# *Cálculo Integral e o Teorema de Stokes*

*Textuniversitários* 24

*Paulo D. Cordaro*

# *Cálculo Integral e o Teorema de Stokes*

LF Editorial
São Paulo — 2024

1a. Edição

Editor: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

*Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.*

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Cordaro, Paulo D.
Cálculo integral e o Teorema de Stokes / Paulo D. Cordaro. -- São Paulo : LF Editorial, 2024. -- (Textuniversitários ; 24)

ISBN 978-65-5563-420-4

1. Cálculo integral 2. Equações diferenciais 3. Matemática - Estudo e ensino I. Título. II. Série.

24-193040 CDD–510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Tábata Alves da Silva – Bibliotecária – CRB-8/9253

ISBN 978-65-5563-420-4



Impresso no Brasil
*Printed in Brazil*

www.lfeditorial.com.br
Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP
www.livrariadafisica.com.br
Telefones:
(11) 39363413 - Editora
(11) 26486666 - Livraria

*Recebei a instrução e não o dinheiro*
*Preferi a ciência ao fino ouro,*
*pois a Sabedoria vale mais que as pérolas*
*e jóia alguma a pode igualar.*

PROVÉRBIOS 8, 10-11.

# Sumário

# Introdução

O objetivo deste texto é apresentar a teoria das formas diferenciais em $\mathbb{R}^N$, enunciar e demonstrar o Teorema de Stokes, bem como exibir algumas de suas aplicações. Há, também, uma ênfase no estudo de uma versão geral da Fórmula de Gauss, tópico tão importante no estudo das equações diferenciais parciais lineares.

O Teorema de Stokes nada mais é que a versão multidimensional do bem conhecido Teorema Fundamental do Cálculo: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função, digamos, continuamente diferenciável e se $a < b$ são números reais então vale a fórmula

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}\,x = f(b) - f(a)\,. \tag{i}$$

Em particular, o valor da integral da derivada de $f$ sobre o intervalo compacto $I = [a, b]$ é determinado pelos valores de $f$ tomados na fronteira $\partial I = \{a, b\}$ de $I$. Se utilizarmos as notações

$$\mathrm{d}\,f = f'(x)\,\mathrm{d}\,x, \tag{ii}$$

$$\int_{\partial I} f = f(b) - f(a), \tag{iii}$$

então (i) pode ser escrita na forma

$$\int_I \mathrm{d}\,f = \int_{\partial I} f\,. \tag{iv}$$

A igualdade (iv) recebe o nome de "Fórmula de Stokes". É evidente que nossa discussão, um tanto informal, merece um maior esclarecimento e este será o objetivo de nossa exposição: vamos fornecer um significado preciso para (iv) no caso multidimensional e, para tal,

- Desenvolveremos, no Capítulo 4, a teoria das formas diferenciais, que na Fórmula de Stokes são os integrandos (em particular, daremos o significado preciso para a expressão $\mathrm{d}\, f$);

- Apresentaremos, no Capítulo 5, a teoria das cadeias singulares e suas fronteiras, que são os domínios de integração na Fórmula de Stokes.

Devemos aqui enfatizar um fato relevante: em (iii) existe uma importante escolha de sinais. No "ponto direito" do intervalo o valor da função $f$ é tomado sem troca de sinal, enquanto que esta troca ocorre quando tomamos o valor de $f$ no "lado esquerdo" do intervalo. Isto significa que para a validade da Fórmula de Stokes a fronteira do domínio deve ser tomada com a correta orientação. A questão da orientação da fronteira do domínio no caso multidimensional será também cuidadosamente analisada no texto: mostraremos como escolher o sinal corretamente em cada uma das diversas faces da fronteira.

Este texto se originou da nossa experiência em sala de aula, quando ministramos por inúmeras vezes a disciplina "Cálculo Integral" nos Bacharelados em Matemática e em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da USP. Trata-se de uma abordagem muito pessoal, um testemunho mesmo de como acreditamos ser a melhor maneira de apresentar a teoria.

Para se definir integração de formas diferenciais necessitamos de dois ingredientes fundamentais: a teoria da integração em $\mathbb{R}^N$ e o Teorema de Mudança de Variável na Integral Múltipla. Quanto à teoria da integração, acreditamos ser a de Lebesgue a mais apropriada. Ela permite, como uma enorme vantagem sobre a integral de Riemann, que se evitem as dificuldades oriundas da geometria dos domínios de integração. No nosso (particular) caso precisamos somente integrar funções mensuráveis e limitadas sobre conjuntos de medida finita. Com isto em mente apresentamos, no Capítulo 1, a teoria abstrata da integração nesta situação particular. A integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ é então exposta no Capítulo 2 e, no Capítulo 3, apresentamos a demonstração completa do Teorema de Mudança de Variável para a integral de Lebesgue.

As formas diferenciais são apresentadas no Capítulo 4 e o Teorema de Stokes é demonstrado no Capítulo 5. No Capítulo 6 apresentamos algumas aplicações e, o que talvez seja a parte mais importante do texto, uma discussão bastante completa do Teorema da Divergência de Gauss. Finalmente, no Apêndice apresentamos uma breve introdução à cohomologia de De Rham.

Uma obra belíssima, que trata do assunto aqui exposto (e muito mais!), é o livro de Walter Rudin [Ru]. Dele extraímos a discussão sobre simplexos e cadeias afins contida no Capítulo 5, bem como a demonstração da primeira versão do Teorema de Stokes. O Capítulo 1 foi, basicamente, extraído de [Ro], enquanto que a demonstração do Teorema de Mudança de Variável na Integral Múltipla é baseada em notas de aula de uma disciplina ministrada em Rutgers no ano acadêmico 1980/81 [S].

A elaboração deste texto levou anos e, durante esse tempo, muitos alunos e professores apresentaram sugestões e apontaram erros. Pedimos perdão por não citar os nomes aqui, porque certamente a lista não seria completa. Entretanto, a publicação se deve ao entusiasmo de Thiago Augusto Silva Dourado, que sugeriu que submetêssemos o texto a esta coleção, e ao incentivo que recebemos por parte de Luiz Felipe Silva Marques, Vinicius Novelli da Silva e Gabriel C. C. S. Araújo. A eles, nossos agradecimentos.

IME–USP, janeiro de 2024

# 1

# Teoria Abstrata da Integração

Seja $X$ um conjunto não vazio e considere $\mathrm{P}(X) \doteq \{A : A \subset X\}$.

**Definição 1.1** Uma *$\sigma$-álgebra* de subconjuntos de $X$ é um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathrm{P}(X)$ não vazio tal que

- Se $A \in \mathcal{A}$ então $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Note, em particular, que se $\mathcal{A}$ é uma $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $X$ então

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
- Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$;
- Se $A, B \in \mathcal{A}$ então $B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \in \mathcal{A}$.

Um *espaço mensurável* é um par $(X, \mathcal{A})$, onde $X$ é um conjunto não vazio e $\mathcal{A}$ é uma $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $X$. Um subconjunto $A$ de $X$ é *$\mathcal{A}$-mensurável* se $A \in \mathcal{A}$. Note que se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável e se $Y \in \mathcal{A}$ então

$$\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$$

é uma $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $Y$. O par $(Y, \mathcal{A}_Y)$ é então um espaço mensurável, denominado *subespaço mensurável de* $(X, \mathcal{A})$. Observe que $\mathcal{A}_Y$ é simplesmente a classe de todos os conjuntos $\mathcal{A}$-mensuráveis contidos em $Y$.

**Definição 1.2** Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma *medida* em $(X, \mathcal{A})$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

para toda sequência $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$.

Note a validade da seguintes propriedades:

- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq \mu(B)$;
- $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) < \infty \;\Rightarrow\; \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;
- Se $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, então $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

Talvez a única destas propriedades que requeira uma melhor análise é a última. Para tal observe que se definirmos a sequência

$$A_1^\bullet = A_1, \quad A_n^\bullet = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}), \quad n \geq 2,$$

temos $A_n^\bullet \in \mathcal{A}$ para todo $n$, $A_n^\bullet \cap A_m^\bullet = \emptyset$ se $n \neq m$ e também $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet$. Deste modo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^\bullet) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

já que $A_n^\bullet \subset A_n$ para todo $n$.

**Exemplo 1.3** Considere um conjunto não vazio $X$, tome $\mathcal{A} = \mathrm{P}(X)$ e defina $c : \mathrm{P}(X) \to [0, \infty]$ pela regra

$$c(A) = \begin{cases} |A| & \text{se } A \text{ é finito,} \\ \infty & \text{se } A \text{ é infinito.} \end{cases}$$

A medida $c$ é chamada *medida de contagem* sobre $X$.

**Exemplo 1.4** Considere $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e para $x_0 \in X$ fixado defina $\nu_{x_0} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ pela regra

$$\nu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A, \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A. \end{cases}$$

A medida $\nu_{x_0}$ é chamada *medida de Dirac em $\mathcal{A}$ concentrada em $x_0$*.

**Exemplo 1.5** Considere um conjunto não vazio $X$, tome $\mathcal{A} = \mathrm{P}(X)$ e defina $\Phi : \mathrm{P}(X) \to [0, \infty]$ pela regra

$$\Phi(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset, \\ \infty & \text{se } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

É também fácil de ver que $\Phi$ define uma medida em $(X, \mathrm{P}(X))$.

Definimos finalmente um *espaço de medida* como sendo uma tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ onde $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável e $\mu$ é uma medida em $(X, \mathcal{A})$. Se $Y \in \mathcal{A}$ então $\mu_Y \doteq \mu|_{\mathcal{A}_Y}$ denomina-se *medida induzida por $\mu$ em $Y$*. Note que assim obtemos um novo espaço de medida $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$.

**Proposição 1.6** *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ satisfazendo $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ Então*

$$\mu(A_n) \longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Demonstração: Como antes defina $A_1^\bullet = A_1$, $A_n^\bullet = A_n \setminus A_{n-1}$ se $n \geq 2$. Então $A_n = A_1^\bullet \cup \cdots \cup A_n^\bullet$, $A_n^\bullet \cap A_m^\bullet = \emptyset$ se $n \neq m$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Logo

$$\mu(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j^\bullet) \longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^\bullet\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

□

**Corolário 1.7** *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e* $B_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ *satisfazendo* $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ *e* $\mu(B_1) < \infty$. *Então*

$$\mu(B_n) \longrightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

DEMONSTRAÇÃO: Defina $A_n = B_1 \setminus B_n$, $n \geq 1$. Pela Proposição 1.6

$$\mu(B_1 \setminus B_n) = \mu(A_n) \longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Como $\mu(B_1) < \infty$ isto é o mesmo que

$$\mu(B_1) - \mu(B_n) \longrightarrow \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

□

**Observação 1.8** A hipótese $\mu(B_1) < \infty$ é fundamental para a conclusão do Corolário 1.7. De fato se tomarmos, no Exemplo 1.5, $X = \mathbb{R}$ e $B_n = ]0, 1/n[$ teremos $\Phi(B_n) = \infty$ mas $\Phi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \Phi(\emptyset) = 0$.

Passaremos agora ao estudo das chamadas funções mensuráveis.

**Proposição 1.9** *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $f : X \to \mathbb{R}$. *As seguintes propriedades são equivalentes:*

*(1)* $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

*(2)* $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

*(3)* $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

*(4)* $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

A demonstração desta proposição é uma simples consequência das identidades

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq \alpha - 1/n\},$$

$$X \setminus \{x \in X : f(x) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\},$$
$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq \alpha + 1/n\}.$$

Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{A}$-*mensurável* se $f$ satisfaz as propriedades equivalentes da Proposição 1.9. Note que se $f$ é $\mathcal{A}$-mensurável então $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ para todo intervalo* $I$ de $\mathbb{R}$. Em particular $f^{-1}\{\alpha\} \in \mathcal{A}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Proposição 1.10** *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções $\mathcal{A}$-mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então são $\mathcal{A}$-mensuráveis as funções $f + g$, $cf$, $fg$.*

DEMONSTRAÇÃO: Uma vez que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ temos, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\{x \in X : f(x) + g(x) < \alpha\} &= \{x \in X : f(x) < \alpha - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < \alpha - g(x)\}\right),\end{aligned}$$

de onde segue que $f + g$ é $\mathcal{A}$-mensurável. É fácil ver que $cf$ é $\mathcal{A}$-mensurável. Por outro lado temos

$$\{x \in X : f(x)^2 < \alpha\} = \emptyset$$

se $\alpha \leq 0$ e

$$\{x \in X : f(x)^2 < \alpha\} = \{x \in X : -\alpha^{1/2} < f(x) < \alpha^{1/2}\}$$

se $\alpha > 0$, o que mostra que $f^2$ é $\mathcal{A}$-mensurável. Finalmente, da identidade

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

segue que $fg$ é $\mathcal{A}$-mensurável. □

*Por um intervalo em $\mathbb{R}$ entendemos um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte propriedade: se $r, s \in I$, $r < s$ e se $r < t < s$ então $t \in I$.

Um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é dito *completo* se vale a seguinte propriedade:

$$A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0,\ B \subset A \Rightarrow\ B \in \mathcal{A}.$$

**Proposição 1.11** *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A}$-mensurável. Se $g : X \to \mathbb{R}$ é tal que $B \doteq \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{A}$ e $\mu(B) = 0$ então $g$ é $\mathcal{A}$-mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos

$$\begin{aligned}&\{x \in X : g(x) > \alpha\}\\ &\qquad = \underbrace{[\{x \in X : g(x) > \alpha\} \cap B]}_{B_1} \cup \underbrace{[\{x \in X : f(x) > \alpha\} \cap (X \setminus B)]}_{B_2}.\end{aligned}$$

Como $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é completo segue que $B_1 \in \mathcal{A}$. Como, também, $f$ é $\mathcal{A}$-mensurável segue que $B_2 \in \mathcal{A}$. □

Estudaremos agora sequências de funções mensuráveis.

**Proposição 1.12** *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $f_k : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções $\mathcal{A}$-mensuráveis. Se $\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ for limitado superiormente (respectivamente inferiormente) para cada $x \in X$ então a função $\sup f_k$ (respectivamente $\inf f_k$) é $\mathcal{A}$-mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos

$$\{x \in X : \sup f_k(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f_k(x) > \alpha\},$$

o que mostra que $\sup f_k$ é $\mathcal{A}$-mensurável se cada $f_k$ o for. Para a outra asserção basta notar que $\inf f_k = -\sup(-f_k)$. □

**Corolário 1.13** *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $f_k : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções $\mathcal{A}$-mensuráveis tais que $\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado para todo $x \in X$. Então são $\mathcal{A}$-mensuráveis as funções $\overline{\lim}\, f_k$ e $\underline{\lim}\, f_k$. Em particular, se existir $\lim f_k(x)$ para cada $x \in X$ então $\lim f_k$ é $\mathcal{A}$-mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos:

$$\underline{\lim}\, f_k(x) = \sup_n \left( \inf_{k \geq n} f_k(x) \right) \quad \text{e} \quad \overline{\lim}\, f_k(x) = \inf_n \left( \sup_{k \geq n} f_k(x) \right).$$

□

Note que se $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{A}$-mensurável então também o são as funções

$$f^+ = \sup\{f, 0\} \quad \text{e} \quad f^- = \sup\{-f, 0\}.$$

Note também que $f^+, f^-$ são $\geq 0$ e que $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Em particular $|f|$ também é $\mathcal{A}$-mensurável.

Seja $A \subset X$. A *função característica de* $A$ é a função $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definida por $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Note que $\chi_A$ é $\mathcal{A}$-mensurável se, e somente se, $A \in \mathcal{A}$.

**Definição 1.14** Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $\phi : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que $\phi$ é uma *função simples* se $\phi$ for $\mathcal{A}$-mensurável e $\phi(X)$ é um subconjunto finito de $\mathbb{R}$.

Se $\phi : X \to \mathbb{R}$ é simples e se $\phi(X) = \{a_1, \ldots, a_m\}$ então $A_j \doteq \phi^{-1}(\{a_j\}) \in \mathcal{A}$, $j = 1, \ldots, m$, e

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} A_j \qquad \text{e} \qquad \phi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}\,. \tag{1.1}$$

Esta representação de $\phi$ é chamada *representação canônica de* $\phi$. Assim, uma função é simples se, e somente se, ela é uma combinação linear de funções características $\mathcal{A}$-mensuráveis. Note que uma função simples pode ser representada por diferentes tais combinações. Sua representação canônica, contudo, é única.

**Proposição 1.15** *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A}$-mensurável e limitada. Então existe uma sequência uniformemente limitada de funções simples $\phi_n : X \to \mathbb{R}$, $\phi_n \leq f$ para todo $n$, satisfazendo $\phi_n(x) \to f(x)$, $x \in X$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado e cada $-n \leq k \leq n$ definimos

$$A_k \doteq \left\{ x \in X : \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}.$$

Note que $A_k \in \mathcal{A}$, $A_k \cap A_p = \emptyset$ se $k \neq p$ e $X = \bigcup_k A_k$. Definimos

$$\phi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{A_k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que $-2M \leq \phi_n(x) \leq f(x)$ e $f(x) - \phi_n(x) \leq M/n$ para todo $x \in X$ e todo $n$. Isto demonstra a proposição. □

Estamos agora preparados para desenvolver a teoria abstrata da integração. A partir de agora fixaremos um *espaço de medida finita* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, isto é, um espaço de medida em que $\mu(X) < \infty$. Dada uma função simples $\phi : X \to \mathbb{R}$, com representação canônica (1.1), definimos sua *integral com relação a* $\mu$ como sendo o número real

$$\int_X \phi(x)\,\mathrm{d}\,\mu(x) = \int_X \phi\,\mathrm{d}\,\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j). \tag{1.2}$$

Para estudar as propriedades desta integral iniciamos com o seguinte lema:

**Lema 1.16** *Seja* $\phi$ *uma função simples escrita na forma*

$$\phi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$$

*onde* $E_k \in \mathcal{A}$ *são tais que* $E_k \cap E_p = \emptyset$ *se* $k \neq p$ *e* $X = \bigcup_{k=1}^{N} E_k$. *Então*

$$\int_X \phi(x)\,\mathrm{d}\,\mu(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(E_k).$$