Equações Diferenciais

Exercícios Resolvidos e Propostos (Volume 1)

LF Editorial

Equações Diferenciais

Exercícios Resolvidos e Propostos (Volume 1)

Daniela dos Santos de Oliveira
Edmundo Capelas de Oliveira

2024

1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, D. Santos de
Equações diferenciais: exercícios resolvidos e propostos: volume 1 / Daniela dos Santos de Oliveira, Edmundo Capelas de Oliveira. – São Paulo: Livraria da Física, 2024.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-410-5

1. Álgebra linear 2. Equações diferenciais 3. Equações - Problemas, exercícios etc.
I. Oliveira, E. Capelas de. II. Título.

24-188481 CDD-515.35

Índices para catálogo sistemático:
1. Equações diferenciais: Matemática 515.35

Tábata Alves da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9253

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br
(11) 3815-8688 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Sumário

Prefácio

Em princípio, não parece difícil escrever sobre o tema equações diferenciais, pois existem vários textos que discorrem sobre o assunto, tanto em nível introdutório quanto especializado. Encontramos na literatura vários textos que abordam em separado as equações diferenciais ordinárias e as equações diferenciais parciais, bem como aquelas lineares daquelas não lineares e, enfim, livros que abordam apenas técnicas para a possível resolução envolvendo o caráter numérico, isto é, utilizando *softwares* específicos para a discussão da solução.

Esse texto, dividido em dois volumes, difere da grande maioria dos textos, pois aborda as equações diferenciais ordinárias e parciais visando, principalmente, o estudante de engenharia por entender que uma disciplina de equações diferenciais desempenha papel crucial na vida de um futuro engenheiro, uma vez que ele vai se deparar com situações reais onde o tema está presente. Apenas para mencionar, aplicações de equações diferenciais ordinárias, podem ser encontradas em problemas de oscilações (massa-mola) e circuitos elétricos, enquanto aplicações de equações diferenciais parciais, podem ser encontradas em problemas de difusão (equação do calor), na eletrostática (equações de Laplace e Poisson) e propagação de onda (equação da onda), dentre muitos outros.

Como já acenamos, são muitas as possibilidades de uma classificação, pois o tema é amplo e comporta várias frentes de abordagem. Aqui, em sendo um texto introdutório no sentido de fazer com que o estudante se sinta apto a enfrentar problemas similares, temos como objetivo o estudo de métodos analíticos para a resolução de equações diferenciais lineares. Com este norte, não vamos nos preocupar com as equações diferenciais não lineares e nem tampouco com métodos numéricos. Em se tratando de um curso introdutório, sempre que necessário, vamos mencionar uma particular referência, no seguinte sentido, por exemplo, se ao resolvermos uma equação diferencial emergir as chamadas funções especiais da física-matemática indicamos um texto onde o estudante poderá aprofundar seus conhecimentos.

Temos como objetivo principal apresentar métodos analíticos para a resolução de equações diferenciais sendo que os exemplos serão discutidos no que chamamos de passo a passo, isto é, a resolução de um problema será feita com suas passagens intermediárias a fim de que o estudante possa, com uma leitura direcionada para o tema, seguir as passagens que se fazem necessárias de modo que a obtenção da solução do problema seja uma tarefa simplificada no sentido de sedimentar a teoria envolvida. É importante ressaltar que estamos focando na resolução e não na teoria em si, isto é, apresentamos apenas o básico da teoria necessária a fim de que a abordagem do problema seja uma consequência natural da metodologia envolvida. Ainda que tenhamos direcionado nosso foco para as equações diferenciais lineares, várias outras divisões e/ou classificações são possíveis como, por exemplo, equações com coeficientes constantes e equações não homogêneas, dentre outras.

Passemos, então, a ordenação do texto em seus dois volumes para, depois, discorrer sobre o conteúdo específico de cada um dos capítulos. Começamos no primeiro volume com as equações diferenciais lineares e as séries de Fourier enquanto, no segundo volume as transformadas de Fourier e Laplace, como metodologias para a resolução das equações diferenciais ordinárias e parciais. No primeiro capítulo do primeiro volume apresentamos as equações diferenciais ordinárias com destaque para métodos elementares de integração, dentre eles, redução de ordem, coeficientes a determinar e o clássico método de Frobenius. Concluímos o capítulo com sistemas lineares. As séries de Fourier são apresentadas no segundo capítulo, com destaque para as formas alternativas e as séries de Fourier-Bessel e Fourier-Legendre que desempenham papel importante quando da separação de variáveis nos sistemas de coordenadas cilíndrico e esférico, respectivamente.

No primeiro capítulo do segundo volume apresentamos as transformadas de Fourier e Laplace que, também, desempenham papel importante na resolução de equações diferenciais lineares, sejam elas ordinárias ou parciais. Aproveitamos para introduzir o conceito de função degrau e função delta de Dirac que, ainda que não sejam funções no sentido estrito da palavra, merecem um destaque pela sua grande utilidade. O problema da inversão das transformadas é tratado sem o uso das variáveis complexas, tema este que foge do escopo do presente texto. O segundo capítulo conta com o estudo das equações diferenciais parciais lineares destacando aquelas de primeira e segunda ordens. Apresentamos o método das características e o clássico método de separação de variáveis que, com o conteúdo apresentado nos capítulos anteriores, permite discutir e resolver uma equação diferencial parcial linear.

O texto, em dois volumes, conta com uma série ampla e diversificada de exercícios selecionados de modo a cobrir toda a parte teórica apresentada no texto e, ao final, uma lista de exercícios para o estudante resolver os quais contam com respostas e/ou sugestões.

Por fim, gostaríamos de agradecer aos leitores e suas possíveis contribuições.

Os autores.

Capítulo 1

Equação diferencial ordinária

Ainda que tenhamos mais de um tipo de equação diferencial, optamos por deixar o título do capítulo no singular, pois no desenvolver da teoria, vamos apresentar as equações diferenciais ordinárias, homogêneas e não homogêneas, as equações diferenciais de primeira ordem, dentre outras, porém sendo elas, uma particular equação diferencial ordinária.

É bem provável que você já tenha ouvido falar em equação diferencial, eventualmente equação diferencial ordinária e/ou equação diferencial parcial, que, em muitos casos, pode ser reduzida a um conjunto de equações diferenciais ordinárias, porém provavelmente, não associou o conceito com o particular nome. A título de motivação mencionamos, a equação diferencial que descreve a queda de um corpo sob o efeito do campo gravitacional, uma equação diferencial ordinária, e a equação diferencial associada a problemas ondulatórios, neste caso uma equação diferencial parcial.

Visto que o campo de estudo das equações diferenciais é muito extenso, devemos, desde o princípio, restringir nosso estudo. Este capítulo visa introduzir o conceito matemático associado às equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordens, em particular, as lineares. Atenção especial será dada às equações diferenciais ordinárias, lineares e de segunda ordem com coeficientes constantes e, no caso dos coeficientes não constantes, apresentamos algumas particulares dentre elas a equação tipo Euler.

De modo a concluir a seção envolvendo as equações diferenciais ordinárias, apresentamos o método de Frobenius, introduzido através de uma equação de Bessel, associada a problemas com geometria cilíndrica. A equação de Legendre, uma equação diferencial ordinária com coeficientes não constantes, associada a problemas com geometria esférica, também será abordada. A segunda seção aborda os problemas de valor inicial e de fronteira que serão discutidos especificamente através de aplicações. O conceito de sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, envolvendo o mínimo da álgebra matricial e o conceito de exponencial de uma matriz, concluem o capítulo.

A teoria será apresentada de forma descritiva e operacional, com ênfase em algumas técnicas de resolver uma particular equação diferencial ordinária e um sistema de equações diferenciais ordinárias, em particular visando a obtenção da solução analítica da respectiva equação e/ou do sistema de equações. Sempre que possível, um exemplo seguirá imediatamente após o conceito apresentado. Ainda mais, neste texto não abordamos métodos numéricos nem tampouco métodos computacionais. Ao final do capítulo o estudante encontrará uma lista de exercícios resolvidos bem como uma outra lista para exercitação, todos com resposta e/ou sugestão, a fim de solidificar a teoria brevemente apresentada no texto, bem como uma bibliografia especializada onde pode ser encontrado o material visando um aprofundamento do tema.

Como deve ter ficado claro, apenas com esse mínimo introdutório, a nomenclatura desempenha papel crucial, afinal são vários nomes. Iniciamos o capítulo com uma parte introdutória sobre a nomenclatura e as definições necessárias para o desenvolver do texto.

1.1 Preliminares

Nesta seção, vamos abordar as definições das equações diferenciais ordinárias e parciais, apresentar os conceitos de linearidade e de não linearidade, homogeneidade e não homogeneidade, ordem, domínio de validade, condições inicial e de fronteira, além, é claro, da respectiva notação, dentre outros. Ainda mais, vamos propor uma possível classificação das equações diferenciais, no sentido de restringir a parte teórica ao mínimo indispensável, de modo que nosso estudo seja simples e objetivo, sem que nos preocupemos em demasia com o arcabouço da estrutura matemática formal. Neste livro $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}^*$ o conjunto dos números reais exceto o zero, enquanto $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais estritamente positivos.

DEFINIÇÃO 1.1.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIA E PARCIAL

Seja $x \in \mathbb{R}$. Chama-se equação diferencial ordinária à relação funcional entre uma função incógnita, denotada por $y(x)$, de uma única variável independente, denotada por x, e suas derivadas, além da própria variável independente. Por outro lado, uma equação diferencial é chamada parcial se contém mais de uma variável independente.

Antes de passarmos a um exemplo, a fim de apresentar a notação, mencionamos que aqui começa a nossa classificação. Neste capítulo não vamos abordar o estudo de equações diferenciais parciais, estudo que terá o Capítulo 2 (volume 2), a ele dedicado.

Exemplo 1.1. Notação

A situação mais geral de uma equação diferencial ordinária é

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2},\cdots\right)=0\cdot$$

Note que x é a única variável independente e y a variável dependente, $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$ a derivada primeira da variável dependente em relação à variável independente, $\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}$, a derivada segunda da variável dependente em relação à variável independente e F caracteriza a relação funcional, neste caso numa forma implícita.

Por outro lado, para uma equação diferencial parcial, escrevemos

$$F\left(x,y,z,\ldots,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\ldots,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\ldots\right)=0\cdot$$

Aqui temos várias variáveis independentes $x,y,z,\ldots$, uma única variável dependente (incógnita) $w=w(x,y,z,\ldots)$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$, as derivadas primeiras da variável dependente em relação às variáveis independentes x e y, enquanto $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$, denotam as derivadas segundas da variável dependente em relação às variáveis independentes, x e x,y, respectivamente, e F, na forma implícita, caracteriza a relação funcional. Ainda mais, a notação para a derivada parcial $\underline{\partial}$ a fim de distinguir da derivada ordinária, $\underline{\mathrm{d}}$. Como já mencionamos, as equações diferenciais parciais serão apresentadas no Capítulo 2 (volume 2).

Definição 1.1.2. Ordem

Definimos ordem de uma equação diferencial ordinária como sendo aquela da mais alta derivada presente na equação diferencial.

Antes de apresentarmos um exemplo específico relativo ao conceito de ordem de uma equação diferencial ordinária, destacamos a notação $'$ (linha), pois além de não causar confusão, simplifica a notação. Note que a simplificação está por conta de termos uma única variável independente.

Exemplo 1.2. Ordem de uma equação diferencial ordinária

Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, em sua forma mais geral, é dada por $F(x,y,y',y'')=0$. Sendo x a variável independente, y a variável dependente, y' e y'' as derivadas da variável dependente em relação à variável independente de ordens um e dois, respectivamente e F a relação funcional.

EXEMPLO 1.3. NOTAÇÃO ALTERNATIVA

Neste texto, salvo menção contrária, $x \in \mathbb{R}$. Admita ser possível colocar a equação diferencial ordinária de primeira ordem, escrita na forma implícita $F(x,y,y') = 0$, na forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) \equiv y' = f(x,y)$$

chamada forma explícita, isto é, relaciona a derivada primeira da função incógnita, $y(x)$, em termos de uma função que pode, em princípio, depender das variáveis independente e dependente, denotada por $f(x,y)$.

Este caso se constitui no caso padrão, pois na grande maioria dos problemas, encontramos a notação de uma equação diferencial ordinária, com as derivadas explicitadas.

Denotamos por $\mathbb{D}$ o domínio de definição da equação diferencial ordinária, escrita na forma explícita, como sendo o domínio da função $f(x,y)$, admitido contido no plano $\mathbb{R}^2$.

Além de uma possível classificação das equações diferenciais relativamente ao número de variáveis independentes, isto é, equação diferencial ordinária e parcial, a linearidade se constitui numa outra possibilidade, que passamos a definir.

DEFINIÇÃO 1.1.3. LINEARIDADE

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = y(x)$. A equação diferencial ordinária de ordem n, $n = 1,2,\ldots$, na forma implícita

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$$

é chamada linear se F é uma função linear das variáveis $y,y',\ldots,y^{(n)}$, caso contrário a equação diferencial ordinária de ordem n é dita não linear.

EXEMPLO 1.4. PÊNDULO SIMPLES

Uma notável equação diferencial ordinária não linear é a equação diferencial associada ao movimento do pêndulo simples [1]. Seja $t > 0$. A equação diferencial ordinária não linear

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}T(t) + w^2 \operatorname{sen} T(t) = 0$$

onde $w^2 = g/\ell$ sendo ℓ o comprimento do pêndulo e g o módulo da aceleração gravitacional, descreve o movimento do pêndulo simples, a variável dependente $T(t)$ é o ângulo que o pêndulo oscilante forma com a vertical e a constante positiva w é a frequência do oscilador; o termo de não linearidade aparece como argumento da função seno, $\operatorname{sen} T(t)$.

Se considerarmos o ângulo $T(t)$ como sendo pequeno, para o qual é válida a aproximação $\operatorname{sen} T(t) \simeq T(t)$, a equação diferencial ordinária não linear é conduzida na forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} T(t) + w^2 T(t) = 0$$

que caracteriza uma equação diferencial ordinária, linear e de segunda ordem.

Aproveitamos esse exemplo para destacar que essa equação diferencial ordinária de segunda ordem e linear tem coeficientes constantes, pois os coeficientes que multiplicam a função e a derivada segunda da função, são constantes, w^2 e 1, respectivamente.

Antes de prosseguirmos cabe um comentário em relação à possível classificação. Como já mencionamos, não vamos nos ocupar com as equações diferenciais parciais e, a partir de agora, vamos estudar apenas as equações diferenciais ordinárias lineares. Exceção fica por contas das equações de Bernoulli e de Riccati, ambas de primeira ordem.

Definição 1.1.4. Solução

Seja $x \in \mathbb{R}$. Denomina-se solução da equação diferencial ordinária uma função $y = \phi(x)$, definida num intervalo aberto $I = (a,b)$ ou, alternativamente, $a < x < b$, chamado intervalo de definição da solução, tal que a substituição de $y = \phi(x)$, com suas derivadas sucessivas, até a ordem da equação diferencial, inclusive, convertem-na numa identidade em relação à variável independente no intervalo $a < x < b$.

Como vamos ver a seguir, podemos ter soluções que são chamadas de solução geral, solução particular, solução de um problema de valor inicial, dentre outras. Ainda mais, o gráfico de uma solução da equação diferencial ordinária é denominada curva integral da equação.

Exemplo 1.5. Verificação da solução

Sejam $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^*$. Determine o(s) possível(is) valor(es) de α a fim de que a função $\phi(x) = c\,\mathrm{e}^{\alpha x^2}$ seja solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem e linear

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) + x\, y(x) = 0 \cdot$$

Calculando a derivada, substituindo na equação diferencial e simplificando, para $x \neq 0$, temos

$$c\, 2\alpha + c = 0 \cdot$$

Temos duas possibilidades. (i) $c = 0$, neste caso temos uma identidade e a solução é $y(x) \equiv 0$, independente de α, chamada de solução trivial. Em geral, estamos interessados em soluções distintas da solução trivial. (ii) Para $c \neq 0$ temos $2\alpha + 1 = 0$ de onde segue $\alpha = -1/2$.

Temos, então, a solução $y(x) = c\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Visto que a solução contém uma constante arbitrária, dizemos que esta solução é uma solução geral da equação diferencial ordinária de primeira ordem e linear enquanto, no caso em que podemos determinar a constante c, através de uma condição dada, dizemos que essa solução é uma solução particular. Ainda mais, uma equação diferencial ordinária dada junto com alguma(s) condição(ões), como vamos ver, ainda neste capítulo, caracterizam os chamados problema de valor inicial e problema de fronteira, também conhecido como problema de valor no contorno, ou mesmo problema de contorno ou ainda problema na fronteira.

1.2 Problema de valor inicial

Antes de definirmos o conceito de problema de valor inicial, voltamos a destacar que estamos trabalhando no campo dos reais, bem como a partir de agora, vamos discutir, nesta seção, as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e lineares, escritas na forma explícita, isto é, deixando a derivada em função de uma outra função que depende somente da variável independente.

Enfim, vamos introduzir o conceito de homogeneidade/não homogeneidade associado a uma equação diferencial ordinária de ordem $n \in \mathbb{N}$ e linear.

Definição 1.2.1. Homogeneidade

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ e $q(x)$ duas funções reais conhecidas. A equação diferencial ordinária de ordem um e linear

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$$

é dita homogênea se $q(x) \equiv 0$, caso contrário, não homogênea.

Um breve resumo em relação a uma possível classificação. Começamos com equação (tem um sinal de igualdade) diferencial (apresenta pelo menos uma derivada) ordinária (só uma variável independente)/parcial (mais de uma variável independente), depois, linear (os coeficientes só dependem da variável independente)/não linear (os coeficientes podem depender, além da variável independente, da variável dependente ou de uma ou mais de suas derivadas, dependendo da ordem) e, agora, homogenêa (o termo independente é zero)/não homogênea (o termo independente é diferente de zero).

Definição 1.2.2. Problema de valor inicial

Definimos, o que atende pelo nome de problema de valor inicial, o problema composto por uma equação diferencial ordinária de ordem um, linear e não homogêna e uma condição inicial dada na função, a variável dependente.

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas funções dadas, admitidas definidas e contínuas num intervalo aberto $I=(a,b)$. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)+p(x)y(x) & = & q(x)\,, \\ y(x_0) & = & y_0, \end{cases}$$

com $x_0 \in I$ e y_0 um número real arbitrário, tem solução dada por

$$y(x)=\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\left\{\int_{x_0}^{x}\left[q(\xi)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\right]\mathrm{d}\xi+y_0\right\}\cdot \tag{1.1}$$

Essa função, dependendo de uma constante, satisfaz a equação diferencial ordinária de ordem um, linear e não homogênea, isto é, substituindo na equação nos conduz a uma identidade, bem como satisfaz a condição inicial, $y(x_0)=y_0$.

Exemplo 1.6. Solução de um problema de valor inicial

Sejam $x\in\mathbb{R}$ e $y=y(x)$. Mostre que a solução do problema de valor inicial, composto pela equação diferencial ordinária de ordem um, linear, não homogênea e com coeficientes constantes, satisfazendo a condição inicial,

$$\begin{cases} y'+y=\mathrm{e}^x, \quad y=y(x), \\ y(0)=1, \end{cases}$$

é dada pela função $y(x)=\cosh x$.

Primeiramente devemos verificar que a função $y(x)=\cosh x$ satisfaz à equação diferencial. Para tal calculamos a derivada primeira $y'(x)=\operatorname{senh} x$ e substituindo na equação diferencial ordinária, temos

$$\operatorname{senh} x+\cosh x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)=\mathrm{e}^x$$

uma identidade enquanto, para a condição inicial temos

$$y(0)=\cosh 0=1\cdot$$

Visto que $y(x)=\cosh x$ satisfaz à equação diferencial ordinária de primeira ordem, linear, não homogênea e com coeficientes constantes, bem como a condição inicial, é a solução do problema de valor inicial, uma solução particular, pois não contém constante arbitrária.

1.2.1 Existência e unicidade

No caso geral de um problema de valor inicial, isto é, onde o segundo membro não é simplesmente uma função da variável independente, conforme apresentado na DEFINIÇÃO 1.2.2, e sim uma função que depende, além da variável independente, também da variável dependente, as questões fundamentais são a existência e unicidade de soluções, bem como o domínio das mesmas, além, se possível, obter uma expressão analítica expressando a solução. Em geral, esse procedimento não é possível, pois em sendo a equação não linear não temos um método geral para resolver a equação diferencial.

O resultado fundamental reside no teorema a seguir, que estabelece, localmente, a existência e unicidade de soluções para o problema de valor inicial com o segundo membro uma função envolvendo as duas variáveis, independente e dependente, impondo algumas condições sobre tal função.

TEOREMA 1.2.1. TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = y(x)$. Consideremos o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \quad (x,y) \in \mathbb{D}, \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Admitamos que a função $f(x,y)$ e sua derivada parcial em relação a y, denotada por $\partial f(x,y)/\partial y$, sejam contínuas no domínio $\mathbb{D}$. São válidas as afirmações:
(i) Para todo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$ existe uma solução $y(x) = \phi(x)$ da equação diferencial ordinária, Eq.(1.2), definida em uma vizinhança de x_0, isto é, $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$, satisfazendo a condição inicial $\phi(x_0) = y_0$.
(ii) Se duas soluções $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$ da equação diferencial ordinária, Eq.(1.2), coincidem para um particular valor de $x = x_0$, ou seja, $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$ então estas soluções são identicamente iguais em todos os valores de x pertencente ao domínio de ambas.

A demonstração do teorema, que foge do escopo do presente trabalho, está baseada no chamado método de aproximações sucessivas e uma ideia do mesmo pode ser encontrada na referência [2].

1.3 A equação linear

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = y(x)$. A equação diferencial ordinária

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)\,y = q(x) \tag{1.3}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções definidas no intervalo aberto (a,b), é chamada equação diferencial ordinária linear de primeira ordem em (a,b). A fim de resolvermos esta equação, admitimos que as funções $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em (a,b).

Começamos com $p(x) = 0$. A equação diferencial ordinária pode ser resolvida por integração direta, como vamos ver a seguir.

1.3.1 Integração direta

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = y(x)$. Consideremos, inicialmente, a equação diferencial ordinária

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = f(x) \tag{1.4}$$

onde $f(x)$ é um termo de não homogeneidade. Note que, como a equação é linear, o segundo membro só depende da variável independente, estando ausente a variável dependente, y. Basta, então, integrar os dois membros, de onde podemos escrever

$$y(x) = \int^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + c \equiv F(x) + c$$

onde c é uma constante arbitrária. Esta expressão é a solução geral para uma equação de primeira ordem, Eq.(1.4). Um raciocínio análogo, a partir de $n \in \mathbb{N}$ integrações, pode ser utilizado, para uma equação diferencial ordinária de ordem n do tipo $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = g(x)$. Neste caso a solução geral envolverá n constantes arbitrárias advindas de n integrações sucessivas.

Note que escrevemos apenas o extremo superior (análogo se fosse o inferior) enquanto o segundo, um termo constante, foi incorporado na constante de integração. Com esta notação estaríamos identificando

$$\int^x f(\xi)\mathrm{d}\xi + c = \int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

onde $a = -c$, sendo $F(x)$ sua primitiva, isto é, $f(x) = F'(x)$.

EXEMPLO 1.7. EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA LINEAR

Sejam $t \in \mathbb{R}$ e a e v_0 duas constantes. Resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = a, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Integrando diretamente a equação diferencial ordinária, ambos os lados, temos

$$v(t) = at + c$$

onde c é uma constante arbitrária. A fim de que determinemos a constante, c, impondo a condição inicial $v(0) = a \cdot 0 + c = v_0$, de onde segue

$$v(t) = v_0 + at$$

que é a lei (equação) horária da velocidade no movimento retilíneo uniformemente variado.

Passemos ao outro caso, $p(x) \neq 0$. Neste caso, devemos recorrer ao que atende pelo nome de fator integrante de modo a conduzir a equação diferencial ordinária de primeira ordem, linear e não homogênea, em uma forma na qual possamos utilizar à integração direta. De fato, multiplicando-se ambos os membros da Eq.(1.3) pelo fator

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x p(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$$

simplificando e rearranjando, podemos escrever

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y(x)\,\mu(x)\right] = q(x)\,\mu(x)\cdot$$

Integrando, ambos os membros (integração direta) em relação à variável x e resolvendo para a variável $y(x)$, podemos escrever a solução geral (contém uma constante arbitrária) da equação diferencial linear de primeira ordem e não homogênea

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int^x q(\xi)\,\mu(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{c}{\mu(x)}$$

onde c é uma constante arbitrária. A função $\mu(x)$, capaz de conduzir o membro da esquerda da Eq.(1.3) numa derivada exata é denominado fator integrante para a referida equação.

A resolução do problema de valor inicial linear, composto por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, linear e não homogênea, com coeficientes não constantes, satisfazendo a condição inicial, pode ser colocado na forma de um teorema [2].

EXEMPLO 1.8. PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Seja $x \in \mathbb{R}$. Resolva o problema de valor inicial linear

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + y(x) = x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Temos um problema de valor inicial com o segundo membro da equação diferencial ordinária distinto de zero. Logo, identificando-se com a forma do fator integrante (para mais detalhes ver **Exercício 1.6**) podemos escrever

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x 1 \cdot \mathrm{d}\xi\right)$$

de onde obtemos $\mu(x) = \mathrm{e}^x$. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial ordinária pelo fator integrante, $\mu(x)$ e rearranjando temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y(x)\,\mathrm{e}^x\right] = x\mathrm{e}^x \cdot$$

Integrando em relação à variável x podemos escrever

$$y(x)\,\mathrm{e}^x = \int^x \xi\,\mathrm{e}^{\xi}\mathrm{d}\xi$$

que, integrando por partes, permite escrever

$$y(x)\,\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c$$

onde c é uma constante arbitrária. Logo, podemos escrever para uma solução geral

$$y(x) = x - 1 + c\,\mathrm{e}^{-x} \cdot$$

Impondo a condição inicial para determinar a constante, temos

$$y(0) = 0 - 1 + c\,\mathrm{e}^{-0} = -1 + c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 1$$

de onde segue

$$y(x) = x - 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

que é a solução do problema de valor inicial, pois, ambas equação diferencial e condição inicial, estão satisfeitas.

1.4 Métodos elementares de integração

Vamos apresentar métodos elementares de integração, alguns deles aplicados também para particulares equações diferenciais não lineares. Na medida do possível apresentamos a forma mais geral, deixando para o exemplo característico uma aplicação direta.

DEFINIÇÃO 1.4.1. EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x), h(x)$ funções somente de x e $g(y), i(y)$ funções somente de y e distintas de zero. Chama-se equação diferencial ordinária de primeira ordem e separável a toda equação diferencial ordinária que possa ser conduzida a uma das duas formas

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{h(x)}{i(y)}$$

sendo $g(y) \neq 0$ $[i(y) \neq 0]$. Note que, nada foi afirmado sobre a linearidade da equação diferencial.

Para resolver esta equação diferencial ordinária de primeira ordem, vamos escrevê-la na forma (note que estamos considerando apenas a primeira das formas)

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$$

cuja integração fornece

$$G(y) = \int^y g(\eta)\mathrm{d}\eta = \int^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = F(x) + c$$

onde c é uma constante arbitrária. $F(x)$ e $G(y)$ são denominadas primitivas de $f(x)$ e $g(y)$, respectivamente. Em analogia a esta, podemos apresentar uma expressão similar para a segunda forma.

EXEMPLO 1.9. EQUAÇÃO SEPARÁVEL

Seja $y(x) = y \neq 0$. Integre a equação diferencial ordinária de primeira ordem e não linear,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}\cdot$$

Esta equação diferencial ordinária pode ser escrita na forma

$$y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$$

cuja integração fornece

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1.$$

onde c_1 é uma constante arbitrária. Essa equação pode ser colocada na forma, já simplificando

$$y^2 - x^2 = c_2$$