” e “artes servis”, o primeiro designando um conjunto de disciplinas que com-

---

nava diferentes saberes. Em linhas gerais, ela se referia ao conhecimento da “técnica”. O termo grego *techné*, ou ainda *mechanike techne*, comumente traduzido por “técnica”, designou por muito tempo o que os latinos denominaram *ars mechanica*. Por este termo, os latinos se referiam a diferentes frentes de saber, caracteristicamente mecânicos e/ou manuais, que foram parcialmente marginalizadas pelos antigos e medievais; vide: Long, “Invention, Secrecy and Theft”; Long, *Openness, Secrecy, Authorship*; Smith, *The Body of Artisan*; Smith, “Art, Science and Visual Culture”; Van der Hoven, *Work in Ancient and Medieval Thought*.

<sup>5</sup> Cabe aqui observar que as disciplinas que compunham o *quadrivium* nem sempre foram as quatro tradicionais (geometria, aritmética, astronomia e música). Com o passar do tempo, outros segmentos do conhecimento, tais como a óptica e a mecânica por exemplo, passaram a fazer parte dele, inflacionando significativamente o número de disciplinas matemáticas. Não aprofundaremos aqui sobre esse assunto que pode ser facilmente consultado em literatura especializada, a esse respeito vide: Mongelli, coord., *Trivium & Quadrivium*; Grant, *The Foundation of Modern Science*; Long, “Invention, Secrecy and Theft”; Long, *Openness, Secrecy, Authorship*; Smith, *The Body of Artisan*; Smith, “Art, Science and Visual Culture”.

punham as ciências especulativas e o segundo, as artes mecânicas (*ars mechanica*) em geral, tais como a pintura, a arquitetura, a agrimensura, a mecânica, etc. que, em linhas gerais, dependiam mais da destreza e da habilidade do que da reflexão filosófica. Desse modo, uma vez que era considerada “arte liberal”, a música se afigurava como conhecimento teórico e não prático.

A ideia de que o conhecimento musical é prático parte do pressuposto atual de que o músico é aquele que toca um instrumento. Contudo, com raras exceções, tocar ou mesmo estudar um instrumento musical não fazia parte da reflexão dos estudiosos de música na antiguidade e no período medieval de modo que poucos se referiram à música como um corpo de conhecimentos práticos. Naquela época, a habilidade de compor, tocar ou cantar era compreendida como execuções de “profissionais práticos” que eram considerados socialmente inferiores comparados àqueles que estudavam a ciência musical. O músico, aquele que executava a música, portanto, não era confundido com o estudioso de música que, muitas vezes, nem sequer tocava um instrumento musical, nem o fabricava e nem cantava. Na Idade Média, por exemplo, era comum diferenciar entre o *cantor*, aquele que executa e canta a música, e o *musicus*, aquele que era capaz de conhecer as causas e as razões de sua ciência.

É curioso que o estudioso que especulava teoricamente sobre a música não tivesse conhecimentos práticos, por exemplo, que o permitissem fabricar um instrumento musical. Por sua vez, o artesão também não mobilizava