Introdução à Filosofia Matemática

Textuniversitários 3

Bertrand Russell

Introdução à Filosofia *Matemática*

Tradução e Notas:
Augusto J. Franco de Oliveira

EDITORIAL

Editora Livraria da Física
São Paulo – 2020

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Russell, Bertrand, 1872-1970
Introdução à filosofia matemática / Bertrand Russell ; tradução e notas Augusto J. Franco de Oliveira. – São Paulo : Editora Livraria da Física, 2020. – (Série textuniversitários ; 3)

Título original: Introduction to mathematical philosophy

Bibliografia.
ISBN 978-85-7861-641-0

1. Matemática 2. Matemática - Filosofia I. Oliveira, Augusto J. Franco de. II. Título. III. Série.

19-31529 CDD-510.1

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Filosofia 510.1

Maria Paula C. Riyuzo – Bibliotecária – CRB-8/7639

ISBN 978-85-7861-641-0

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafisica.com.br

Prefácio do Autor (1919)

Este livro pretende ser uma «Introdução» e não visa apresentar uma discussão completa dos problemas que aborda. Pareceu apropriado apresentar certos resultados, até agora somente ao alcance dos que já dominaram o simbolismo lógico, numa forma que ofereça o mínimo de dificuldade ao principiante. Foi despendido um grande esforço para evitar o dogmatismo no tocante às questões ainda sujeitas a sérias dúvidas e tal disposição dominou, até certo ponto, a escolha dos assuntos considerados. As partes iniciais da lógica matemática são menos definidamente conhecidas do que as suas partes mais avançadas, mas são pelo menos de igual interesse filosófico. Muito do que é apresentado nos capítulos que se seguem não pode ser apropriadamente chamado «filosofia», embora as questões consideradas tenham sido incluídas na filosofia enquanto não existia uma ciência satisfatória das mesmas. A natureza do infinito e da continuidade, por exemplo, pertenceu, em tempos idos, à filosofia, mas pertence hoje à matemática. Talvez não seja de considerar que a *filosofia* matemática, no sentido estrito, inclua resultados científicos definidos como os que foram obtidos nessa área; a filosofia da matemática deverá, naturalmente, tratar de questões que se situam na fronteira do conhecimento humano e sobre as quais ainda não se tem certeza relativa. Mas a especulação em torno destas questões dificilmente será frutífera, a menos que sejam conhecidas as partes mais científicas dos princípios da matemática. Um livro que trate destas coisas pode, portanto, ser considerado uma *introdução* à filosofia matemática, embora dificilmente se possa afirmar que trate de uma parte da filosofia, excepto onde ultrapasse o seu próprio âmbito. Todavia, o livro aborda de facto um conjunto de conhecimentos que, para os que o aceitam, parece invalidar muito da filosofia tradicional e até boa parte do que é comum na actualidade. Deste modo, bem como pela sua repercussão em problemas ainda não resolvidos, a lógica matemática é relevante para a filosofia. Por este motivo e também por causa da importância intrínseca do assunto, poderá haver algum propósito numa apreciação sucinta dos principais resultados da lógica matemática, numa forma que não exija nem conhecimentos de matemática nem aptidão para o simbolismo matemático. Contudo, aqui, como em qualquer outro campo, o método é mais importante do que os resultados, do ponto de vista das pesquisas posteriores; e o método não pode ser bem explicado dentro da estrutura de um livro como este. É de esperar que alguns leitores se mostrem suficientemente interessados para prosseguir no estudo do método pelo qual a lógica matemática pode ser tornada útil à investigação dos problemas tradicionais da filosofia. Este é, porém, um assunto que não se tentou abordar nas páginas que seguem.

Bertrand Russell

Nota do Editor da Primeira Edição (1919)

Aqueles que, baseando-se na distinção entre Filosofia Matemática e Filosofia da Matemática, pensam que este livro está deslocado nesta *Colecção,* fariam bem em ler o que o próprio autor diz a esse respeito no Prefácio. Não é necessário concordar com o que ele nos sugere como sendo o reajustamento do campo da filosofia motivado pela transferência dela para o campo da matemática de problemas como os de classe, continuidade e infinito, para compreender a relevância das definições e discussões que seguem para os trabalhos da «filosofia tradicional». Se os filósofos não puderem consentir que a crítica a estas categorias seja relegada para as ciências particulares é essencial, em todo o caso, que eles apreciem o significado preciso que a ciência da matemática, na qual estes conceitos desempenham um papel tão grande, lhes atribui. Se, por outro lado, matemáticos houver para quem estas definições e discussões pareçam elaborações e complicações do que é simples, pode ser oportuno recordar-lhes do lado da filosofia que aqui, como noutras paragens, a aparência de simplicidade pode esconder uma complexidade que é da responsabilidade de alguém, filósofo ou matemático, ou, como o autor deste livro, ambas as coisas, desvendar.

J. H. Muirhead

Prefácio do Tradutor (2019)

O livrinho cuja tradução só agora apresento ao público de língua portuguesa é meu conhecido de longa data.[1] Russell e Einstein foram os meus heróis de juventude, e os seus livros constituíam um desafio para o jovem inquisitivo que os lia e tentava perceber. Einstein representava a nova Física, aquela Física revolucionária e «marginal» de que não se falava no ensino liceal. Russell era o grande filósofo e lógico socialmente empenhado. Naquelas partes das obras de Einstein e Russell que conseguia compreender, uma coisa era evidente: a grande clareza da exposição e a preocupação de escrever para um largo público. Isto era, em si mesmo, uma ideia subversiva, na medida em que o pensamento claro e o conhecimento científico e filosófico eram, a meu ver, elementos necessários — imprescindíveis — da luta pela libertação política e cultural dos povos. Continuo a pensar do mesmo modo.

[1] Traduzido do original de Bertrand Russell *Introduction to Mathematical Philosophy,* Londres: George Allen & Unwin, 1919. Edição revista para a versão publicada no Brasil. A primeira versão desta tradução foi concluída em 2006.

A oportunidade para voltar a ler este livrinho e retomar a tradução há muitos anos iniciada surgiu recentemente, por força da análise dos trabalhos de lógica de Edmundo Curvelo (1913-1954), de que me ocupei nos primórdios deste milénio. São por demais evidentes as afinidades filosóficas entre Curvelo e Russell, de um lado, e o movimento conhecido por *Círculo de Viena*, por outro.[2] Também utilizei o livrinho de Russell como referência maior no curso de Filosofia da Matemática do Mestrado em Filosofia das Ciências na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa nos anos lectivos 2005-2009.

Russell é um expoente da chamada corrente logicista na filosofia e fundamentos da matemática, e este livro é, entre outras coisas, uma contribuição popular para a compreensão desta corrente, dos seus objectivos e programa. Uma característica essencial desta corrente é a crença de que a matemática (ou parte da matemática) se pode reduzir à lógica, e um instrumento técnico desta redução é a teoria dos tipos que Russell desenvolveu em várias publicações, com especial relevância para os três volumes dos *Principia Mathematica* (1910-13), em parceria com Alfred North Whitehead. A teoria dos tipos sobrevive como sistema fundacional, mas quando este livro foi escrito começava a tornar-se evidente que os fundamentos da teoria dos tipos não eram de natureza puramente lógica (é o caso, por exemplo, do axioma multiplicativo, p. 149, do axioma do infinito, formulado logo no princípio do Cap. XIII, p. 161, e do axioma da redutibilidade, p. 230), o que desde logo compromete irremediavelmente a pretensão reducionista dos logicistas, mas não compromete aquela parte do programa científico

[2] Ver *Cartas de Edmundo Curvelo a Joaquim de Carvalho (1947-1953)* e outros inéditos, com Introdução e edição por Augusto J. Franco de Oliveira, Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa, 2005. Sobre o logicismo na sua relação com o Círculo de Viena, e as razões do seu declínio, ver Friedrich Stadler, *The Vienna Circle, Studies in the Origins, Development, and Influence of Logical Empiricism,* Springer-Verlag, Viena, 2001, e Stewart Shapiro (editor), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and logic,* Oxford University Press, 2005.

de reconstrução da matemática que é independente de considerações sobre a natureza ora lógica ora matemática das entidades e dos princípios básicos.[3]

Porém, o conteúdo deste livro é em boa parte independente dos pressupostos logicistas, além de valer como exposição elementar dos fundamentos do logicismo como projecto de reconstrução das matemáticas e de alguns tópicos de lógica tradicional que Russell fez progredir significativamente (como a teoria das descrições, Cap. XVI). Por outro lado, o livro realiza um ponto importante na concepção do autor sobre a filosofia matemática: um modo matemático de conceber a filosofia da matemática, demasiado técnico ou exigente para alguns, mas certeiro na pertinência, já então (ver Nota do Editor), e mais ainda na actualidade. Recentemente, num seminário, um estudante de filosofia perguntava quais os conhecimentos básicos, de matemática e lógica moderna, necessários para compreender as polémicas e as correntes filosóficas nos fundamentos da matemática. Indiquei serem necessários, no mínimo, alguns conhecimentos da teoria dos conjuntos (intuitiva, e axiomática) e de alguns dos resultados fundamentais (e suas demonstrações) da lógica matemática no século XX, nomeadamente, dos metateoremas de Gödel (da completude semântica da lógica de 1.ª ordem, 1930, e da incompletude dos sistemas formais, 1931). Acrescento agora que este livrinho, apesar de algumas limitações que comentarei mais adiante e em notas editoriais ao longo do texto, seria um começo muito bom.[4]

Foram duas as preocupações principais nesta tradução, que não foi fácil. Em primeiro lugar, tentar manter o mais possível o estilo

[3] Em boa verdade, o axioma do infinito e o axioma da escolha podem ser tratados como hipóteses adicionais (antecedentes de implicações) de cada teorema que deles depende, mas este artifício não colhe para o axioma da redutibilidade. Sobre a filosofia da matemática (logicismo) de Russell, em particular, ver Nicholas Griffin, *The Cambridge Companion to Bertrand Russell,* Cambridge U.P., 2003.

[4] Outras leituras recomendadas são indicadas na bibliografia final.

e a clareza de exposição do autor. Isto significou resistir à tentação de introduzir no texto símbolos e notações que permitiriam abreviar significativamente algumas passagens, facilitando a leitura ao público com alguma formação matemática, mas criando barreiras dificilmente transponíveis pelos outros públicos que o autor tinha em mente. É necessário saber que Russell teve a intenção de escrever para o grande público e respeitar essa intenção, pois talvez ninguém mais do que ele seria capaz de pautar a exposição com o simbolismo mais feroz e omnipresente alguma vez visto (o simbolismo dos *Principia*).[5] Em segundo lugar, actualizar alguma terminologia e complementar o texto com algumas explicações que julgamos úteis ou imprescindíveis à sua compreensão pelo leitor actual, e algumas indicações bibliográficas especializadas, em notas de rodapé.[6] Também aqui se resistiu à modernização *per se*, pois se é verdade que existem muitos livros modernos e bem escritos sobre a teoria dos conjuntos, a lógica matemática e a filosofia da matemática, não é menos verdade que continua a justificar-se a leitura do livro que Russell realmente escreveu, cujo sucesso editorial ao longo das muitas décadas de sucessivas

[5] Russell diz na conclusão do último capítulo que «É impossível transmitir adequadamente as ideias contidas neste assunto enquanto nos abstivermos do uso de símbolos lógicos.» Deve-se dizer, todavia, que houve progressos notáveis, no sentido da simplificação na simbologia desde a época em que o livro foi escrito e que, actualmente, alguma simbologia lógica não seria tão repulsiva ao leitor moderno como seria a simbologia que Russell utilizaria, se assim tivesse pretendido fazer. Isto explica por que razão não excluímos de algumas notas de rodapé exemplos de simbolização moderna de expressões da lógica elementar, e outras. Não obstante ter sido necessário modernizar alguma terminologia em diferentes capítulos, resistimos a modificações mais profundas como as que seriam necessárias nos capítulos VII, X e XI, por exemplo, para os colocar ao nível do que é de esperar hoje em dia de uma introdução às noções topológicas (limites, continuidade) básicas. Encontrar o equilíbrio ideal nestas opções tem sido preocupação constante que perdurará para além da publicação desta tradução.

[6] Todas as palavras ou observações inseridas no texto ou em notas de rodapé do tradutor (a partir da próxima!) são incluídas entre colchetes [...].

reimpressões, sem quaisquer alterações, deve fazer reflectir os arautos da modernidade pela modernidade.

Augusto J. Franco de Oliveira
Professor Emérito da Universidade de Évora
Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa
ajfrancoli@gmail.com
Outubro de 2019

Sumário

Capítulo I

A Progressão dos Números Naturais

A matemática é um assunto cujo estudo, quando iniciado nas suas partes mais familiares, pode ser conduzido em dois sentidos opostos. O mais comum é construtivo, no sentido da complexidade gradualmente crescente: dos inteiros para os fraccionários, os números reais, os números complexos; da adição e multiplicação para a diferenciação e integração e daí para a matemática superior. O outro sentido, menos familiar, avança, pela análise, para a abstracção e a simplicidade lógica sempre maiores; em vez de indagar o que pode ser definido e deduzido daquilo que se admite no começo, indaga-se que mais ideias e princípios gerais podem ser encontrados, em função dos quais o que fora o ponto de partida possa ser definido ou deduzido. É o facto de seguir este sentido oposto que caracteriza a filosofia matemática, em contraste com a matemática comum. Mas deve ser entendido que a diferença de sentido da pesquisa não está no assunto mas sim no estado de espírito. Os geómetras gregos antigos, ao passarem das regras de agrimensura empíricas egípcias para as proposições gerais pelas quais se constatou estarem aquelas regras justificadas, e daí para os axiomas e postulados de Euclides, estavam praticando a filosofia matemática, segundo a definição acima; porém, uma vez atingidos os axiomas e postulados, o seu emprego dedutivo, como encontramos em Euclides, pertencia à matemática no sentido comum. A distinção entre matemática e filosofia matemática depende do interesse que inspira a pesquisa e da etapa por esta atingida, e não das proposições que ocupam a investigação.

Podemos enunciar a mesma distinção de outra maneira. As coisas mais óbvias e fáceis da matemática não são as que aparecem logicamente no início; são as que, do ponto de vista da dedução lógica, surgem em algum ponto intermédio. Assim como os corpos mais fáceis de ver não são os que se encontram muito perto ou muito longe, nem os muito grandes ou muito pequenos, também as concepções de mais fácil compreensão não são as muito complexas ou as muito simples (usando o termo «simples» no sentido lógico). E, da mesma forma como necessitamos de instrumentos de dois tipos, o telescópio e o microscópio, para ampliarmos o nosso poder visual, necessitamos de dois tipos de instrumento para ampliar a nossa capacidade lógica: um para nos fazer avançar até à matemática superior, outro para levar-nos de volta aos fundamentos lógicos das coisas que somos propensos a aceitar como factos consumados em matemática. Constataremos que, analisando as nossas noções matemáticas ordinárias, adquiriremos uma introspecção renovada, poderes novos e os meios de chegar a assuntos matemáticos inteiramente novos pela adopção de novas linhas de desenvolvimento após a nossa viagem regressiva. O propósito deste livro é simplesmente explicar a filosofia matemática de maneira não técnica, sem demorar nas partes que sejam de tal forma duvidosas ou difíceis que tornem escassamente possível um tratamento elementar. Um tratamento completo das mesmas encontra-se nos *Principia Mathematica*[7]; o tratamento no presente livrinho tem mero carácter de introdução. Para a pessoa de instrução média de hoje, o ponto de

[7] A. N. Whitehead e B. Russell, Cambridge University Press, Vol. I, 1910; Vol. II, 1911; Vol. III, 1913. [Os autores planearam quarto volumes, mas só três foram publicados. Uma versão

partida óbvio da matemática seria a progressão[8] dos números inteiros [positivos]:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \text{ etc.}$$

Provavelmente, só uma pessoa dotada de alguns conhecimentos de matemática pensaria em começar com 0 em vez de 1, mas admitiremos este grau de conhecimento e adoptaremos o ponto de vista de que é à progressão

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots n,\ n+1,\ \ldots$$

a que nos estaremos a referir quando falarmos em «progressão dos números naturais».

Somente numa etapa muito avançada da civilização é que pudemos adoptar esta progressão para ponto de partida. Deve ter sido necessário muitos séculos para a descoberta de que um casal de faisões e um par de dias constituíam, ambos, exemplos do número 2: o grau de abstracção exigido está longe de fácil. E a descoberta de que 1 é um número deve ter sido difícil. Quanto ao 0, constitui uma adição bastante recente; os gregos e os romanos não dispunham de tal dígito. Se nos tivéssemos dedicado à filosofia matemática em tempos mais recuados,

brochada compreendendo apenas uma parte inicial (até à secção 56) do primeiro volume, *Principia Mathematica to* $*56$*,* foi publicada pela mesma editora em 1962.]

[8] [O termo do Autor é «series», cuja tradução literal seria «série», e uma tradução imediata possível seria «sucessão» ou «sequência». Mas o significado técnico do termo «series» é dado no cap. IV, como significando o mesmo que «relação serial» (pág. 43) ou, em moderna terminologia, «relação de ordem total (ou ordem linear) estrita», ou simplesmente «cadeia», e não parece ser exactamente este o conceito envolvido no título e no texto deste capítulo («The series of natural numbers»), que mais parece referir-se ao conjunto dos números naturais (apresentados pela ordem usual ou «natural»). Acontece que os termos «série» e «sucessão» têm significados técnicos bem determinados e distintos, na linguagem matemática (falada e escrita em Portugal). Também só mais adiante é que o Autor define «progressão» e justifica chamar-se progressão à sequência dos números naturais pela ordem natural, daí a utilização do termo na tradução deste capítulo. Noutras ocasiões utilizaremos o termo «sistema» (ou «sistema ordenado»), quando se pretende sublinhar a ordem, excepto quando algum outro termo («sucessão», «sequência», «cadeia») nos pareça tecnicamente mais adequado.]

teríamos sido obrigados a começar com algo menos abstracto do que a progressão dos números naturais, a qual seria atingida nalguma etapa da nossa viagem regressiva. Quando os fundamentos lógicos da matemática se tiverem tornado mais familiares, poderemos começar ainda mais atrás, num ponto que constitui hoje uma etapa avançada da nossa análise. Mas, no momento, os números naturais parece representarem o que é mais fácil e familiar em matemática. Todavia, embora familiares, eles não são bem compreendidos. Pouquíssimas pessoas têm uma definição para o significado de «número» ou «0» ou «1». Não é difícil ver que, partindo de 0, pode-se atingir qualquer outro número natural por adições repetidas de 1, mas é necessário definirmos o que queremos dizer com as expressões «adicionar 1» e «repetir». Estas questões não são de modo algum fáceis. Acreditou-se até recentemente que pelo menos algumas destas primeiras noções de aritmética deviam ser aceites como simples e primitivas demais para que fossem definidas. Como todos os termos definidos o são por meio de outros termos, é claro que o conhecimento humano terá sempre de se contentar em aceitar alguns termos como inteligíveis sem definição, a fim de ter um ponto de partida para as suas definições. Não é aceitável a existência de termos *incapazes* de ser definidos: é possível que, por mais que recuemos nas definições, *possamos* recuar ainda mais. Por outro lado, também é possível que, quando a análise tenha sido levada suficientemente longe, alcancemos termos realmente simples, e, portanto, logicamente incapazes do tipo de definição que importa analisar. Esta é uma questão que não necessitamos decidir; para os propósitos que temos em vista, e atendendo a que os poderes humanos são limitados, basta observar que as definições que nos são conhecidas terão sempre de começar em algum ponto, com termos não definidos no momento, embora talvez não definitivamente.

Toda a matemática pura tradicional, incluindo a geometria analítica, pode ser encarada como consistindo totalmente de proposições sobre os números naturais. Equivale a dizer que os termos que ocorrem