

NOTAÇÃO DE DIRAC

PARA QUEM TEM PRESSA EM APRENDER MECÂNICA QUÂNTICA



NONATO REIS

NOTAÇÃO DE DIRAC

PARA QUEM TEM PRESSA EM APRENDER MECÂNICA QUÂNTICA



2019

Copyright © 2019 Editora Livraria da Física
1ª Edição

Direção editorial: José Roberto Marinho

Revisão: Fabrício Quaresma e Hamilton Braga

Capa: Fabrício Ribeiro

Projeto gráfico e diagramação: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Reis, Nonato

Notação de Dirac: para quem tem pressa em aprender mecânica quântica / Nonato Reis. -
São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

Bibliografia.

ISBN 978-85-7861-623-6

1. Mecânica 2. Teoria quântica I. Título.

19-28601

CDD-530.12

Índices para catálogo sistemático:

1. Mecânica quântica: Física 530.12

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.

Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei N° 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

Para Amanda Bayma,
Bianca Yumi Reis,
Tiago Yudi Reis,
Victoria Reis,
Clarisse Reis,
Saúlo Akira Reis
e a todos os amantes da Física e
Matemática.

APRESENTAÇÃO

Embora eu tenha graduação em Física e Matemática, o livro “Notação de Dirac para quem tem pressa em aprender Mecânica Quântica”, não é um livro nem de matemática nem de física, pois não apresenta o rigor típico dessas duas disciplinas. Esse livro destina-se àqueles que querem compreender o instrumental matemático da mecânica quântica, mas não têm tempo de se debruçar sobre a álgebra linear que é o cerne da notação de Dirac. Procurei, de forma clara e sucinta, escrever essa obra para que o leitor encontre, em um único lugar, todos os pré-requisitos necessários para entender esta maravilhosa ferramenta: números complexos, matrizes, vetores, probabilidade e estatística. Claro que a função deste livro é dar um pontapé inicial para que o leitor possa, de forma segura, acompanhar livros mais complexos como o clássico “Mecânica Quântica Moderna”, do Sakurai.

Tive contato com o Formalismo de Dirac pela primeira vez durante uma pós-graduação em Física moderna e contemporânea, na UFPA, em 2008, e, mais tarde, no mestrado da PUC de Minas, com o professor doutor Lev Vertchenko. Quem já teve contato com essa ferramenta se surpreende com sua simplicidade e beleza nas previsões dos fenômenos quânticos. Agradeço aos professores doutores Silvana Perez e João Protázio pelo tempo que disponibilizaram para a leitura deste trabalho e suas valiosas contribuições. Um agradecimento muito especial ao grande mestre José Luiz Lopes, professor da UFPA, por todas as sugestões, críticas que aconteceram ao longo da criação desta obra. Espero que o leitor sinta tanto prazer em ler quanto o que tive em escrevê-la.

Maio de 2017

PREFÁCIO

O conhecimento físico da Natureza, agregado nos últimos tempos, nos ensinou que nossa realidade cotidiana, povoada de vida, corpos e luzes, é uma ínfima parte de uma instância macrocômica, povoada de galáxias e vazios, que se estende até uma escuridão, onde o além reside na imaginação e no infinito. Ao mesmo tempo sabemos que o comportamento das coisas em nossa realidade particular é, também, o resultado da composição dos estados dos elementos muito pequenos que povoam uma instância submaterial povoada por átomos, com quarks e elétrons, conhecida como a instância quântica da Natureza.

Todas as instâncias são permeadas por um argumento comum, a energia, e formam o corpo epistemológico da Natureza do Universo.

A Física, ciência que busca as Leis da Natureza, dialoga com esta pela linguagem lógica, sem verbos e predicados: a Matemática, e procura estabelecer modelos que fundamentem uma teoria, conjunto de articulações/equações, que permitam antecipar comportamentos e testá-los, para avaliar a confiabilidade dos argumentos conceituais que a estruturam. A instância quântica tem-se modelado por meio da Mecânica Quântica, a teoria que se tem desenvolvido confiavelmente no último século, cuja credibilidade está cada vez mais fortalecida pelas tecnologias geradas e incorporadas aos variados setores da vida humana.

As formas de escrever esta Mecânica Quântica foram brilhantemente sintetizadas por Paul Dirac, criando uma notação eficiente, os Kets e os Bras, para identificar estados quânticos de um sistema como um vetor do espaço de Hilbert e otimizar a álgebra da Teoria Quântica.

Neste livro prodidático, o professor Nonato Reis conduz, no sentido de um regente, com maestria, a aprendizagem dos que “têm pressa”, isto é, aqueles interessados no tema, mas que exigem clareza, objetividade e coerência, para uma compreensão exitosa, seja por necessidade acadêmica ou mesmo por diletantismo intelectual. Por quatro capítulos concatenados, ele monta, como

os verdadeiros professores sabem fazer, o arcabouço lógico e a estrutura semiótica que fundamenta o objetivo final da publicação, nos três últimos capítulos. Além disso, o autor, com leveza raramente encontrada em outros escritos que abordam temas áridos como o aqui tratado, leva o aprendiz pela mão, passo por passo, exercitando com ele, para marcar nas células do hipocampo uma memória não efêmera, somando e tecendo as cadeias racionais até consolidar, nos capítulos cinco e seis o senso hilbertiano sobre o qual a sagacidade e o envolvimento de Dirac encontraram fertilidade e sucesso em simplificar o trato com os operadores e seus significados.

Uma obra para todos os interessados em lidar com os mistérios do Universo, compreendendo a linguagem da Natureza, no afã de compatibilizar a instância quântica com aquela que nos rodeia de imediato, sejam eles provocados pela ciência, pela fantasia ou pela poesia.

José Luiz Lopes

SUMÁRIO

UNIDADE 1

Números Complexos	17
1. Número Imaginário	18
Minibiografia Euler (1707-1783).....	19
2. Números Complexos.....	20
Operações entre Complexos.....	21
Fórmula de Euler	23
Plano de Argand-Gauss.....	25

UNIDADE 2

Matrizes e Determinantes	27
1. Introdução a Matrizes.....	28
Minibiografia Heisenberg (1901-1976)	28
2. Matriz Identidade.....	31
Igualdade de Matrizes	32
Adição de Matrizes	32
Matriz Oposta a uma Matriz M	32
Produto de um Número por uma Matriz	33
Produto de Matrizes	34
Matriz Transposta.....	37
Matriz Simétrica	38
Matriz Inversa	38

3. Determinantes	40
Determinante de Matriz Quadrada de Ordem 2	40
Determinante de Matriz Quadrada de Ordem 3	41
Matriz Adjunta	47
Inversa de uma Matriz Adjunta	48
Matriz Hermitiana	48
Propriedades da Matriz Hermitiana	50
Traço	50

UNIDADE 3

Vetores	51
1. Introdução a vetores	52
2. Vetor unitário	53
3. Representação Algébrica de Vetores.....	55
4. Álgebra vetorial	55
Adição	55
Regra do Polígono.....	56
Regra do Paralelogramo	56
5. Vetor Nulo.....	58
6. Produto Interno ou Escalar	61
7. Desigualdade de Cauchy-Schwarz	63
8. Representação Matricial	65
9. Projeção Ortogonal de \vec{A} sobre \vec{B}	67
10. Produto Vetorial	70
11. Vetores Linearmente Dependentes e Independentes.....	73
12. Base	74
13. Bases Ortonormais	75

14. Autovalores e autovetores	77
15. Diagonalização.....	81

UNIDADE 4

Probabilidade e Estatística	85
1. Probabilidade e estatística.....	86
Probabilidade	86
Chaves em série e em paralelo	87
Eletrônica digital.....	89
Noções de estatística.....	92
Valor esperado e valor médio	96

UNIDADE 5

Notação de Dirac	97
Minibiografia Dirac (1902-1984)	98
1. Notação de Dirac	99
2. Espaço Dual	101
3. Produto Interno	102
4. Normalizando um Vetor	107
5. Até onde chegamos	107
6. Probabilidades	109
7. Superposição de estados	111
8. Polarização da luz	112
9. O <i>spin</i> (Momento Angular Intrínseco) do fóton.....	114
10. O <i>spin</i> do elétron.....	115
11. Desigualdade de Cauchy-Schwartz	118

UNIDADE 6

Operadores	119
1. Operadores	120
Introdução a operadores	120
Operador produto externo	120
Representação de um operador	121
Traço de um operador	123
Autovalores e autovetores	124
Existência de degenerescência	127
Valor esperado ou médio de um observável.....	128
Operador projetor.....	129
Relação de completeza ou fechamento.....	130
Operador hermitiano	137
Comutador.....	138
Anticomutador	139
A relação de incerteza.....	139
Matrizes de Pauli.....	141

UNIDADE 7

Física Quântica	157
1. Um Passeio pelo Desenvolvimento da Física Quântica	158
Introdução	158
2. A Equação Fotelétrica de Albert Einstein	158
3. O modelo Atômico de Bohr e o Átomo de Hidrogênio.....	161
4. O Efeito Compton.....	163
5. Dualidade onda-partícula	165
6. A equação de Schrodinger	166

Operadores	167
Interpretação de Max Born	168
7. Princípio da Incerteza de Heisenberg	169
8. Postulados da Mecânica Quântica	170
Postulados.....	171
Uma Breve História do <i>Spin</i>	173
Gabaritos	181
Bibliografia	187

UNIDADE

1

NÚMEROS COMPLEXOS

CONCEITOS E APLICAÇÕES

1. Número Imaginário	18
Minibiografia Euler (1707-1783).....	19
Números Complexos.....	20
2. Operações entre Complexos.....	21
Fórmula de Euler.....	23
Plano de Argand-Gauss	25

1. Número Imaginário

Assim como houve necessidade de se criar os números negativos para a resolução de equações do primeiro grau, do tipo $x + 1 = 0$, houve também necessidades de se criar o número imaginário $i = \sqrt{-1}$ ou $i^2 = -1$, para a resolução de equações do tipo $x^2 + 1 = 0$. O número imaginário i foi introduzido por Euler* no século XVIII. A equação $x + 1 = 0$ tem uma única solução: $x = -1$ e a equação $x^2 + 1 = 0$, tem duas soluções $-i$ e i ou $-\sqrt{-1}$ e $\sqrt{-1}$.

Observe que:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

EXERCÍCIOS

1. Qual a solução da equação $x^2 + 4x + 5 = 0$, sendo i a unidade imaginária?

a) $-1 \pm i$

d) $-2 (1 \pm i)$

b) $-2 \pm i$

e) $-2 \pm 3i$

c) $1 \pm i$

2. Sendo i a unidade imaginária, o valor de $i^{10} + i^{-100}$ é:

a) 0

d) 1

b) i

e) -1

c) $-i$

3. Sendo i a unidade imaginária, então: $i^{25} + i^{39} - i^{108} + i^{51}$ é igual a:

a) $-1 - i$

d) $1 + i$

b) $-1 + i$

e) 0

c) $1 - i$

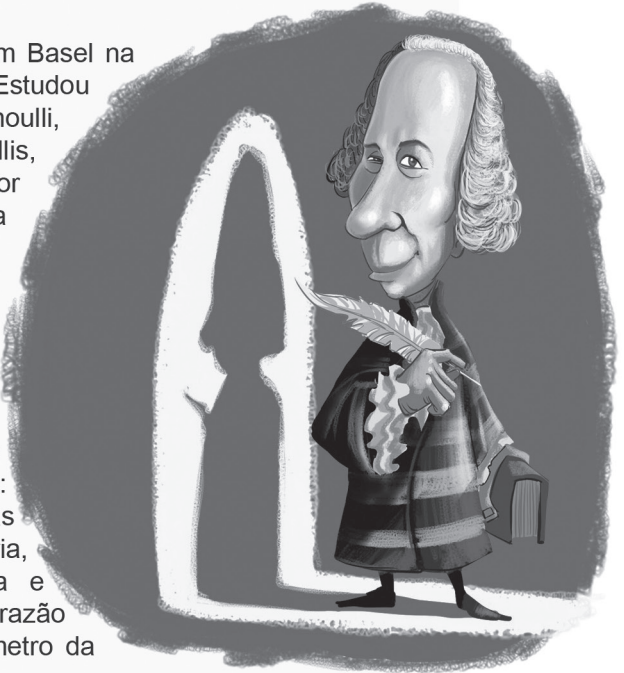
*A primeira pessoa a considerar a raiz quadrada de um número negativo, foi o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576)

Minibiografia

Leonhard Euler nasceu em Basel na Suíça, em 15 de abril de 1707. Estudou matemática com Jacob Bernoulli, tornando-se amigo dos Bernoullis, que o levaram para ser professor de matemática e física na Rússia, a convite de Catarina I.

Euler, trabalhou em todas as áreas da matemática: geometria, cálculo infinitesimal, trigonometria, álgebra e teoria dos números. Introduziu várias notações por meio de seus livros e artigos, tais como: $f(n)$, notação moderna para as funções, \sum para a somatória, i para a unidade imaginária e popularizou o π como sendo a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência.

Euler morreu em 18 de setembro de 1783, em São Petersburgo.



EULER (1707-1783)

2. Números Complexos

No seu livro: *"17 equações que mudaram o mundo"*, Ian Stewart afirma que:

"A equação de onda clássica define ondas no espaço, e sua função é uma função numérica no espaço e no tempo. O mesmo vale para a equação de Schrödinger, mas agora a função onda assume valores complexos, não apenas reais".

Os números complexos não são usados apenas em Física Quântica, eles também são usados na engenharia, eletromagnetismo e Teoria do Caos. Mas afinal de contas, como podemos representar graficamente um número complexo?

O "plano complexo" consiste em uma reta horizontal para os números reais e uma reta vertical para os números imaginários. Observe a figura (1) onde representamos o número $2 + 4i$.

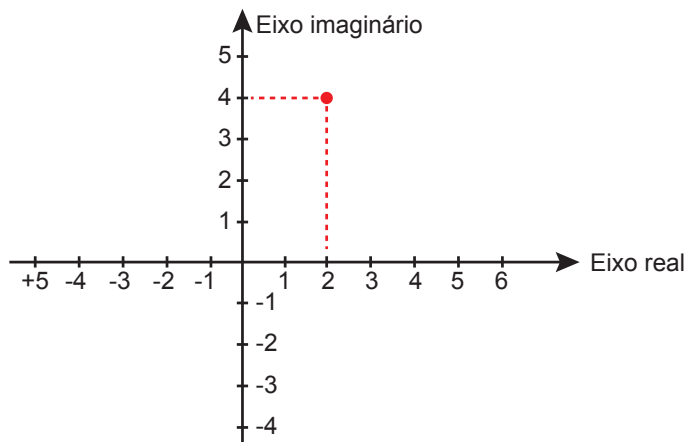


Figura 1 - Representação gráfica de um número complexo.

Um número complexo na sua forma algébrica é representado por: $z = a + b.i$, onde a é a parte real de z e b é a parte imaginária de z .