

$$E=MC^2$$



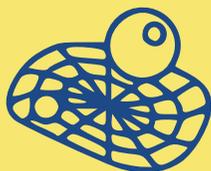
# ALICE



*no País da*

## RELATIVIDADE

Teoria da Relatividade para o Ensino Médio

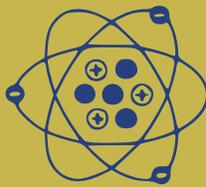


**SÉRIE**

A UNIVERSIDADE  
indo à escola







$$E=MC^2$$



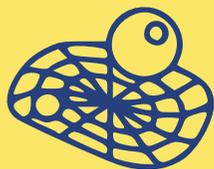
# ALICE



*no País da*

## RELATIVIDADE

Teoria da Relatividade para o Ensino Médio

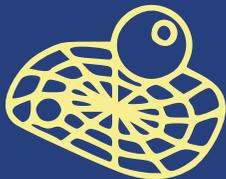


**SÉRIE**

A UNIVERSIDADE  
indo à escola



GEOVÁ ALENCAR



$$E=mc^2$$



**Copyright © 2024 Geová Alencar**

**Editores:**

José Roberto Marinho  
Victor Pereira Marinho

**Editoração Eletrônica:**

Horizon Soluções Editoriais

**Projeto Gráfico:**

Ricardo Renan Landim de Carvalho  
Departamento de Física,  
Universidade Federal do Ceará  
Horizon Soluções Editoriais

**Transcrição:**

Arthur Menezes Lima  
Anderson Alves  
Ícaro Daniel Dias de Carvalho  
Genivaldo Vasconcelos  
Gustavo Franklin  
João Macedo Cabral  
Letícia de Carvalho Pontes Maranhão  
Matheus Macêdo  
Patrick Carneiro Portela  
Pedro Henrique Ferreira de Oliveira  
(Estudantes da Universidade Federal do Ceará)

**Revisão Técnica:**

Celio Rodrigues Muniz  
Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu,  
Universidade Estadual do Ceará

Bruno Carneiro da Cunha  
Departamento de Física, Universidade Federal  
de Pernambuco

Daniel Ordine Vieira Lopes  
Campus Formosa, Instituto Federal de Goiás

Gonzalo Olmo  
Instituto de Física Corpuscular, Universidad de Valencia

**Revisão Ortográfica:**

Editora Livraria da Física

**Capa:**

Horizon Soluções Editoriais

**Ilustrações:**

Nathália Rebeca de Paiva Pinto

**Figuras Técnicas:**

Raimundo Rodrigues da Silva Filho

**Coordenação:**

Geová Alencar

*Texto em conformidade com as novas regras ortográficas  
do Acordo da Língua Portuguesa.*

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, Sª Brasil)**

Alencar, Geová.

Alice no país da relatividade: teoria da relatividade no  
ensino médio / Geová Alencar. – 1. ed. – São Paulo: Livraria  
da Física, 2023. – (A universidade indo à escola)

Bibliografia.  
ISBN 978-65-5563-322-1

1. Física (Ensino médio) 2. Gravitação 3. Relatividade (Física)  
4. Relatividade geral (Física) I. Título.

23-149873

CDD-530.7

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Física: Ensino médio 530.7

Eliane de Freitas Leite – Bibliotecária – CRB-8/8415

ISBN: 978-65-5563-322-1

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sem quais forem os meios empregados sem a permissão do projeto “A Universidade Indo à Escola”, na pessoa do coordenador Geová Alencar. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil • *Printed in Brazil*



**LF Editorial**

Fone: (11) 2648-6666 / Loja (IFUSP)

Fone: (11) 3936-3413 / Editora

[www.livrariadaisica.com.br](http://www.livrariadaisica.com.br) | [www.lfeditorial.com.br](http://www.lfeditorial.com.br)



## CONSELHO EDITORIAL

**Geová Maciel de Alencar Filho**

Departamento de Física - UFC

**Antonio Gomes de Souza Filho**

Departamento de Física - UFC

**Adriana Rolim Campos**

Programa de Pós-Graduação em Ciências Médicas - UNIFOR

**Mairton Cavalcante Romeu**

Departamento de Física e Matemática- IFCE

**Marcony Silva Cunha**

Curso de Física - Universidade Estadual do Ceará

**Makarius Oliveira Tahim**

Universidade Estadual do Ceará

## LIVROS DA COLEÇÃO

**Geová Alencar**

Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará

Título: Alice no País da Relatividade

Subtítulo: Teoria da Relatividade Para o Ensino Médio

**Yuri Brunello**

Departamento de Letras Estrangeiras, Universidade Federal do Ceará

Título: Alice no País de Dante e Guimarães Rosa

Subtítulo: Teorias da Literatura para o Ensino Médio

**Yuri Lima**

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará

Título: Alice no País da Dinâmica

Subtítulo: Sistemas Dinâmicos para o Ensino Médio

## Informações do Projeto



[universidadeindoaescola.fisica.ufc.br](http://universidadeindoaescola.fisica.ufc.br)



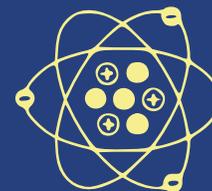
@universidadeindoaescola



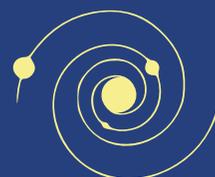
[www.youtube.com/@FisicaUFC](https://www.youtube.com/@FisicaUFC)



[indoaescola@fisica.ufc.br](mailto:indoaescola@fisica.ufc.br)



$$E=MC^2$$





## Dedicatória

*À minha filha Flora Alencar, por fazer florescer  
o que há de melhor em mim e me fazer ver o mundo de outra forma.*

*Aos meus pais, Fátima e Geová, pelo exemplo de vida  
e por sempre apoiarem meus planos e sonhos.*

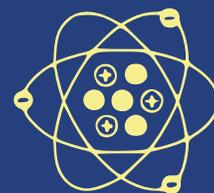
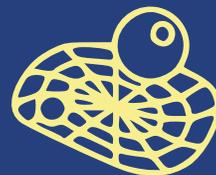
*Aos meus irmãos e irmãs, amigos e amigas,  
por todo apoio, desde sempre.*

\* \* \*



*Os anos de busca na escuridão por uma verdade que se sente, mas que não se pode  
expressar, o intenso desejo e as alternâncias de confiança e desânimo até atingirmos a  
clareza e a compreensão só são conhecidos de quem os experimentou.*

— Albert Einstein



$$E=MC^2$$







## Agradecimentos

**P**RIMEIRAMENTE, gostaria de agradecer aos meus queridos tios Manoel Dias da Fonseca e Iracema Serra Azul pela revisão ortográfica da primeira versão deste livro. Ao meu grande amigo e colaborador, Celio Rodrigues Muniz, pela primeira leitura minuciosa e todas as sugestões que, somente após implementadas, foram enviadas aos outros revisores. Aos revisores Bruno Carneiro Cunha, Daniel Vieira Lopes e Gonzalo Olmo. As sugestões enriqueceram bastante a física e a didática deste livro. Pelo novo template de  $\text{\LaTeX}$ , gostaria de agradecer ao meu amigo e colaborador Ricardo Renan Landim de Carvalho.

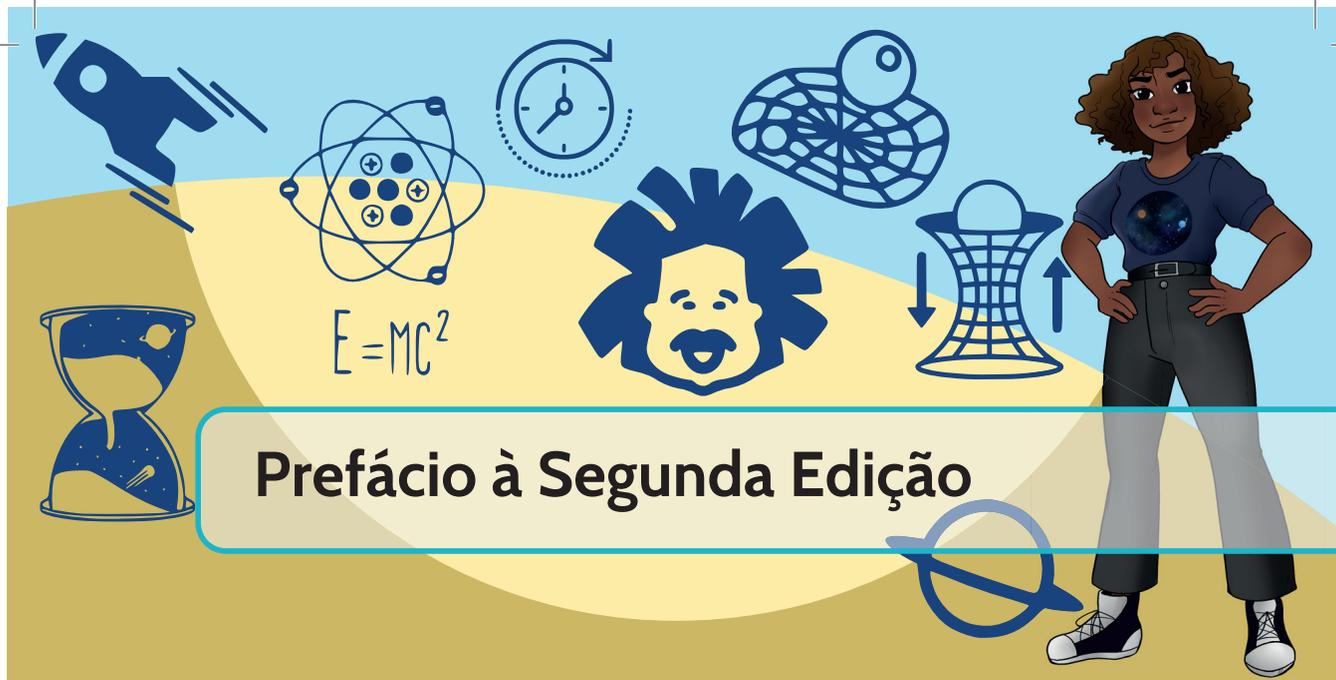
Também gostaria de agradecer aos demais organizadores do projeto “A Universidade Indo à Escola” por sua dedicação e disponibilidade em colocar para frente esse projeto tão importante. São eles: Antônio Gomes de Souza Filho, Makarius Oliveira Tahim, Denise Cavalcante Hissa, Adriana Rolim Campos, Mairton Cavalcante Romeu, Allana Joyce Soares e Marcony Silva Cunha.

Também gostaria de agradecer aos meus estudantes, que transcreveram as aulas referentes à primeira edição deste livro, além de elaborarem e digitarem parte das questões. São eles: Anderson Alves, Ícaro Daniel Dias de Carvalho, Genivaldo Vasconcelos, Matheus Macêdo, e Arthur Menezes Lima.

Aos meus estudantes, que leram minuciosamente e encontraram as erratas da primeira edição, além de prepararem o gabarito. São eles: João Macedo Cabral, Letícia de Carvalho Pontes Maranhão e Patrick Carneiro Portela.

Finalmente, gostaria de agradecer a Alexandra Elbakyan e ao *Sci-Hub* por removerem todas as barreiras no caminho da ciência.





## Prefácio à Segunda Edição

**T**ENHO A SATISFAÇÃO de conhecer o prof. Geová Alencar de longa data, e poderia ser considerado suspeito para prefaciar esta 2a. Edição de “Alice no País da Relatividade – Teoria da Relatividade para o Ensino Médio”. Mas como experimentei o prazer de ser um dos revisores da 1a. Edição – por sinal, coroada de êxito – sinto-me credenciado a fazer a apresentação deste novo e valoroso esforço editorial da Livraria da Física em levar conhecimento científico abalizado para esta nossa juventude tão curiosa e carente de bases sólidas para o necessário entendimento do mundo natural.

Também acompanhei a angústia do autor no nascedouro da obra em tentar traduzir cada conceito que as duas teorias da Relatividade produzem, bastante distantes de nossas intuições cotidianas de tempo, espaço, energia e matéria, para uma linguagem acessível ao público estudantil, sem descuidar do rigor e não pesando a mão, tudo sempre com bom humor, criatividade e cuidado com a exatidão, não esquecendo as necessárias aplicações a situações-problema muito bem postas. O prof. Geová, pesquisador ativo nessa vasta área de estudos, com ampla experiência em publicar textos voltados para o público especializado e orientar estudantes de pós-graduação em temas correlatos, percebeu que não é uma tarefa trivial tornar palatável a um público mais amplo tais ideias profundas e de largo alcance. Enfim, tornar respirável o gostoso ar fresco que circula no topo das cordilheiras aos que vivem em altitudes menores.

O esforço mais que valeu a pena, pois acredito que o autor foi bem sucedido nesse propósito e, mais do que isso, lançou novas bases para publicações desse gênero, elevando a um novo patamar tais iniciativas, as quais doravante não deverão se limitar à mera narrativa, que é necessária mas não suficiente para a elucidação do pensar e do fazer científicos, principalmente em se tratando da Física. A linguagem matemática é imprescindível, e os divulgadores que se pretendem sérios terão o desafio de inverter o que disse o grande Stephen

Hawking a propósito do seu *best seller* “Uma Breve História do Tempo”: Cada equação introduzida deveria reduzir pela metade o número de leitores. O prof. Geová nos faz crer que chegará um tempo, não muito distante no futuro, em que a inclusão de cada expressão matemática dobrará o número de leitores. Contanto que esteja acompanhada de uma boa prosa...

*Celio Rodrigues Muniz* | Faculdade de Educação, Ciências e Letras de Iguatu,  
Universidade Estadual do Ceará



## Prefácio

O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE é uma peça fundamental na Física. Foi enunciado originalmente por Galileo Galilei após fazer uma série de experimentos encaminhados a compreender as propriedades básicas do movimento dos corpos mais simples, idealizados como partículas pontuais. Essas partículas podem ser interpretadas também como observadores, pessoas que podem observar o que acontece no universo e trocar informações entre elas. Esse princípio fala da impossibilidade de discriminar entre observadores inerciais, aqueles que têm velocidades relativas constantes. Um observador que aparece em repouso não tem mais privilégios que outro que aparece com velocidade constante com respeito de nós. Os dois fornecem descrições equivalentes do universo.

Albert Einstein usou esse princípio da relatividade para reformular as leis da Física quando as velocidades dos observadores são próximas a velocidade da luz, encontrando assim uma interpretação satisfatória para os experimentos realizados por Michelson e Morley no final do século XIX, os quais indicavam que todos os observadores inerciais, em repouso ou não, observam que a luz se propaga a uma velocidade constante. Assim nasceu no ano 1905 a teoria da Relatividade Especial (ou Restrita). A extensão dessa teoria para incluir os efeitos da gravidade demorou mais alguns anos de intenso trabalho, mas Einstein conseguiu em Novembro de 1915. Essa nova teoria, a Relatividade Geral, não só conseguiu descrever com sucesso os movimentos celestiais e a estrutura das estrelas e do universo como um todo (a cosmologia), também conseguia representar as equações da Física numa maneira que elimina as discriminações entre observadores: qualquer observador/pessoa pode descrever o universo e encontrar um jeito de comunicar essas informações a outros observadores. O conhecimento não está restringido a uns poucos ou a algumas famílias. Os observadores em repouso ou com velocidade constante não têm mais privilégios que aqueles que têm mo-

vimentos acelerados de qualquer tipo. Todos são equivalentes aos olhos da Física, pois a discriminação é crime, e a natureza não entende de preconceitos.

As contribuições feitas por Einstein foram fundamentais para o desenvolvimento da Física do século XX e ainda são muito relevantes no século XXI. Mas a importância dos conceitos e as metodologias de Einstein ultrapassam os limites da Física. Einstein nos fez pensar na relevância da perspectiva dos outros, em como os outros percebem o que nós observamos. A sociedade avança nessa mesma direção e progride quando exige que os observadores, as pessoas que experimentam e descrevem o universo, possam ser observadoras, com gênero feminino, sim. Os observadores já não são mais simples pontos, são diversos. O livro que você tem nas suas mãos é consciente dessa realidade, e usa esse elemento com grande habilidade para apresentar a relatividade de uma forma inovadora, acessível, e nas palavras de pessoas jovens que querem entender melhor como funciona o mundo ao nosso redor. Os observadores, os futuros pesquisadores, também podem ser pessoas jovens como você.

Uma das lições mais importantes da Teoria da Relatividade de Einstein é que o espaço e o tempo não podem ser considerados mais como entes independentes. A universalidade da velocidade da luz exige que espaço e tempo devem se misturar numa nova estrutura chamada espaço-tempo para poder interpretar a realidade do jeito certo. A beleza da teoria só pode ser assimilada na sua totalidade quando um consegue entender sua estrutura matemática. Esse livro abre caminho nessa direção, e fornece uma aproximação à relatividade por meio de matemática básica, apta para qualquer pessoa com uma formação própria do ensino médio. Sim, você também pode entender a relatividade. E pode começar a compreender alguns detalhes que vão além das palavras e entram no espaço das matemáticas (elementares). Muitos pensadores acham que a matemática é a linguagem da natureza. Será que a relatividade está nos pedindo que misturemos as palavras com a matemática para nos aproximar a uma linguagem mais universal? Será que essa linguagem verbal-matemática é o análogo do espaço-tempo da relatividade? A Física progrediu muito no último século ao abraçar o rigor da linguagem matemática no seu discurso. O professor Geová Alencar faz um grande esforço nesse intento de aproximar a linguagem da natureza à linguagem comum da próxima geração de jovens que hoje se encontram no ensino médio. Tenho certeza de que esse livro não só abre o caminho para os mais jovens entenderem as propriedades e implicações de misturar espaço e tempo, mas também representa um degrau fundamental para eles se aproximarem a essa linguagem mais universal própria da ciência do século XXI. Não sinta medo de lidar com matemática nessa leitura das aventuras de Alice no país da relatividade, os detalhes que essas fórmulas fornecem também são relativos.



# Sumário

## I

## Relatividade Restrita

<b>1</b>	<b>O que é uma Lei da Física?</b> .....	<b>21</b>
<b>1.1</b>	<b>Século XVII: Galileu e a Revolução Científica</b> .....	<b>21</b>
1.1.1	O Mundo Sublunar .....	21
1.1.2	Revolução Científica .....	23
1.1.3	O Plano Inclinado .....	24
<b>1.2</b>	<b>O Estado Natural dos Corpos</b> .....	<b>25</b>
1.2.1	O Princípio da Inércia .....	25
1.2.2	Movimento Uniforme .....	27
1.2.3	Volta ao Mundo em 80 horas .....	30
1.2.4	Movimento Retilíneo e Viagem Interestelar .....	33
<b>1.3</b>	<b>Princípio da Relatividade de Galileu</b> .....	<b>35</b>
1.3.1	O Princípio da Relatividade .....	36
1.3.2	As Transformações de Galileu .....	37
<b>1.4</b>	<b>Galileu e O Espaço-Tempo Absoluto</b> .....	<b>38</b>
1.4.1	Soma de Velocidades .....	38
1.4.2	Velocidade da Terra no Éter? .....	39
1.4.3	Espaço e Tempo Absolutos .....	40
<b>1.5</b>	<b>Huygens: Centro de Massa e Conservação de Momento e Energia</b> .....	<b>42</b>
1.5.1	Colisão de Corpos Idênticos .....	42
1.5.2	$E=mc^2$ e Centro de Massa .....	46

<b>1.6</b>	<b>A Ruína da Física Aristotélica</b>	<b>48</b>
1.6.1	Queda dos Corpos e o Princípio da Equivalência	48
1.6.2	Universalidade das Leis da Física	50
1.6.3	O Erro de Galileu: Referenciais não Inerciais e o Pêndulo de Foucault	51
1.6.4	O que é uma Lei da Física?	52
<b>2</b>	<b>Einstein e o Viajante do Tempo</b>	<b>55</b>
<b>2.1</b>	<b>O Sonho de Einstein e o Experimento de Michelson – Morley</b>	<b>55</b>
2.1.1	Maxwell e a Velocidade da Luz	56
2.1.2	Em que meio a Luz se propaga	56
<b>2.2</b>	<b>Einstein e Relatividade Restrita</b>	<b>58</b>
2.2.1	Postulados da Relatividade	58
2.2.2	Dilatação do Tempo	60
<b>2.3</b>	<b>O Experimento de Hafele e Keating e o GPS</b>	<b>62</b>
2.3.1	Prática com $\gamma$	63
2.3.2	O Voo do Relógio de Césio	65
2.3.3	O GPS e a Relatividade	68
<b>2.4</b>	<b>Mensagem das Estrelas e a Contração do Espaço</b>	<b>71</b>
2.4.1	Contração do Espaço	75
<b>2.5</b>	<b>Viagem Interestelar</b>	<b>78</b>
2.5.1	Viagem Interestelar	78
2.5.2	Viagem para o Futuro e o Paradoxo dos Gêmeos	80
<b>3</b>	<b><math>E=mc^2</math> e a Física de Partículas</b>	<b>85</b>
<b>3.1</b>	<b>Quantidade de Movimento da Luz e <math>E=mc^2</math></b>	<b>85</b>
3.1.1	O Momento da Luz e o Voo de Ícaro	86
3.1.2	Einstein e a Origem de $E=mc^2$	86
<b>3.2</b>	<b>Viagem ao Centro do Sol</b>	<b>89</b>
3.2.1	$E=mc^2$ e a Bomba Atômica	91
3.2.2	Poeira das Estrelas	92
<b>3.3</b>	<b>César Lattes e Leite Lopes: Caçadores de Partículas</b>	<b>96</b>
3.3.1	A Descoberta da Antimatéria	96
3.3.2	Leite Lopes e a Força Fraca	98
3.3.3	César Lattes e a Força Forte	103
<b>4</b>	<b>O Mundo Quadridimensional</b>	<b>109</b>
<b>4.1</b>	<b>As Transformações de Lorentz</b>	<b>109</b>
4.1.1	Dilatação do Tempo e Contração do Espaço	111
4.1.2	Soma Relativística de Velocidades	112

4.1.3	O Experimento de Fizeau . . . . .	115
<b>4.2</b>	<b>Simultaneidade e a Fuga da Millenium Falcon</b> . . . . .	<b>117</b>
4.2.1	Ao Mesmo Tempo para Quem? . . . . .	117
4.2.2	R2D2 sabe Relatividade . . . . .	119
<b>4.3</b>	<b>“A Fundação” e o Sistema de Posicionamento Via Lácteo</b> . . . . .	<b>121</b>
4.3.1	Mapeando a Galáxia . . . . .	121
4.3.2	Causalidade e a Paz Galática . . . . .	124
<b>4.4</b>	<b>O Amálgama do Espaço e do Tempo</b> . . . . .	<b>131</b>
4.4.1	Algo não é Relativo na Relatividade . . . . .	132
4.4.2	A Métrica de Minkowski . . . . .	136
4.4.3	Intervalo de Espaço, Tempo e Luz . . . . .	139

## II Relatividade Geral

<b>5</b>	<b>O Eclipse que Revelou o Universo</b> . . . . .	<b>145</b>
<b>5.1</b>	<b>Caio, Logo Existo</b> . . . . .	<b>145</b>
5.1.1	Objetos Diferentes, Movimentos Iguais? . . . . .	145
5.1.2	Newton e o Foguete de Einstein . . . . .	147
5.1.3	A Gravidade sempre ganha . . . . .	153
<b>5.2</b>	<b>A Dilatação Gravitacional do Tempo</b> . . . . .	<b>155</b>
5.2.1	O Princípio da Equivalência de Einstein . . . . .	155
5.2.2	Massa, só tem uma! . . . . .	157
5.2.3	Dilatação Gravitacional do Tempo e o Desvio para o Vermelho . . . . .	159
<b>5.3</b>	<b>A Curvatura da Luz</b> . . . . .	<b>162</b>
5.3.1	1907: A Curvatura da Luz na Terra . . . . .	162
5.3.2	1911: A curvatura da Luz pelo Sol . . . . .	163
5.3.3	O Erro de Einstein . . . . .	167
<b>5.4</b>	<b>Sobral, a Janela do Universo</b> . . . . .	<b>169</b>
5.4.1	O Eclipse que Iluminou a Ciência . . . . .	169
5.4.2	Newton e Einstein: duas Estrelas no Céu da Física . . . . .	170
5.4.3	O Experimento de Hafele-Keating . . . . .	172
5.4.4	O Projeto Ceará Relativístico . . . . .	175
<b>6</b>	<b>O Santo Graal da Física</b> . . . . .	<b>177</b>
<b>6.1</b>	<b>Ao Infinito e Além</b> . . . . .	<b>177</b>
6.1.1	A Métrica do Tempo . . . . .	178
6.1.2	A Métrica do Espaço . . . . .	180

<b>6.2</b>	<b>A Equação de Einstein</b> .....	<b>182</b>
6.2.1	A Métrica do Espaço-Tempo .....	182
6.2.2	O Palpitar do Coração .....	183
<b>6.3</b>	<b>Física de Buracos Negros</b> .....	<b>186</b>
6.3.1	A Métrica de Schwarzschild .....	186
6.3.2	Viagem ao Centro do Buraco Negro .....	191
6.3.3	Que se desfaça a Luz .....	194
<b>6.4</b>	<b>Duas Nuvens no Céu da Física</b> .....	<b>197</b>
6.4.1	Ondas gravitacionais e Buracos Negros Supermassivos .....	197
6.4.2	Cosmologia e Gravitação Quântica .....	201

## **Apêndices** .....

209

### **A Paradoxos da Relatividade** .....

209

<b>A.1</b>	<b>Uma nova solução para o paradoxo dos gêmeos</b> .....	<b>209</b>
<b>A.2</b>	<b>Paradoxos da Contração</b> .....	<b>213</b>
A.2.1	Paradoxo da madeira relativística .....	213
A.2.2	A guilhotina emperrada .....	215
<b>A.3</b>	<b>Exercícios-Desafio</b> .....	<b>216</b>

## **Respostas dos Exercícios** .....

221

## **Referências** .....

226

# Relatividade Restrita

<b>1</b>	<b>O que é uma Lei da Física? . . . . .</b>	<b>21</b>
1.1	Século XVII: Galileu e a Revolução Científica . . . . .	21
1.2	O Estado Natural dos Corpos . . . . .	25
1.3	Princípio da Relatividade de Galileu . . . . .	35
1.4	Galileu e O Espaço-Tempo Absoluto . . . . .	38
1.5	Huygens: Centro de Massa e Conservação de Momento e Energia . . . . .	42
1.6	A Ruína da Física Aristotélica . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Einstein e o Viajante do Tempo . . . . .</b>	<b>55</b>
2.1	O Sonho de Einstein e o Experimento de Michelson – Morley . . . . .	55
2.2	Einstein e Relatividade Restrita . . . . .	58
2.3	O Experimento de Hafele e Keating e o GPS . . . . .	62
2.4	Mensagem das Estrelas e a Contração do Espaço . . . . .	71
2.5	Viagem Interestelar . . . . .	78
<b>3</b>	<b><math>E=mc^2</math> e a Física de Partículas . . . . .</b>	<b>85</b>
3.1	Quantidade de Movimento da Luz e $E=mc^2$ . . . . .	85
3.2	Viagem ao Centro do Sol . . . . .	89
3.3	César Lattes e Leite Lopes: Caçadores de Partículas . . . . .	96
<b>4</b>	<b>O Mundo Quadridimensional . . . . .</b>	<b>109</b>
4.1	As Transformações de Lorentz . . . . .	109
4.2	Simultaneidade e a Fuga da Millennium Falcon . . . . .	117
4.3	“A Fundação” e o Sistema de Posicionamento Via Lácteo . . . . .	121
4.4	O Amálgama do Espaço e do Tempo . . . . .	131

