Tópicos em Combinatória Contemporânea

Textuniversitários 4

Carlos Gustavo T. de A. Moreira
Yoshiharu Kohayakawa

Tópicos em Combinatória *Contemporânea*

EDITORIAL

Editora Livraria da Física
São Paulo – 2020

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moreira, Carlos Gustavo T. de A.
Tópicos em combinatória contemporânea / Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Yoshiharu Kohayakawa. – 2. ed. – São Paulo : Editora Livraria da Física, 2020. – (Série textuniversitários ; 4)

Bibliografia.
ISBN 978-85-7861-645-8

1. Análise combinatória 2. Matemática I. Kohayakawa, Yoshiharu. II. Título. III. Série.

20-32845 CDD-511.6

Índices para catálogo sistemático:

1. Análise combinatória : Matemática 511.6

Iolanda Rodrigues Biode - Bibliotecária - CRB-8/10014

ISBN 978-85-7861-645-8

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafisica.com.br

Dedicamos este texto à memória de Paul Erdős (1913-1996)
A combinatória contemporânea existe devido a este
Mago de Budapest

Prefácio da Primeira Edição

Objetivamos neste texto a apresentação de alguns tópicos modernos da combinatória a alunos da graduação. Devido à natureza elementar da área, podemos discutir tópicos não tão distantes da fronteira do conhecimento em um texto como este, voltado a jovens iniciantes. Esperamos que os leitores possam ter uma idéia do que se faz em combinatória hoje através destas notas.

A combinatória é uma área vasta, que continua a crescer vigorosamente. Tópicos de pesquisa que têm se mostrado frutíferos incluem a teoria extremal dos conjuntos, os métodos probabilísticos e os métodos algébricos. Escolhemos alguns dos resultados mais conhecidos nestas linhas de pesquisa para formar uma fotografia da área. Com o intuito de apresentar a combinatória como uma disciplina integrada no grande universo da matemática, procuramos apresentar aplicações dos resultados e das técnicas da combinatória em outras áreas; em particular, damos especial atenção a aplicações em geometria elementar.

No Capítulo 1, discutimos alguns resultados fundamentais da teoria extremal dos conjuntos: discutimos, dentre outros, o teorema de Sperner (1928) e o teorema de Erdős, Ko e Rado (1961). Discutimos também alguns resultados básicos da teoria de Ramsey. Damos duas aplicações do teorema de Sperner (uma à análise/geometria e outra a um problema da teoria dos números). Apresentamos também neste capítulo algumas aplicações da álgebra linear à teoria extremal dos conjuntos. É no Capítulo 2 que apresentamos talvez a aplicação mais espetacular da teoria extremal dos conjuntos nos anos recentes: expomos o contraexemplo de Kahn e Kalai (1993) para a conjectura de Borsuk (1933). Discutimos neste capítulo também o *número cromático* $c(n)$ do $\mathbb{R}^n$, o número mínimo de cores que precisamos usar para colorir os pontos do $\mathbb{R}^n$ se não queremos ter dois pontos à distância 1 da mesma cor. O crescimento exponencial de $c(n)$, conjecturado por Larman e Rogers (1972), foi provado por Frankl e Wilson em 1981. Surpreendentemente, a ferramenta básica deste capítulo é um resultado elementar da teoria extremal dos conjuntos, que pode ser provado através de considerações de independência linear de certos polinômios.

No Capítulo 3, elaboramos um pouco mais a noção de configurações monocromáticas inevitáveis em colorações do $\mathbb{R}^n$: estudamos uma área da teoria de Ramsey conhecida como a *teoria de Ramsey euclideana*; as investigações originais neste tópico foram realizadas por Erdős, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer e Straus no início da década de 1970. Apresentamos neste capítulo alguns resultados mais novos de Frankl, Rödl e Křížž (os resultados realmente recentes estão além do escopo deste texto).

No Capítulo 4, discutimos um método probabilístico poderoso que teve suas origens em um trabalho de Ajtai, Komlós, e Szemerédi (1981), e atingiu seu pleno potencial na demonstração de Rödl (1985) da conjectura de Erdős e Hanani (1963), sobre coberturas e empacotamentos quase-ótimos (sistemas de Steiner aproximados).

Terminamos o Capítulo 4 com alguns resultados recentes sobre coberturas em hipergrafos reuglares.

Supomos que os leitores estão acostumados com argumentos combinatórios elementares e têm familiaridade com noções da álgebra linear, aritmética modular, e teoria elementar das probabilidades.

O leitor perceberá que temos, frequentemente, preocupações assintóticas: muitas vezes definimos uma função $f(n)$ de forma combinatória (tipicamente como o tamanho máximo de algum objeto combinatório, parametrizado pelo inteiro n) e então nos perguntamos se sabemos quanto é $f(n)$ explicitamente, em função de n; caso não consigamos determinar o valor exato de $f(n)$, tentamos estimar $f(n)$ para n grandes. Para apreciar os resultados que apresentaremos, é importante que o leitor tenha familiaridade com a 'hierarquia' das funções mais comuns, como, por exemplo, o fato que

$$1 \ll \log\log n \ll \log n \ll n^{\varepsilon} \ll n^{c} \ll n^{\log n} \ll c^{n} \ll n! \ll n^{n} \ll c^{c^{n}},$$

onde supomos que ε e c são constantes arbitrárias com $0 < \varepsilon < 1 < c$ (escrevemos

$$f(n) \ll g(n)$$

se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0).$$

Ademais, o leitor terá maior facilidade em acompanhar a 'substância' do que estamos discutindo em várias ocasiões se ele tiver familiaridade com estimativas para fatoriais e coeficientes binomiais. Com isto em mente, compilamos um pequeno apêndice com algumas estimativas padrões para $n!$ e para expressões envolvendo coeficientes binomiais.

É com imenso prazer que agradecemos à organização do *23° Colóquio Brasileiro de Matemática* pelo apoio e oportunidade de ampla divulgação deste material.

Finalmente, agradecemos o apoio do CNPq através do PRONEX (projetos 416/96 e 107/97) e dos auxílios 300334/93–1, 300647/95–6, 910064/99–7 e 468516/2000–0. Agradecemos também o apoio da FAPERJ e da FAPESP.

Carlos Gustavo T. de A. Moreira
IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada
gugu@impa.br

Yoshiharu Kohayakawa
Instituto de Matemática e Estatística, USP
yoshi@ime.usp.br

Rio de Janeiro,
São Paulo,
2001

Prefácio da Segunda Edição

Este livro é uma reedição do texto de mesmo título que preparamos para um curso no 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, em 2001, e que foi editado pelo IMPA. Agradecemos à LF Editorial a oportunidade de republicá-lo. Achamos que seria uma boa oportunidade para termos uma nova versão física do livro disponível para os leitores, especialmente para os estudantes interessados no assunto. Nesta edição incluímos algumas pequenas atualizações, relativas a números de Ramsey (no Capítulo 1) e à conjectura de Borsuk (no Capítulo 2).

Carlos Gustavo T. de A. Moreira
Yoshiharu Kohayakawa

Rio de Janeiro,
São Paulo,
Janeiro de 2020

Sumário

Notações e Alguns Termos de uso Frequente

$[n] = \{1, \ldots, n\}$

$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subset X\}$, o conjunto das partes de X

k-*conjunto*: um conjunto com k elementos

Sistemas de conjuntos, hipergrafos: um sistema de conjuntos nada mais é que um conjunto de subconjuntos de um conjunto fixo. Um hipergrafo é um sistema de conjuntos cujos membros têm todos a mesma cardinalidade.

$\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, $\{x\}$: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x e $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$. Escrevemos $\{x\}$ para a parte fracionária de x, isto é, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

$|x|$, $\|x\|$, $|X|$: se x é um vetor em um espaço euclideano, então $\|x\|$ denota a norma euclideana de x. Por simplicidade, usamos também a notação $|x|$ para a norma de x. Para um conjunto X, escrevemos $|X|$ para a cardinalidade de X.

$\binom{x}{k}$, $\binom{X}{k}$: escrevemos $\binom{x}{k}$ para o coeficiente binomial, que é definido como $(x)_k/k! = x(x-1)\ldots(x-k+1)/k!$ se k é um inteiro não negativo e é 0 se k é um inteiro negativo. Se X é um conjunto,

$\binom{X}{k}$ é o conjunto $\{Y \subset X : |Y| = k\}$ dos k-subconjuntos de X. Claramente, $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$.

$O(f(n))$, $o(f(n))$: escrevemos $O(f(n))$ para qualquer função $g(n)$ satisfazendo $|g(n)| \leq Cf(n)$ para todo $n \geq n_0$, onde C e n_0 são constantes. Escrevemos $o(f(n))$ para qualquer função $g(n)$ satisfazendo $\lim_{n\to\infty} g(n)/f(n) = 0$; em particular, $o(1)$ denota uma quantidade que tende a 0.

$\sim$, $\ll$, $\gg$: escrevemos $f(n) \ll g(n)$ se $f(n) = o(g(n))$. Ademais, às vezes escrevemos $f(n) \sim g(n)$ se $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$.

1

Uma Introdução à Teoria Extremal dos Conjuntos

1.1 Introdução

Neste capítulo, discutimos alguns resultado fundamentais da teoria extremal dos conjuntos. Nós nos restringiremos a alguns resultados apenas, abrindo assim espaço para algumas aplicações um pouco mais elaboradas. Esperamos que este capítulo sirva como uma introdução a esta rica área da combinatória, mas também esperamos que o leitor que tenha seu interessado despertado consulte os excelentes textos de Anderson [5], Babai e Frankl [8], e Bollobás [12].

1.2 Dois teoremas extremais clássicos

Começamos discutindo dois teoremas clássicos, que são possivelmente os dois resultados mais conhecidos da teoria extremal dos conjuntos: o teorema de Sperner de 1928 e o teorema de Erdős, Ko, e Rado, provado em 1938, mas publicado apenas em 1961.

1.2.1 O teorema de Sperner

Começamos com uma observação da teoria elementar dos números.

1.2.1.1 Um problema extremal da teoria dos números

Dados $n+1$ inteiros distintos de $[2n] = \{1, \ldots, 2n\}$, não é difícil ver que há dois elementos desta sequência que são relativamente primos (exercício!). Por outro lado, um pouco mais de meditação também revela que há dois elementos nesta sequência com um dividindo o outro. Esta segunda afirmação é um exercício um pouco mais difícil (sugestão: escreva cada um dos $n+1$ números na forma $2^k m$, onde m é um inteiro ímpar).

Podemos enunciar a segunda afirmação acima da seguinte forma: *o maior número de elementos que podemos ter de* $[2n]$ *sem ter dois elementos, digamos* x *e* y*, com* x *dividindo* y *é* n. Note também que este limitante de n não pode ser melhorado, pois podemos considerar os n números $n+1, \ldots, 2n$.

1.2.1.2 Um problema extremal para conjuntos

Passemos agora a considerar *problemas extremais* análogos para conjuntos. Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$ uma família de conjuntos. O que podemos dizer sobre o tamanho de $\mathcal{A}$ se sabemos que $\mathcal{A}$ *não* contém dois membros, digamos A e B, com $A \subset B$? Seja $f(n)$ a maior cardinalidade possível para tal família $\mathcal{A}$.

Uma primeira observação que podemos fazer é que

$$f(n) \geq \binom{n}{k}, \tag{1.1}$$

para todo k. De fato, se tomamos para $\mathcal{A}$ a família de todos os subconjuntos de $[n]$ com k elementos, então a propriedade que