Fundamentos de SAAMM

Simplified Approximate Analytical Mathematical Method

LF EDITORIAL

Regiane Aparecida Ragi Pereira

Fundamentos de SAAMM

Simplified Approximate Analytical Mathematical Method

EDITORIAL

2024

1ª Edição

Direção editorial: José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro
Revisor técnico: Murilo Araujo Romero

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Pereira, Regiane Aparecida Ragi
Fundamentos de SAAMM: simplified approximate analytical mathematical method / Regiane Aparecida Ragi Pereira. – São Paulo: Livraria da Física, 2023.

Vários autores.
Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-401-3

1. Cálculos numéricos - Programas de computador 2. Ciência da computação
3. Logaritimos I. Título.

23-182166 CDD-004

Índices para catálogo sistemático:
1. Ciência da computação 004

Tábata Alves da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9253

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br
(11) 3815-8688 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Sumário

"Inspiração existe, mas ela precisa te encontrar trabalhando." (Pablo Picasso).

Introdução

O modelo SAAMM refere-se ao Método Analítico Matemático Aproximado Simplificado, ou, em inglês, Simplified Approximate Analytical Mathematical Method (SAAMM), que é uma técnica matemática para resolver analiticamente, de forma aproximada, equações polinomiais, transcendentais e diferenciais, desenvolvida por nós, podendo ser usada para resolver uma ampla gama de problemas em engenharia, física e outras áreas de ciência aplicada. SAAMM é uma técnica relativamente simples que pode ser aplicada com facilidade, mesmo sem conhecimentos matemáticos avançados. Devido à sua simplicidade e eficiência, o modelo SAAMM também pode ser usado como uma ferramenta educacional para ensinar alunos do ensino médio a fazer cálculos diversos. Quando a solução de problemas envolve funções transcendentais, ao aplicarmos SAAMM (Simplified Approximate Analytical Mathematical Method) podemos utilizar apenas os primeiros termos das séries de Taylor de uma função para construir uma expressão analítica aproximada da função desejada. As séries de Taylor são representações matemáticas que descrevem uma função em termos de uma soma infinita de termos polinomiais. Essas séries permitem aproximar uma função complicada por meio de um número finito de termos, levando em conta as derivadas da função em um ponto específico. Ao considerar apenas os primeiros termos, é possível capturar o comportamento essencial da função em torno desse ponto e obter uma aproximação adequada. Quanto mais termos da série de Taylor forem utilizados, maior será a precisão da aproximação. A utilização das séries de Taylor associado ao SAAMM permite obter aproximações analíticas mais simples e elegantes das funções, mantendo um bom nível de precisão. O SAAMM é de fato uma abordagem ligeiramente diferente das tradicionalmente apresentadas em cursos acadêmicos. Seu objetivo principal é fornecer expressões analíticas matemáticas aproximadas e simplificadas, que sejam úteis em situações em que a obtenção de uma solução exata é difícil ou complexa. Nos cursos tradicionais, é comum aprendermos métodos analíticos exatos para resolver problemas matemáticos. Esses métodos fornecem soluções exatas que seguem rigorosamente as propriedades matemáticas das funções e equações envolvidas. No entanto, em muitos problemas reais em ciências e engenharia, é difícil obter uma solução exata utilizando apenas os métodos analíticos tradicionais. Isso ocorre principalmente quando as equações são complexas ou envolvem funções transcendentais, sistemas não lineares, equações diferenciais não triviais, entre outros desafios matemáticos. É nesse contexto que o SAAMM se destaca. Ele oferece uma abordagem alternativa, baseada em aproximações analíticas simplificadas, que podem fornecer resultados úteis e suficientemente precisos para muitas aplicações práticas. O SAAMM não visa substituir os métodos analíticos exatos tradicionais, mas sim complementá-los, oferecendo uma alternativa quando uma solução exata é inatingível ou computacionalmente custosa. Ele busca equilibrar a precisão necessária com a simplicidade da expressão analítica obtida, permitindo uma análise mais rápida e eficiente dos problemas em questão.

Capítulo 1 – Método Analítico Aproximado Simplificado

Neste capítulo, vamos apresentar o Método Analítico Matemático Aproximado Simplificado, ou, em inglês, *Simplified Approximate Analytical Mathematical Method*, também chamado por nós de SAAMM, cujos detalhes serão discutidos a seguir.

O Método

Chamamos Método Analítico Matemático Aproximado Simplificado (SAAMM) a técnica na qual substituímos numa função real, f(x), a variável real, x, por,

$$x = \begin{cases} \theta + U, & se \ \ (x - U) > 0 \\ -\theta + U, & se \ \ (x - U) < 0 \end{cases} \tag{1}$$

para escrever uma expressão aproximada, $f(\theta)$[1], em termos de θ. Na Eq. (1), θ é uma variável real, de valor pequeno, $\theta \ll 1$, e U é um valor definido por

$$U = m/j, \tag{2}$$

com j um valor inteiro muito grande, na prática, arbitrário, e

$$m = inteiro\{jx\}, \tag{3}$$

o valor inteiro mais próximo que se obtém a partir do produto jx. Baseado nisso, podemos escrever a Definição 1.

Definição 1

> Seja $f(\theta)$ uma função definida para valores de θ em um certo domínio. A aproximação baseada nessa definição estabelece que, à medida que o inteiro j aumenta, o valor absoluto de $f(\theta)$ diminui:
>
> $$\lim_{j \to \infty} |f(\theta)| = 0$$

---

[1] Na prática, quando utilizamos esse recurso para calcular equações polinomiais ou transcendentais, basta trabalhar com uma das opções, $(x - U) > 0$ ou $(x - U) < 0$, e depois, simplesmente, retornar para o resultado em x.

O SAAMM pode ser bem sucedidamente empregado em diversas tarefas, entre elas, para escrever aproximações para funções transcendentais, para resolver de forma aproximada equações polinomiais e/ou transcendentais, para resolver equações diferenciais, ou para resolver integrais, desde que, estabelecidas adequadamente as condições de validade das constantes utilizadas na aproximação. Neste capítulo, o objetivo é fornecer ao leitor uma compreensão mais profunda do Método Analítico Aproximado Simplificado (SAAMM) por meio da aplicação desse método em casos específicos que são muito úteis para resolver problemas em ciências e engenharia. Esses casos envolvem as funções trigonométricas, hiperbólicas, exponenciais e logarítmicas. Ao aplicar SAAMM a essas funções, o capítulo visa ilustrar como o método pode ser usado para obter funções aproximadas para essas funções. Isso permite que o leitor entenda como o SAAMM funciona na prática e como as aproximações obtidas podem ser aplicadas em diversos problemas técnicos e científicos. Ao aplicar o SAAMM às funções trigonométricas, hiperbólicas, exponenciais e logarítmicas, o capítulo demonstrará passo a passo como encontrar as funções aproximadas correspondentes. Levando em conta os primeiros termos das Séries de Taylor, das funções, o método fornece expressões analíticas aproximadas e simplificadas suficientemente precisas para diversos trabalhos. Ao final do capítulo, espera-se que o leitor tenha uma compreensão sólida do SAAMM e seja capaz de aplicar esse método em outras situações além das funções mencionadas. Com base nos exemplos fornecidos, o leitor terá adquirido conhecimentos práticos que podem ser adaptados e utilizados em uma ampla gama de problemas técnicos e científicos, para que o leitor compreenda melhor o funcionamento do SAAMM e sua utilidade na resolução de problemas em ciências e engenharia, em geral. Um primeiro problema que gostaríamos de discutir, é o das funções trigonométricas.

Aplicação de SAAMM à diversas funções matemáticas

Funções trigonométricas

Problema 1

Obtenha uma expressão, linear, aproximada para a função,

$$f(x) = \sin(x) \tag{4}$$

baseada no Método Analítico Aproximado Simplificado (SAAMM), e compare o resultado da função aproximada com um resultado de referência. Calcule também o erro relativo da aproximação.

Nosso objetivo nesse exercício é encontrar uma função aproximada, para a função $\sin(x)$, usando a Definição 1. Dessa forma, podemos considerar, $x = \theta + U$, e escrevermos:

$$\sin(x) = \sin(\theta + U)$$

com $U = m/j,\ j$ um número inteiro e $m = inteiro\{jx\}$.

Aplicando-se as propriedades das funções trigonométricas, obtemos,

$$\sin(\mathrm{x}) = \sin(\theta)\cos(\mathrm{U}) + \sin(\mathrm{U})\cos(\theta). \tag{5}$$

Em seguida, vamos utilizar os resultados fornecidos pelas expansões em Série de Taylor das funções, f(x), estudadas:

$$f(x) \sim \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{j}(a)}{j!}(x-a)^{j} \tag{6}$$

com $n\ \in\ \mathbb{N}$. As funções sin (θ) e $\cos(\theta)$ na Eq. (5) podem ser escritas, respectivamente, em termos de suas Séries de Taylor, dada por:

$$sin(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} \tag{7}$$

$$cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!}\theta^{2n} \tag{8}$$

com n um número inteiro, e θ, um número real, pequeno. Como em geral estamos interessados em representar essas expressões de forma mais simplificada possível, vamos, primeiramente, expandir as séries das Eqs. (7) e (8) até n = 1, de modo que podemos escrever,

$$sin(\theta) \cong \theta \tag{9}$$
$$cos(\theta) \cong 1 \tag{10}$$

Assim, a Eq. (5) pode ser reescrita como,

$$\sin(\mathrm{x}) \cong \theta\cos(\mathrm{U}) + \sin(\mathrm{U}). \tag{11}$$

Partindo da Eq. (1), podemos voltar a expressão de sin(x), somente em termos de x, assumindo-se, $\theta = x - U$. Assim, podemos escrever, $fsin(x)$, a função aproximada para a função sin(x), como,

$$\sin(\mathrm{x}) \cong Sx + (T - SU) = fsin(x), \tag{12}$$

com

$$S = \cos\,(U) \tag{13}$$
$$T = \sin\,(U) \tag{14}$$

e, $\mathrm{U} = \mathrm{m}/\mathrm{j}$ e $m = inteiro\{jx\}$, como descrito na Definição 1.

Problema 2

Analise graficamente o resultado obtido na Eq. (12) e calcule o erro relativo da aproximação, considerando, $\mathrm{j} = 2, 32$ e 10000. Discuta o papel de j na aproximação.

Figura 1 – Sin(x) e fsin(x)

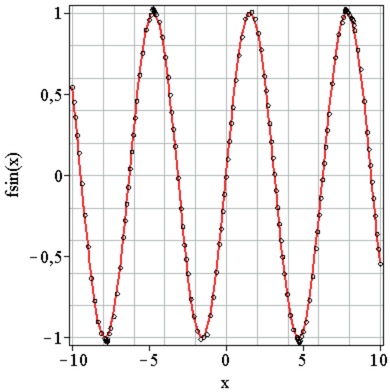
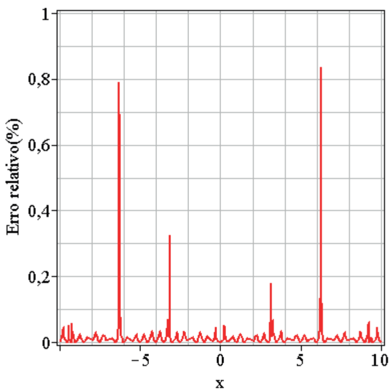


Figura 2 - Erro relativo (j = 2)



A comparação entre os resultados pedidos no Problema 2 pode ser avaliada analisando-se a Figura 1 e a Figura 2. Na Figura 1 vemos a comparação entre as curvas, sin(x) e fsin(x), sendo a linha sólida a curva obtida para sin(x) e a curva de pontos os resultados fornecidos pela aplicação direta da Eq. (12). Quando j = 2, o erro relativo da aproximação pode chegar a 1 %, o que corresponde ao pior cenário da aproximação.

Figura 3 – Sin(x) e fsin(x)

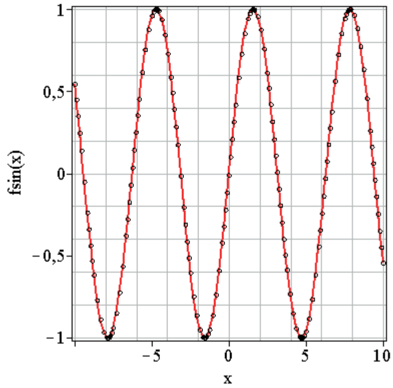
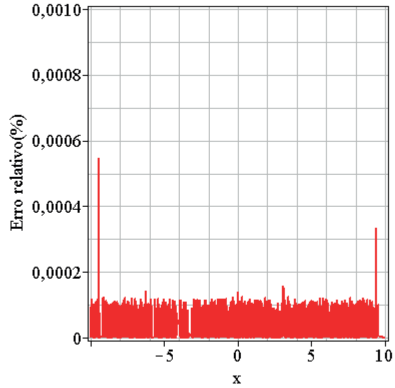


Figura 4 - Erro relativo (j = 32)



Entretanto, essa precisão pode ser melhorada, quando consideramos, j = 32. Neste caso, o erro relativo pode chegar a 0.0006 %. Isso pode ser verificado, analisando-se o resultado mostrado na Figura 3 e na Figura 4. Como é possível ver a partir das análises anteriores, à medida que j cresce, o erro relativo para esse caso, diminui de forma significativa, alcançando no máximo até 10^{-9} %, quando j = 10000, o que representa uma excelente precisão para muitos trabalhos. Entretanto, dependendo da aplicação a qual se destine, se maior precisão for necessária em um determinado trabalho, mais termos das Séries de Taylor, Eqs. (7) e (8), podem ser consideradas. Veja o exemplo do Problema 3.

Problema 3

Analogamente, ao Problema 1, obtenha uma expressão quadrática, aproximada para a função, $f(x) = \sin(\mathrm{x})$, dada por

$$fsin(x) = -\frac{T}{2}x^2 + (S + TU)x + \left(T - SU - \frac{TU^2}{2}\right) \qquad (15)$$

baseada no Método Analítico Aproximado Simplificado (SAAMM), e compare o resultado da função aproximada com um resultado de referência. Calcule também o erro relativo da aproximação.

Nesse problema, vamos expandir as séries das Eqs. (7) e (8) até n = 2, de modo que podemos escrever,

$$sin(\theta) \cong \theta \tag{16}$$

$$cos(\theta) \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} \tag{17}$$

Assim, a Eq. (5) pode ser reescrita como,

$$\sin(x) \cong \theta \cos(U) + \sin(U)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right). \tag{18}$$

Partindo da Eq. (1), podemos voltar a expressão de sin(x) somente em termos de x, fazendo valer, $\theta = x - U$. Assim, podemos escrever, fsin(x), a função aproximada quadrática para a função sin(x), como,

$$fsin(x) = -\frac{T}{2}x^2 + (S + TU)x + \left(T - SU - \frac{TU^2}{2}\right) \tag{19}$$

com $\mathrm{S} = \cos(\mathrm{U})$, $\mathrm{T} = \sin(\mathrm{U})$, $\mathrm{U} = \mathrm{m}/\mathrm{j}$ e $m = inteiro\{jx\}$.

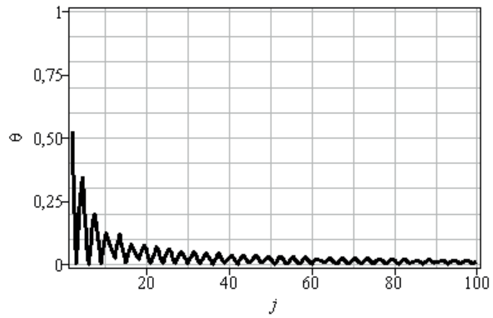
Para compreender melhor o papel de j nas aproximações obtidas aplicando-se SAAMM, veja o Problema 4.

Problema 4

Partindo da Definição 1, mostre graficamente, que, para qualquer valor de x, θ tende à zero, à medida que j cresce. Discuta as implicações desse fato nas aproximações obtidas nos problemas anteriores.

Tomando por exemplo, $x = \pi/3$, a Figura 5 ilustra o papel de j, na aproximação usada, garantindo que θ tende à zero, à medida que j cresce, fazendo com que as expansões em Séries de Taylor em θ, sejam cada vez mais, muito precisas, de onde vem todo o sucesso do método SAAMM.

Figura 5 – θ em função de j quando x = π/3.



Problema 5

Mostre como o Método Analítico Aproximado Simplificado (SAAMM) pode ser usado para fornecer cálculos rápidos e à mão para o seno de vários argumentos, como aqueles descritos abaixo:

Tabela 1

$\theta(°)$	$\theta(rad)$	2U	S	T	$fsin(\theta)$	sin (θ)	$Erro_r$
2	$\pi/90$						
7	$7\pi/180$						
21	$7\pi/60$						
32	$8\pi/45$						
72	$2\pi/5$						
81	$9\pi/20$						
135	$3\pi/4$						
183	$61\pi/60$						

Calcule também o valor do erro relativo da aproximação, $Erro_r$, associado a cada argumento, usando a relação:

$$Erro_r = \left(\frac{\sin(\theta) - fsin(\theta)}{\sin(\theta)}\right).$$

Curiosamente, os conceitos apresentados na Definição 1, podem ser um excelente aliado no ensino de matemática elementar, usando por exemplo, a Eq. (19), dada por:

$$fsin(x) = -\frac{T}{2}x^2 + (S + TU)x + \left(T - SU - \frac{TU^2}{2}\right)$$

para se obter o valor do seno aproximado de vários argumentos, de forma rápida e à mão. Neste caso devemos fazer uma pequena readaptação do método, apresentado na Definição 1, reescrevendo, U e m, de uma maneira mais conveniente para a realização de cálculos à mão, o que pode ser obtido, considerando:

$$U = m\pi/j, \tag{20}$$

$$m = inteiro\left\{\frac{jx}{\pi}\right\}, \tag{21}$$

embora seja necessário observar que, dessa forma, as aproximações obtidas possam perder alguma precisão, mas, estamos interessados aqui, apenas nos aspectos didáticos que esse exercício levanta. Usando propriedades trigonométricas, podemos reescrever, $\mathrm{S} = \cos(U)$ e $\mathrm{T} = \sin(U)$, de uma forma mais convenientemente:

$$\mathrm{S} = \sqrt{\frac{1}{2}[1 + \cos(2U)]}$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - \cos(2U)]}$$

permitindo construir facilmente a Tabela 2, quando consideramos, j = 4. Os resultados para o sin(x) aproximado obtido com a Eq. (19) possui um erro associado inferior a 2.5 %, o que pode ser usado para algumas finalidades, como por exemplo, a demonstração de cálculos à mão com a fórmula mostrada na Eq. (19). Para outras aplicações, entretanto, pode-se usar altos valores de j, que permite obter resultados muito mais preciso com a mesma fórmula.

Tabela 2

$\theta(°)$	$\theta(rad)$	2U	S	T	$fsin(\theta)$	sin (θ)	$Erro_r$

2	$\pi/90$	0	1	0	0.0349	0.0349	0.0203
7	$7\pi/180$	0	1	0	0.1222	0.1219	0.2492
21	$7\pi/60$	0	1	0	0.3665	0.3584	2.2700
32	$8\pi/45$	$\pi/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5285	0.5299	0.2738
72	$2\pi/5$	π	0	1	0.9506	0.9510	0.0425
81	$9\pi/20$	π	0	1	0.9877	0.9877	0.0026
135	$3\pi/4$	$3\pi/2$	-$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.7071	0.7071	0.0000
183	$61\pi/60$	2 π	-1	0	-0.0523	-0.0523	0.0457

Note que, a utilização de U e m, como escritos nas Eqs. (20) e (21), somente devem ser usados, preferencialmente, em caráter didático, para demonstrar com essa ferramenta, cálculos rápidos e à mão, sendo que em todos os demais casos, devem-se usar as Eqs. (2) e (3), que garantem maior precisão aos resultados. É importante ressaltar que todos os resultados apresentados até o momento podem ser empregados para calcular o argumento de qualquer função trigonométrica, como pode ser visto nos problemas a seguir.

Problema 6

Com base nos conceitos discutidos até este momento, mostre que podemos escrever uma função analítica aproximada linear para o cosseno de um argumento, x, dada por

$$f cos(x) = -\mathrm{T}x + (\mathrm{S} + \mathrm{TU}) \quad (22)$$

baseada no Método Analítico Aproximado (SAAMM), e compare o resultado da função aproximada com um resultado de referência. Calcule também o erro relativo da aproximação.

Problema 7

Analogamente, ao Problema 1, obtenha uma expressão quadrática, aproximada para a função, $f(x) = \cos(x)$, baseada no Método Analítico Aproximado Simplificado (SAAMM), dada por

$$f sin(x) = -\frac{S}{2}x^2 + (SU - T)x + \left(S + TU - \frac{SU^2}{2}\right) \quad (23)$$