Equações Diferenciais

Exercícios Resolvidos e Propostos (Volume 2)

LF Editorial

Equações Diferenciais

Exercícios Resolvidos e Propostos (Volume 2)

Daniela dos Santos de Oliveira
Edmundo Capelas de Oliveira

2024

1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, D. Santos de
Equações diferenciais: exercícios resolvidos e propostos : volume 2 / Daniela dos Santos de Oliveira, Edmundo Capelas de Oliveira. – São Paulo: Livraria da Física, 2024.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-411-2

1. Álgebra linear 2. Equações diferenciais 3. Equações - Problemas, exercícios etc.
I. Oliveira, E. Capelas de. II. Título.

24-188482 CDD-515.35

Índices para catálogo sistemático:
1. Equações diferenciais: Matemática 515.35

Tábata Alves da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9253

LF
EDITORIAL
Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br
(11) 3815-8688 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Sumário

Prefácio

Em princípio, não parece difícil escrever sobre o tema equações diferenciais, pois existem vários textos que discorrem sobre o assunto, tanto em nível introdutório quanto especializado. Encontramos na literatura vários textos que abordam em separado as equações diferenciais ordinárias e as equações diferenciais parciais, bem como aquelas lineares daquelas não lineares e, enfim, livros que abordam apenas técnicas para a possível resolução envolvendo o caráter numérico, isto é, utilizando *softwares* específicos para a discussão da solução.

Esse texto, dividido em dois volumes, difere da grande maioria dos textos, pois aborda as equações diferenciais ordinárias e parciais visando, principalmente, o estudante de engenharia por entender que uma disciplina de equações diferenciais desempenha papel crucial na vida de um futuro engenheiro, uma vez que ele vai se deparar com situações reais onde o tema está presente. Apenas para mencionar, aplicações de equações diferenciais ordinárias, podem ser encontradas em problemas de oscilações (massa-mola) e circuitos elétricos, enquanto aplicações de equações diferenciais parciais, podem ser encontradas em problemas de difusão (equação do calor), na eletrostática (equações de Laplace e Poisson) e propagação de onda (equação da onda), dentre muitos outros.

Como já acenamos, são muitas as possibilidades de uma classificação, pois o tema é amplo e comporta várias frentes de abordagem. Aqui, em sendo um texto introdutório no sentido de fazer com que o estudante se sinta apto a enfrentar problemas similares, temos como objetivo o estudo de métodos analíticos para a resolução de equações diferenciais lineares. Com este norte, não vamos nos preocupar com as equações diferenciais não lineares e nem tampouco com métodos numéricos. Em se tratando de um curso introdutório, sempre que necessário, vamos mencionar uma particular referência, no seguinte sentido, por exemplo, se ao resolvermos uma equação diferencial emergir as chamadas funções especiais da física-matemática indicamos um texto onde o estudante poderá aprofundar seus conhecimentos.

Temos como objetivo principal apresentar métodos analíticos para a resolução de equações diferenciais sendo que os exemplos serão discutidos no que chamamos de passo a passo, isto é, a resolução de um problema será feita com suas passagens intermediárias a fim de que o estudante possa, com uma leitura direcionada para o tema, seguir as passagens que se fazem necessárias de modo que a obtenção da solução do problema seja uma tarefa simplificada no sentido de sedimentar a teoria envolvida. É importante ressaltar que estamos focando na resolução e não na teoria em si, isto é, apresentamos apenas o básico da teoria necessária a fim de que a abordagem do problema seja uma consequência natural da metodologia envolvida. Ainda que tenhamos direcionado nosso foco para as equações diferenciais lineares, várias outras divisões e/ou classificações são possíveis como, por exemplo, equações com coeficientes constantes e equações não homogêneas, dentre outras.

Passemos, então, a ordenação do texto em seus dois volumes para, depois, discorrer sobre o conteúdo específico de cada um dos capítulos. Começamos no primeiro volume com as equações diferenciais lineares e as séries de Fourier enquanto, no segundo volume as transformadas de Fourier e Laplace, como metodologias para a resolução das equações diferenciais ordinárias e parciais. No primeiro capítulo do primeiro volume apresentamos as equações diferenciais ordinárias com destaque para métodos elementares de integração, dentre eles, redução de ordem, coeficientes a determinar e o clássico método de Frobenius. Concluímos o capítulo com sistemas lineares. As séries de Fourier são apresentadas no segundo capítulo, com destaque para as formas alternativas e as séries de Fourier-Bessel e Fourier-Legendre que desempenham papel importante quando da separação de variáveis nos sistemas de coordenadas cilíndrico e esférico, respectivamente.

No primeiro capítulo do segundo volume apresentamos as transformadas de Fourier e Laplace que, também, desempenham papel importante na resolução de equações diferenciais lineares, sejam elas ordinárias ou parciais. Aproveitamos para introduzir o conceito de função degrau e função delta de Dirac que, ainda que não sejam funções no sentido estrito da palavra, merecem um destaque pela sua grande utilidade. O problema da inversão das transformadas é tratado sem o uso das variáveis complexas, tema este que foge do escopo do presente texto. O segundo capítulo conta com o estudo das equações diferenciais parciais lineares destacando aquelas de primeira e segunda ordens. Apresentamos o método das características e o clássico método de separação de variáveis que, com o conteúdo apresentado nos capítulos anteriores, permite discutir e resolver uma equação diferencial parcial linear.

O texto, em dois volumes, conta com uma série ampla e diversificada de exercícios selecionados de modo a cobrir toda a parte teórica apresentada no texto e, ao final, uma lista de exercícios para o estudante resolver os quais contam com respostas e/ou sugestões.

Por fim, gostaríamos de agradecer aos leitores e suas possíveis contribuições.

Os autores.

Capítulo 1

Transformadas de Fourier e Laplace

As transformadas integrais desempenham papel importante na resolução de problemas de valor inicial e de contorno. Em linhas gerais, transformamos um particular problema, equação ou sistema, num outro, aparentemente mais simples de resolver. Resolvemos esse problema, equação ou sistema, sempre que conveniente e possível, e voltamos com o processo inverso, a fim de determinar a solução do problema, equação ou sistema de partida.

São várias as transformadas integrais, dentre elas, as transformadas de Fourier, de Laplace, de Hankel e de Mellin. Cada uma delas apropriada para um particular problema, dependendo da geometria ou do intervalo de definição da função a ser transformada. Neste trabalho vamos apresentar apenas as transformadas de Fourier e de Laplace. Ressaltamos que é devido a sua simplicidade que a transformada de Laplace costuma ser apresentada antes da transformada de Fourier. Preferimos, aqui, iniciar com a transformada de Fourier, a partir do chamado teorema integral de Fourier e, como um caso particular de transformação (mudança de variável), introduzir a transformada de Laplace.

Antes de explicitarmos as duas transformadas de Fourier e de Laplace, é importante mencionar que ao postergarmos a solução do problema, equação ou sistema para o problema, equação ou sistema transformado, também chamado de auxiliar, o preço a pagar é a volta. Para recuperarmos a solução do problema, equação ou sistema de partida, devemos proceder com a transformada inversa que, em geral, requer o uso do plano complexo, tema este que foge ao escopo do presente trabalho. As discussões relativas ao processo de inversão vão se resumir naquelas onde o plano complexo não se faz absolutamente necessário, em geral, aceitando o resultado tabelado.

Todas as transformadas integrais são caracterizadas mediante a escolha de um particular intervalo de validade, onde a função a ser transformada está definida, das particularidades dessa função para as quais a integral seja convergente e do chamado núcleo da transformada, uma função de duas variáveis, a variável de partida e a variável transformada.

Começamos o capítulo com a transformada de Fourier onde, em analogia às séries de Fourier, a paridade da função desempenha papel importante, onde serão introduzidas as transformadas seno e cosseno de Fourier. As principais propriedades serão apresentadas em termos de proposições ou teoremas, em particular, aquelas associadas às derivadas da função, visando a discussão de uma equação ou um sistema de equações, ambos diferencial. Analogamente para as transformadas de Laplace que são uma forma alternativa de determinar uma solução particular de uma equação diferencial ordinária, linear, com coeficientes constantes e não homogênea, em contraste com o método de variação de parâmetros.

Enfim, ainda que venhamos a mencionar as transformadas de Fourier discreta e rápida, nosso estudo relativo às transformadas integrais está todo ele direcionado para a resolução de um problema, equação, diferencial e integral, ou sistema linear de primeira e segunda ordens, visando, quando possível, obter soluções analíticas.

1.1 Preliminares

Vamos apresentar a definição de uma transformada integral na forma geral, bem como definir alguns conceitos que serão necessários, em particular relativo às funções a serem transformadas, tanto para a transformada de Fourier, quanto de Laplace.

DEFINIÇÃO 1.1.1. TRANSFORMADA INTEGRAL

Seja $f(x)$ definida num particular intervalo da reta real, denotado por I. Chama-se transformada (transformação) integral, denotada por $\mathscr{T}[f(x)]$, a expressão

$$\mathscr{T}[f(x)] = F(y) := \int_I N(x,y) f(x)\,\mathrm{d}x$$

onde y é a variável transformada, $F(y)$ é a transformada da função $f(x)$ e $N(x,y)$, uma função de duas variáveis, é o núcleo da transformação. Como já mencionamos, o problema original é conduzido (transformado) a um outro problema, auxiliar, aparentemente mais simples de ser abordado. O problema, agora, diz respeito ao retorno, a solução do problema original, que será determinado pela respectiva transformada integral inversa, denotada por $\mathscr{T}^{-1}[F(y)]$. Então, em geral, temos, o par de transformadas, a direta

$$\mathscr{T}[f(x)] = F(y)$$

e a respectiva transformada inversa, que recupera a função original

$$\mathscr{T}^{-1}[F(y)] = f(x)\cdot$$

A fim de simplificar, às vezes é comum encontrar a notação com uma única expressão

$$f(x) \div F(y)$$

que, lida da esquerda para a direita, afirma que a função $f(x)$ é recuperada a partir da transformada inversa da função $F(y)$ enquanto, lida da direita para a esquerda, afirma que a função $F(y)$ é a transformada direta da função $f(x)$.

DEFINIÇÃO 1.1.2. FUNÇÕES ADMISSÍVEIS

Seja $f(x)$ uma função seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq x < \infty$. Dizemos que $f(x)$ é uma função admissível se existem duas constantes positivas M e α, tais que para todo x, no intervalo $0 \leq x < \infty$, vale a desigualdade

$$|f(x)| < M\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,.$$

Neste caso, $f(x)$ também é chamada de função de ordem exponencial. Enfim, após a apresentação das funções que vamos operar, vamos deixar, para cada uma das duas transformadas, a discussão relativa ao intervalo a ser considerado, bem como as características que devem ter o núcleo, quando explicitarmos a particular transformada, Fourier e Laplace.

1.2 Integral de Fourier

Existem diversas maneiras de introduzir o conceito de transformada integral, por exemplo; escolhendo um núcleo, o respectivo intervalo e imponto certas condições sobre a função a fim de que a integral convirja. Aqui, vamos percorrer um outro caminho, a chamada integral de Fourier, talvez mais natural, pois, a série de Fourier que foi apresentada no Capítulo 2 (volume 1), se constituirá no ponto de partida.

Como sabemos, as séries de Fourier foram introduzidas, tendo a periodicidade da função característica essencial, isto é, a validade da expansão apenas para o particular intervalo onde a função é periódica e, querendo para fora do intervalo, devemos impor que seja periódica com período igual onde havia sido definida, ou ainda, precisamos estender o intervalo.

Com isso podemos estudar problemas envolvendo uma equação diferencial, por exemplo, descrevendo um particular fenômeno. Ora, o que acontece se a função não é periódica, podemos ainda utilizar as séries de Fourier? A resposta é não e é esse o objetivo do estudo da transformada de Fourier, isto é, estender o método das séries de Fourier de modo que possamos incluir funções não periódicas.

Começamos com uma simples forma da série de Fourier. Seja $f_\ell(x)$ uma função periódica, com período 2ℓ cuja representação em série de Fourier pode ser escrita na seguinte forma

$$f_\ell(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \alpha_k x + B_k \operatorname{sen} \alpha_k x)$$

onde A_0, A_k e B_k são os coeficientes de Fourier onde introduzimos o parâmetro $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{\ell}\cdot$

A partir deste parâmetro que depende de ℓ, associado ao período, vamos estender o período para todo o eixo real e, para tanto, basta tomar o limite $\ell \to \infty$. Assim, não está garantida a periodicidade que, a partir de agora não será mais uma imposição a ser feita sobre a função. Ainda mais, nesse limite $\ell \to \infty$, é natural que tenhamos uma integral ao invés de um somatório, isto é, a passagem do discreto para o contínuo, pois α_k se torna tão pequeno quanto queiramos, tomando todos os valores e não só múltiplos inteiros.

Utilizando as expressões que fornecem os coeficientes de Fourier, obtemos

$$f_\ell(x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_\ell(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\cos\alpha_k x \int_{-\ell}^{\ell} f_\ell(y)\cos\alpha_k y\,\mathrm{d}y + \operatorname{sen}\alpha_k x \int_{-\ell}^{\ell} f_\ell(y)\operatorname{sen}\alpha_k y\,\mathrm{d}y\right\}.$$

Visto que $\Delta\alpha$ não depende do índice de soma, temos $\Delta\alpha = \frac{\pi}{\ell}$ de onde fica claro que, no limite $\ell \to \infty$, acarreta $\Delta\alpha \to 0$. Substituindo ℓ por $\pi/\Delta\alpha$ na expressão para $f_\ell(x)$, já rearranjando, podemos escrever

$$f_\ell(x) = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta\alpha}^{\pi/\Delta\alpha} f_\ell(y)\,\mathrm{d}y +$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\alpha\left\{\cos\alpha_k x\int_{-\pi/\Delta\alpha}^{\pi/\Delta\alpha} f_\ell(y)\cos\alpha_k y\,\mathrm{d}y + \operatorname{sen}\alpha_k x\int_{-\pi/\Delta\alpha}^{\pi/\Delta\alpha} f_\ell(y)\operatorname{sen}\alpha_k y\,\mathrm{d}y\right\},$$

válida para $\Delta\alpha$ fixo, tão pequeno quanto queiramos, mas não zero.

Agora devemos impor que a função $f(x)$ seja absolutamente integrável, obtida pelo limite $\ell \to \infty$ de $f_\ell(x)$. Então, nesse limite, a transição do discreto para o contínuo, o somatáorio passa a ser uma integral, de onde segue

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\cos\alpha_k x\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos\alpha_k y\,\mathrm{d}y + \operatorname{sen}\alpha_k x\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\operatorname{sen}\alpha_k y\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\alpha \tag{1.1}$$

uma vez que o termo independente vai a zero nesse limite $\Delta\alpha \to 0$. A expressão precedente é a chamada integral de Fourier e é provada de maneira formal, conforme o teorema a seguir.

Antes de formalizar o teorema da integral de Fourier, escrevemos a Eq.(1.1) em termos dos coeficientes de Fourier

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha x]\,\mathrm{d}\alpha \tag{1.2}$$

sendo os coeficientes dados por

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos\alpha y\,\mathrm{d}y \qquad \text{e} \qquad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{sen}\,\alpha y\,\mathrm{d}y\,. \tag{1.3}$$

TEOREMA 1.2.1. INTEGRAL DE FOURIER. *Seja $f(x)$ uma função seccionalmente contínua em todo o intervalo finito do eixo x e definida como $\frac{1}{2}[f(a+0)+f(a-0)]$ em cada ponto de descontinuidade $x=a$; ainda mais, seja $f(x)$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

exista. Então, em todo ponto x onde as derivadas laterais à esquerda, $f_e'(x)$, e à direita, $f_d'(x)$, existam, a função é representada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos[\alpha(\xi - x)]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha \tag{1.4}$$

para $-\infty < x < \infty$, chamada integral de Fourier.

DEMONSTRAÇÃO. *Ver referência* [29]. ■

Às vezes é conveniente escrever a fórmula integral de Fourier, Eq.(1.4) na forma contendo exponenciais, em particular para introduzir a chamada transformada de Fourier. Então, a seguir vamos utilizar a fórmula de Euler a fim de obter a expressão que fornece a integral de Fourier na forma complexa.

Podemos escrever a Eq.(1.4) na seguinte forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos[\alpha(\xi - x)]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha \tag{1.5}$$

justificada pelo fato de a expressão entre chaves na Eq.(1.4), uma função de α, ser uma função par, pois a função cosseno é uma função par, enquanto a função $f(x)$, não depende de α, sendo a integração em relação a ξ e não em relação a α.

Essa expressão merece uma observação que vai aparecer quando definirmos a transformada de Fourier. Note que a troca de x por ξ e vice-versa ξ por x não altera o resultado, afinal a função cosseno é uma função par.

Por outro lado, visto que a função seno é uma função ímpar, podemos escrever

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}[\alpha(\xi - x)]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha \tag{1.6}$$

valendo a mesma observação com relação a integração, bem como a troca de x por ξ e vice-versa ξ por x porém, agora, com o argumento de que o primeiro membro é zero.

Enfim, multiplicando a Eq.(1.6) por i, unidade imaginária, adicionando-a com a Eq.(1.5) e utilizando a relação de Euler, obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{i\alpha(\xi - x)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha \tag{1.7}$$

a chamada integral de Fourier na forma complexa, ou integral de Fourier complexa. Desta expressão fica claro que o produto dos dois fatores deve ser $1/2\pi$ enquanto no núcleo, os sinais devem ser contrários, como mostra o argumento $k(\xi - x)$.

1.3 Transformada de Fourier

Vamos definir o que se entende por transformada de Fourier de uma função e a respectiva transformada de Fourier inversa, a partir da integral de Fourier complexa.

Começamos com a Eq.(1.7) escrita na seguinte forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{i\alpha\xi}\,\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{e}^{-i\alpha x}\mathrm{d}\alpha \tag{1.8}$$

ainda que pudesse ser escrita numa outra forma, cuja justificativa será apresentada a seguir.

A expressão entre chaves é uma função da variável α e que vamos denotar por $F(\alpha)$, chamada transformada de Fourier de $f(x)$,

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

onde substituímos ξ por x, pois a variável de integração é uma variável muda. A partir dessa expressão e da Eq.(1.8) podemos escrever

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\mathrm{e}^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha$$

chamada transformada de Fourier inversa de $F(\alpha)$.

DEFINIÇÃO 1.3.1. TRANSFORMADA DE FOURIER

Sejam $f(x)$ uma função absolutamente integrável no intervalo $-\infty < x < \infty$ enquanto $N(x,k) = \mathrm{e}^{ikx}$, o núcleo da transformada de Fourier, sendo k a variável transformada. Definimos a transformada de Fourier, denotada por $\mathscr{F}[f(x)]$, a partir da integral

$$F(k) = \mathscr{F}[f(x)] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x$$

desde que a integral exista.

DEFINIÇÃO 1.3.2. TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA

Seja $F(k)$ uma função absolutamente integrável no intervalo $-\infty < x < \infty$. Definimos a transformada de Fourier inversa, denotada por $\mathscr{F}^{-1}[F(k)]$, a partir da integral

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}[F(k)] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}k\,,$$

desde que a integral exista.

A partir das DEFINIÇÕES 1.3.1 e 1.3.2, e da Eq.(1.8) podemos escrever para o par de transformada de Fourier, direta e inversa, $f(x) \div F(k)$, como já mencionado.

Antes de passarmos ao estudo de propriedades, como também já havíamos mencionado, façamos um breve resumo com relação a algumas liberdades de escolha. Primeiramente, também é encontrado na literatura, como variável transformada, tanto y quanto ω ou α, porém optamos pela letra k. Em relação ao fator $1/\sqrt{2\pi}$ que se encontra em ambas as definições, forma simétrica, pode ser encontrado, também, o fator $1/2\pi$ ou na transformada direta ou na transformada inversa. Uma vez colocado em uma delas, a respectiva transformada não contém nenhum fator. Aqui, preferimos trabalhar com a forma simétrica, colocando o fator $1/\sqrt{2\pi}$ em ambas, DEFINIÇÃO 1.3.1 e DEFINIÇÃO 1.3.2, pois o produto deve ser $1/2\pi$. Agora, em relação ao núcleo, a transformada de Fourier foi definida com o sinal no expoente positivo, enquanto na respectiva transformada de Fourier inversa, trocamos o sinal. Também encontra-se na literatura o contrário, a transformada de Fourier com o sinal negativo e a respectiva inversa com o sinal positivo.

Tanto uma escolha, em relação ao fator, quanto a outra, relativa ao núcleo, em princípio, são arbitrárias; uma vez escolhidos o fator e o sinal do núcleo, estes devem ser mantidos.

Enfim, como também já mencionamos, o cálculo da transformada de Fourier inversa, em geral, requer o uso do plano complexo, o que vai nos restringir aos casos tabelados, pois as variáveis complexas fogem ao escopo deste trabalho, salvo menção contrária.

Passemos, agora, a apresentar algumas propriedades das transformadas de Fourier, direta e inversa, todas elas podendo ser mostradas através da definição e uma particular mudança de variável ou integração por partes.

PROPRIEDADE 1.3.1. LINEARIDADE

Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções absolutamente integráveis e $F(k)$, $G(k)$ e $H(k)$ as respectivas transformadas de Fourier. As transformadas de Fourier direta e inversa são lineares

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(x)]\ \{\mathscr{F}^{-1}[F(k)]\} &= \mathscr{F}[c_1 g(x) \pm c_2 h(x)]\ \{\mathscr{F}^{-1}[c_1 G(k) \pm c_2 H(k)]\} \\ &= c_1 \mathscr{F}[g(x)]\ \{\mathscr{F}^{-1}[G(k)]\} \pm c_2 \mathscr{F}[h(x)]\ \{\mathscr{F}^{-1}[H(k)]\}\end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias e k a variável transformada.

PROPRIEDADE 1.3.2. DESLOCAMENTO

Seja c uma constante real. Se $F(k)$ é a transformada de Fourier da função $f(x)$, então a transformada de Fourier da função $f(x \pm c)$ é

$$\mathscr{F}[f(x \pm c)] = \mathrm{e}^{\mp ikc} \mathscr{F}[f(x)] = \mathrm{e}^{\mp ikc} F(k)\cdot$$

PROPRIEDADE 1.3.3. ESCALA

Se $\mu \in \mathbb{R}^*$ e $F(k)$ é a transformada de Fourier da função $f(x)$, então a transformada de Fourier da função $f(\mu x)$ é

$$\mathscr{F}[f(\mu x)] = \frac{1}{|\mu|} F\left(\frac{k}{\mu}\right)\cdot$$

Antes de apresentar a propriedade associada às derivadas de uma função, visando a metodologia das transformadas integrais para discutir uma equação diferencial, e o teorema de convolução que responde a pergunta: quando a transformada de um produto é o produto das transformadas?, vamos discutir o cálculo de uma transformada de Fourier que nos será útil mais à frente, na resolução de uma equação diferencial associada a um processo de difusão.

EXEMPLO 1.1. TRANSFORMADA DE FOURIER DA GAUSSIANA

Seja $\sigma > 0$. Calcule a transformada de Fourier da função $\mathrm{e}^{-\sigma x^2}$. Utilizando a definição da transformada de Fourier, devemos calcular a integral

$$F(k) = \mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\sigma x^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma x^2} \mathrm{e}^{ikx}\, \mathrm{d}x$$

onde k é a variável transformada. Começamos forçando um quadrado perfeito

$$-\sigma x^2 + ikx = -\sigma\left(x^2 - i\frac{k}{\sigma}x\right)$$

que, adicionando e subtraindo a parcela $k^2/4\sigma^2$ permite escrever

$$-\sigma\left(x^2 - i\frac{k}{\sigma}x\right) = -\sigma\left(x^2 - i\frac{k}{\sigma}x + \frac{k^2}{4\sigma^2} - \frac{k^2}{4\sigma^2}\right) = -\sigma\left(x - i\frac{k}{2\sigma}\right)^2 - \frac{k^2}{4\sigma}$$

de onde segue a igualdade

$$-\sigma x^2 + ikx = -\sigma\left(x - i\frac{k}{2\sigma}\right)^2 - \underbrace{\frac{k^2}{4\sigma}}_{(*)}\cdot$$

Visto que a segunda parcela, destacada por $(*)$, é independente de x e utilizando a linearidade das transformadas de Fourier, PROPRIEDADE 1.3.1, podemos escrever

$$F(k) = \mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\sigma x^2}] = \mathrm{e}^{-k^2/4\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\sigma\left(x - i\frac{k}{2\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}x\cdot$$

A fim de calcular a integral resultante, introduzimos a mudança de variável $x - i\frac{k}{2\sigma} = \xi$, logo

$$F(k) = \mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\sigma x^2}] = \mathrm{e}^{-k^2/4\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\cdot$$

Esta mudança de variável tem justificativa com o uso do plano complexo, sugerimos ver [1].

Esta integral é conhecida como Gaussiana ou distribuição Gaussiana. Para calculá-la, vamos usar as coordenadas polares no plano, definidas pelas equações paramétricas

$$\xi = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad \eta = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi\cdot$ Para simplificar a notação, introduzimos

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$$

de modo a calcular o produto Ω^2,

$$\Omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma\eta^2}\,\mathrm{d}\eta\cdot$$

Agora, a partir das coordenadas polares no plano, valem as igualdades

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

que, substituídas na expressão para Ω^2 e fazendo uso da paridade, permite escrever

$$\Omega^2 = 4\int_0^\infty r\,\mathrm{e}^{-\sigma r^2}\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\cdot$$

A integral na variável θ é imediata, enquanto para a integral na variável r, introduzimos a mudança de variável $r^2 = t$ de onde podemos escrever, já simplificando

$$\Omega^2 = \pi\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t$$

que, após integração e simplificação, nos leva ao resultado

$$\Omega^2 = \frac{\pi}{\sigma}$$

logo, voltando na integral na variável inicial, temos para a transformada de Fourier

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\mathrm{e}^{-k^2/4\sigma}\,.$$

Note que, a menos de um fator multiplicativo, tanto a função, $f(x)$, quanto a transformada de Fourier desta função, $F(k)$, são funções exponenciais com argumentos do mesmo tipo.

TEOREMA 1.3.1. TRANSFORMADA DA DERIVADA. *Se $f(x)$ é uma função continuamente diferenciável e $f(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, então*

$$\mathscr{F}[f'(x)] = -ik\mathscr{F}[f(x)] = -ikF(k)$$

DEMONSTRAÇÃO. *Ver* **Exercício 1.11**. ■

Podemos estender esse resultado através do teorema.

TEOREMA 1.3.2. *Se $f(x)$ é n-vezes continuamente diferenciável, $n = 0,1,\ldots$ e $f^{(k)}(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ para $k = 1,2,\ldots$ então a transformada de Fourier da derivada de ordem n é*

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(x)] = (-ik)^n\mathscr{F}[f(x)] = (-ik)^n F(k) \tag{1.9}$$

DEMONSTRAÇÃO. *Ver* **Exercício 1.11**. ■

A fim de que discutamos um exemplo elucidativo do uso da expressão para a derivada, vamos apresentar o oscilador harmônico amortecido (discussão análoga vale para o circuito *RLC*, conforme Capítulo 1 (volume 1)) porém, sem a preocupação do cálculo de sua inversa, pois este requer o uso das variáveis complexas, tema este que foge do escopo do presente trabalho [3].

EXEMPLO 1.2. OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

Consideremos um oscilador harmônico amortecido sobre o qual age uma força externa $g(t)$. O movimento desse oscilador é governado pela equação diferencial ordinária,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) - 2\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

com $x : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, onde $f(t) = g(t)/m$, sendo m a massa, $2\alpha > 0$ o coeficiente de amortecimento e ω a frequência. Para resolver a equação diferencial devemos impor que, tanto $x(t)$ quanto suas derivadas primeira e segunda, e a função $f(t)$, admitam transformada de Fourier.

Multiplicando a equação diferencial ordinária por e^{ikt}, integrando no intervalo de $-\infty$ a ∞ e utilizando a Eq.(1.9) com $n = 1$ e $n = 2$, obtemos a seguinte equação

$$-k^2 A(k) - 2\alpha ik A(k) + \omega^2 A(k) = F(k)$$

onde, as funções $A(k)$ e $F(k)$, as transformadas de Fourier, são tais que

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t$$

respectivamente. Essa equação é uma equação algébrica, com solução dada por

$$A(k) = \frac{F(k)}{(\omega^2 - k^2) - 2\alpha ik}\,.$$

Como havíamos mencionado, a metodologia da transformada integral conduz o problema, equação ou sistema, em um outro problema, equação ou sistema, auxiliar, que, supostamente, é mais fácil de ser abordado. Neste caso, a metodologia da transformada de Fourier conduziu uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear, com coeficientes constantes e não homogênea, numa equação algébrica, realmente, mais simples de ser resolvida.

A imposição de que as funções admitam a transformada de Fourier é fundamental, caso contrário não seria possível. Uma vez obtida a solução da equação algébrica, recuperamos a solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear, com coeficientes constantes e não homogênea, a partir da respectiva transformada de Fourier inversa,

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)\,\mathrm{e}^{ikt}}{(\omega^2 - k^2) - 2\alpha i k}\,\mathrm{d}k \cdot$$

Uma vez conhecida a função $f(t)$, calculamos a transformada de Fourier para obter $F(k)$. Substituindo-a na expressão anterior e calculando a integral, obtemos a solução da equação diferencial associada ao oscilador harmônico amortecido. Para o oscilador harmônico livre, obtido como caso particular deste resultado, tomamos o coeficiente de atrito $2\alpha = 0$ [3].

Passemos a responder a pergunta apresentada no início do capítulo, relativa ao produto de transformadas, especificamente: a transformada do produto é o produto das transformadas? Para responder a essa pergunta, começamos introduzindo o chamado produto de convolução, ou convolução de Fourier, e um teorema que garante o produto das transformadas.

Façamos um breve comentário. Antes de apresentar a definição de produto de convolução, em termos de uma integral, vamos discutir o produto de duas séries envolvendo índices que fornecem termos com potências positivas e negativas, as chamadas séries de Laurent [3].

Consideremos duas séries do tipo Laurent, admitindo potências positivas e negativas

$$A(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j x^j \qquad \text{e} \qquad B(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_\ell x^\ell$$

sendo a_j e b_ℓ os respectivos coeficientes. Efetuando o produto dessas duas séries, temos

$$A(x)B(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j x^j \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_\ell x^\ell$$

que podem ser escritas na seguinte forma, denotando o produto por $C(x)$,

$$C(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_j a_\ell x^{j+\ell} \cdot$$

Introduzindo uma mudança de índice $j + \ell = k$, podemos escrever, já rearranjando

$$C(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j a_{k-j} x^k \cdot$$

admitindo possível a troca de ordem das séries. Chamando de c_k a série em j,

$$c_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j a_{k-j}$$