

Curso de Física Estatística



Conselho Editorial da LF Editorial

Amílcar Pinto Martins - Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell - Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva - Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes - UNED, Madri

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford - Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Universidade Estadual Paulista - UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa - Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras - Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia - Universidade de Lisboa

Teresa Vergani - Universidade Aberta de Portugal

Torsten Fließbach

Curso de Física Estatística

Tradução de
João da Providência Jr.



2024

Copyright © 2024
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Tradução
do original alemão intitulado

Statistische Physik

6.^a edição revista, 2018

Author: Torsten Fließbach, Alemanha
fliessbach@physik.uni-siegen.de

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Fließbach, Torsten
Curso de física estatística / Torsten Fließbach; tradução de João da Providência Jr. –
São Paulo: LF Editorial, 2024.

Título original: Statistische physik.
Bibliografia
ISBN 978-65-5563-475-4

1. Estatística matemática 2. Física 3. Física - Estudo e ensino 4. Termodinâmica I. Título.

24-217471

CDD-530

Índices para catálogo sistemático:
1. Física 530

Tábata Alves da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9253

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei N° 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



EDITORIAL

LF Editorial

www.livrariadafisica.com.br

www.lfeditorial.com.br

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

Originalmente publicado na língua alemã:

Statistische Physik pelo Prof. Dr. Torsten Fließbach

Copyright © Springer-Verlag GmbH Germany,

uma parte de Springer Nature, 2018. Todos os direitos reservados.

Prefácio à edição alemã

O presente livro faz parte do curso de Física Teórica constituído pelos volumes de I a IV [1, 2, 3, 4]. Reproduz as matérias, tal como as leciono na disciplina Física Teórica IV sobre Física Estatística. Esta disciplina destinada a estudantes de Física é frequentemente incluída no sexto semestre (curso de bacharelato ou licenciatura), no entanto, por vezes é ministrada apenas no curso de mestrado.

A exposição desenvolve-se no nível médio de um curso em Física Teórica. O acesso aos conteúdos é intuitivo em vez de dedutivo. As deduções formais e demonstrações são efetuadas sem recurso a um formalismo matemático penoso.

Intimamente baseados no texto mas em parte também como desenvolvimento, complemento ou ilustração do texto, são propostos mais de 100 exercícios. Estes exercícios só cumprem a sua finalidade se forem analisados e considerados pelos estudantes tentando resolvê-los com a maior autonomia possível. Este trabalho deve ser necessariamente concretizado antes da leitura das soluções modelo apresentadas no livro *Arbeitsbuch zur Theoretischen Physik* [5]. Para além das soluções, o *Arbeitsbuch* inclui um resumo compacto da matéria apresentada nos livros de texto [1, 2, 3, 4].

O escopo do presente livro vai para além da matéria que normalmente é tratada durante um semestre num curso de física nas universidades alemãs. A matéria está dividida em capítulos, que em média correspondem a aulas teóricas de duas horas. É claro que os diferentes capítulos são baseados uns nos outros. No entanto, tentou-se conceber cada capítulo de tal forma que fosse tão completo quanto possível. Por um lado, isso facilita a seleção de capítulos para um curso específico (por exemplo, um curso de bacharelato) em que a matéria deve ser mais limitada. Por outro lado, o aluno pode mais facilmente ler os capítulos que lhe interessam.

Existem boas exposições da Física Estatística adequadas a um estudo profundo. Refiro aqui apenas alguns livros que privilegiei para consulta e que ocasionalmente são citados no texto. Como obra básica, é indicado o livro *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* de Reif [6], que influenciou substancialmente a minha introdução aos fundamentos. Simultaneamente, tive também em especial conta os livros de Brenig [7], Becker [8] e Landau-Lifschitz [9].

Em relação à quinta edição deste livro, na presente sexta edição foram feitas numerosas pequenas correções. Gostaria de agradecer a João da Providência Jr. (tradutor da edição em português) e a alguns leitores de edições anteriores pelos valiosos comentários. Mais comentários, sugestões ou críticas são sempre bem-vindas, por exemplo, através do link de contacto na minha *homepage* www2.uni-siegen.de/flieba/. Eventuais listas de correções podem ser encontradas nesta *homepage*.

Agosto de 2018

Torsten Fließbach

Prefácio do tradutor

Conheci o Professor T. Fliessbach e os manuscritos dos seus cursos de Física Teórica quando, em finais dos anos setenta, fui para Siegen, na Alemanha, a fim de preparar o meu doutoramento em Física Teórica. Representou uma grande mudança na minha vida, que entre muitas coisas, me permitiu aprender a língua alemã. Algumas décadas mais tarde traduzi o livro de Física Estatística (terceira edição) com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian no âmbito da sua política editorial de manuais universitários. Este bem sucedido livro de texto esgotou não tendo entretanto sido novamente editado devido à mudança da política da editora. O livro foi utilizado como livro de texto em países de língua oficial portuguesa. Eu próprio o usei nas minhas aulas na Universidade de Coimbra e, mais tarde, na Universidade da Beira Interior na Covilhã. O facto de ter desaparecido das prateleiras das livrarias causou algum desconforto. Assim, é com muito agrado que vejo a sexta edição desta obra agora ser de novo editada em língua portuguesa. Relativamente a anteriores edições, para além de algumas mudanças no texto, gostaria de realçar o conjunto de problemas propostos agora acrescentados e reformulados e que constituem por si só uma via desafiante para penetrar no maravilhoso mundo da Natureza, através da sua compreensão com base na aplicação das leis e princípios da Física.

Este livro oferece uma introdução à Física Estatística ministrada a nível universitário. O autor privilegiou uma apresentação de leitura facilmente compreensível e abrangente. Os passos são pormenorizadamente descritos de modo que o leitor pode seguir o texto sem esforço.

A lei dos grandes números e a lei do limite central começam por ser deduzidas numa introdução à Estatística Matemática. Os fundamentos estatísticos da “física do calor” são tratados minuciosamente. Neste âmbito, definem-se grandezas macroscópicas como a pressão, temperatura e entropia e estabelecem-se as leis da Termodinâmica. Com base nestas leis, a Termodinâmica conduz a relações gerais entre grandezas macroscópicas. Grande parte do livro versa aplicações da Estatística a sistemas muito diversos. Entre estes, incluem-se gases perfeitos e reais, o gás de eletrões num metal, as oscilações da rede num cristal, e as radiações eletromagnéticas num plasma. Como introdução às transições de fase estuda-se o gás de van der Waals, o ferromagnetismo, a teoria de Landau e as leis de escala. Por fim, discutem-se resumidamente processos irreversíveis.

Covilhã, Abril de 2024,

João da Providência Jr.

Bibliografia

- [1] T. Fließbach, *Mechanik*, 8. Auflage, Springer Spektrum, Heidelberg 2020
- [2] T. Fließbach, *Elektrodynamik*, 7. Auflage, Springer Spektrum, Heidelberg 2022
- [3] T. Fließbach, *Quantenmechanik*, 6. Auflage, Springer Spektrum, Heidelberg 2018
- [4] T. Fließbach, *Statistische Physik*, 6. Auflage, Springer Spektrum, Heidelberg 2018 (este livro)
- [5] T. Fließbach und H. Walliser, *Arbeitsbuch zur Theoretischen Physik – Repetitorium und Übungsbuch*, 4. Auflage, Springer Spektrum, Heidelberg 2018
- [6] F. Reif, *Statistische Physik und Theorie der Wärme*, 2. Auflage, de Gruyter-Verlag, Berlin 1985
- [7] W. Brenig, *Statistische Theorie der Wärme*, 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin 2002
- [8] R. Becker, *Theorie der Wärme*, Springer Verlag, Berlin 1966
- [9] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band V, *Statistische Physik*, 8. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin 1987

Índice

Introdução	1
I Estatística Matemática	3
1 Probabilidade	3
2 Lei dos grandes números	10
3 Distribuição normal	17
4 Lei do limite central	24
II Elementos de Física Estatística	31
5 Postulado fundamental	31
6 Função de partição do gás perfeito	42
7 Primeira lei	49
8 Processo quase-estático	55
9 Entropia e temperatura	66
10 Forças generalizadas	76
11 Segunda lei e terceira lei	84
12 Reversibilidade	94
13 Física Estatística e Termodinâmica	105
14 Medição de parâmetros macroscópicos	111
III Termodinâmica	121
15 Grandezas de estado	121
16 Gás perfeito	129
17 Potenciais termodinâmicos	137
18 Mudanças de estado	146
19 Máquinas térmicas	156
20 Potencial químico	167
21 Transferência de partículas	173
IV Ensembles estatísticos	187
22 Funções de partição	187
23 Potenciais associados	196

Índice	IX
24	Sistemas clássicos 203
25	Gás perfeito monoatômico 215
V	Sistemas especiais 221
26	Sistema ideal de spins 221
27	Gás perfeito diatômico 227
28	Gás rarefeito clássico 241
29	Gás perfeito quântico 249
30	Gás rarefeito quântico 262
31	Gás perfeito de Bose 268
32	Gás perfeito de Fermi 280
33	Gás de fonões 290
34	Gás de fótons 301
VI	Transições de fase 313
35	Classificação 313
36	Ferromagnetismo 322
37	Gás de van der Waals 333
38	Hélio líquido 343
39	Teoria de Landau 357
40	Expoentes críticos 368
VII	Processos de não-equilíbrio 377
41	Estabelecimento do equilíbrio 377
42	Equação de Boltzmann 382
43	Modelo cinético do gás 388
Índice remissivo	403

Introdução

A *Física Estatística*, ocupa-se de sistemas com muitíssimas partículas, de que são exemplo, os átomos de um gás ou de um líquido, os fonões de um sólido ou os fótons num plasma. As leis do movimento de partículas individuais são dadas pela Mecânica ou pela Mecânica Quântica. Devido ao elevado número de partículas (por exemplo, $N = 6 \cdot 10^{23}$ para uma mole de um gás), as equações de movimento não são resolúveis na prática. O resultado de uma tal resolução, por exemplo, as trajetórias de cerca de $6 \cdot 10^{23}$ partículas, seria também desinteressante e irrelevante. O tratamento destes sistemas é, assim, *estatístico*, ou seja, com base em suposições sobre as probabilidades de diferentes trajetórias ou estados.

Em contraste com o movimento das partículas individuais, é de interesse a determinação de grandezas *macroscópicas*, como a quantidade de energia, a pressão ou a temperatura. A partir de determinadas hipóteses e leis, a *Termodinâmica* (TD) investiga relações entre estas grandezas. Esta disciplina é também denominada TD macroscópica ou TD fenomenológica. A Termodinâmica foi desenvolvida no século XIX sem recurso a princípios microscópicos.

Desde o princípio do século XX, é conhecimento adquirido que “calor é movimento desordenado dos átomos”. A teoria do gás de Boltzmann (1898) e o tratamento do movimento browniano por Einstein (1905) são contribuições importantes para este conhecimento. Como hipótese, esta afirmação é consideravelmente mais antiga (Bernoulli, 1738). Tendo como fundamento este conhecimento, a *Física Estatística* determina as grandezas macroscópicas e as suas relações entre si a partir da estrutura *microscópica*. A esta área dá-se também a designação de *Mecânica Estatística*, onde o conceito de Mecânica pretende abranger a Mecânica Quântica.

A Física Estatística parte de grandezas microscópicas e das correspondentes leis fundamentais da Mecânica Clássica e da Mecânica Quântica. Introduz hipóteses plausíveis mas não demonstradas. A estas hipóteses pertence, em especial, a suposição de que “todos os estados acessíveis são igualmente prováveis”. Usando métodos estatísticos, são, então, definidas grandezas macroscópicas e deduzidas relações entre as mesmas.

Entre as grandezas macroscópicas, que em Física Estatística são definidas microscopicamente, encontram-se, por exemplo, a pressão e a temperatura. As relações entre estas grandezas são relações gerais, válidas para uma grande classe de sistemas e processos, incluindo, em particular, as leis da Termodinâmica. Por outro lado, são obtidas relações para sistemas particulares, como a equação de estado ($PV = Nk_B T$) e a capacidade calorífica ($C_V = 3Nk_B/2$) de um gás perfeito.

O conteúdo principal deste livro consiste, por um lado, na construção microscópica da Física Estatística e, por outro lado, na sua aplicação a sistemas parti-

culares. Estes sistemas são, em geral, sistemas modelo que podem ser resolvidos de modo exato ou aproximado. No contexto destes modelos, é possível entender e discutir de modo quantitativo muitas propriedades de sistemas reais. São exemplo de tais propriedades o calor específico dos sólidos, o espectro de radiação dos corpos quentes (como o Sol) e o comportamento nas transições de fase (como a ebulição de um líquido).

A maior parte dos resultados da Física Estatística que discutiremos, diz respeito a estados de equilíbrio. Para o tratamento de estados de não-equilíbrio, apresentamos a equação mestra e a equação de Boltzmann bem como uma dedução elementar das equações de transporte mais importantes (como a condução de calor ou a difusão).

Os conhecimentos elementares necessários da Estatística Matemática encontram-se na Parte I. De seguida, são investigados os fundamentos da Física Estatística (Parte II). A Parte III apresenta a Termodinâmica fenomenológica em sentido mais restrito. A Parte IV completa as ferramentas da Mecânica Estatística, com as quais são descritas de modo estatístico, na Parte V, alguns sistemas concretos. As Partes VI e VII dão uma introdução, respectivamente, nos domínios das transições de fase e dos processos de não-equilíbrio.

I Estatística Matemática

1 Probabilidade

Introduzem-se e discutem-se os conceitos de probabilidade, valor médio e desvio médio quadrático. Estes conceitos são ilustrados com o exemplo usual de “jogar os dados”.

Começemos por especificar o conceito de *probabilidade*. Para isso, consideremos a afirmação: “a probabilidade p , de obter um no lançamento de um dado, é $1/6$ ”. Isto significa que, em média, $1/6$ dos lançamentos conduz a um 1. Numa experiência real, quando efetuamos N ensaios (lançamentos) o acontecimento i (1, 2, 3, 4, 5 ou 6) ocorre N_i vezes. Então, N_i/N é a *frequência* relativa do acontecimento i e

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad \text{probabilidade,} \quad (1.1)$$

é a sua probabilidade. Aí devemos entender por $N \rightarrow \infty$ “com frequência suficientemente elevada”. Esta condição será posteriormente quantificada. Uma vez que ocorre necessariamente um qualquer dos acontecimentos i (assim se define lançamento dos dados), decorre que

$$\sum_{i=1}^6 N_i = N, \quad (1.2)$$

donde se tem

$$\sum_{i=1}^6 p_i = 1. \quad (1.3)$$

A determinação da probabilidade p_i , através de N lançamentos, pode ser efetuada de dois modos a que damos a designação de *média temporal* e de *média de ensemble*. Média temporal significa que o mesmo dado foi lançado N vezes nas mesmas condições. Na média de ensemble, consideramos N dados idênticos e para cada um efetuamos um lançamento.

A afirmação $p_i = 1/6$ relativamente ao dado, utiliza-se com dois sentidos diferentes. Entende-se ou uma propriedade *física* ou uma propriedade *hipotética* do sistema. Ilustramos estas duas possibilidades nos parágrafos seguintes.

A propósito do primeiro significado: para um dado real, em geral (1.1) conduz a $p_i \neq 1/6$. Em particular, num dado falseado o centro de gravidade encontra-se deslocado em direção ao 1. Então, $p_6 > 1/6$. Cada dado real mostrará desvios em relação à simetria de um dado ideal (centro de gravidade ligeiramente afastado, arestas arredondadas de modo diferente) que podem conduzir a pequenos afastamentos de $p_i = 1/6$. A determinação experimental das probabilidades p_i , de acordo com (1.1), é, portanto, a *medida de uma propriedade física* do sistema. Como, na prática, N é finito, ocorre esta medida (como qualquer outra) com certa imprecisão. Esta imprecisão é quantificada no próximo capítulo.

Em relação ao segundo significado: para um dado construído de modo simétrico podemos fazer a *suposição* que todos os eventos i são igualmente prováveis, logo $p_i = 1/6$. Esta suposição é razoável e plausível pelo menos antes (*a priori*) de estarem disponíveis medidas. A Física Estatística é precisamente construída sobre uma análoga *hipótese a priori*. Esta hipótese afirma que todos os estados acessíveis de um sistema fechado são igualmente prováveis. Evidentemente, ao contrário dos dados, não pode a suposição básica da Física Estatística ser diretamente comprovada experimentalmente. Apenas as consequências desta suposição podem ser confirmadas ou desmentidas.

Em vez dos dados, consideremos, como exemplo físico, um gás de átomos ou moléculas. A energia cinética ε de um átomo é medida com precisão $\Delta\varepsilon$. Então, podemos associar a cada átomo um valor discreto $\varepsilon_i = i \cdot \Delta\varepsilon$, onde i toma os possíveis valores $0, 1, 2, \dots$. Através de choques entre si, os átomos modificam, com frequência, a sua energia. No ar, o tempo médio de colisão das moléculas é $\tau \approx 2 \cdot 10^{-10}$ s (capítulo 43). Perguntamos agora, com que probabilidade p_i ocorrem as energias ε_i no gás.

Podemos determinar a média de ensemble, medindo (num determinado instante) as energias de N átomos. Nesse caso, encontraremos N_i vezes a energia ε_i . Em comparação, obtemos uma média temporal quando medimos a energia de um determinado átomo em N instantes diferentes. Representemos novamente por N_i o número de medidas de que resulta ε_i . Nos dois casos, a medida determina a probabilidade de acordo com

$$p_i = p(\varepsilon_i) = \frac{N_i}{N}. \quad (1.4)$$

Suporemos que o número N é tão grande (cerca de $N = 10^{24}$) que podemos prescindir do limite $N \rightarrow \infty$. Os intervalos $\Delta\varepsilon$ devem ser escolhidos de modo que $N_i \gg 1$.

Uma vez que os átomos não diferem uns dos outros, são iguais as probabilidades da média de *ensemble* e da média temporal. Aqui, supõe-se que, para a média temporal, os intervalos temporais entre as medidas sejam grandes em comparação com o tempo de colisão τ . Apenas então as energias que resultam da investigação dum átomo, são representativas do conjunto dos átomos. Posteriormente, veremos que as probabilidades (1.4) são dadas por $p_i = \exp(-\beta\varepsilon_i) / \sum_j \exp(-\beta\varepsilon_j)$, onde β é uma constante.

Adição e multiplicação

Seguidamente, consideramos N sistemas idênticos, dos quais cada um se encontra num *estado* i discreto. A probabilidade de encontrar um determinado sistema no estado i , é definida de acordo com (1.1). Aqui, substituímos com frequência $N \rightarrow \infty$ pela condição “ N suficientemente grande”. Nas equações (1.2) e (1.3), as somas estendem-se a todos os estados possíveis do sistema.

Nos exemplos indicados previamente, o sistema consistia num dado ou num átomo do gás. Para o caso de um dado, o estado é um determinado resultado do lançamento do dado, no caso de um átomo de um gás entendemos por estado um determinado intervalo de energias. Em vez de estado, falamos também de um *evento* i resultante do lançamento do dado, ou de uma medida.

Investiguemos o significado da soma e multiplicação de probabilidades. Da definição de p_i em (1.1) decorre de imediato

$$p_i + p_j = P_{(i \text{ ou } j)} \quad \begin{array}{l} \text{(os acontecimentos} \\ i \text{ e } j \text{ excluem-se),} \end{array} \quad (1.5)$$

para dois estados discretos ou eventos i e j , do sistema, que se excluam mutuamente. Para tais estados, tem-se que $N_{(i \text{ ou } j)} = N_i + N_j$.

Até aqui considerámos estados elementares como o número de pintas da face do dado. Neste caso, a especificação “excluem-se” para $i \neq j$ é satisfeita de antemão. Exemplos de estados gerais são a = “número par de pintas” e b = “número de pintas menor que 4”. Estes estados a e b não se excluem mutuamente. Assim, $p_{(a \text{ ou } b)}$ não é igual a $p_a + p_b$.

A probabilidade de, para dois sistemas, encontrar o primeiro no estado i e o segundo no estado j , é

$$p_{ij} = p_i p_j \quad \begin{array}{l} \text{(os eventos } i \text{ e } j \text{ são indepen-} \\ \text{dentes um do outro).} \end{array} \quad (1.6)$$

Relativamente ao dado, esta é a probabilidade de resultarem i pintas do primeiro lançamento e depois resultarem j pintas do lançamento seguinte, ou a probabilidade que, do lançamento de dois dados distinguíveis, o primeiro dê i e o segundo dê j . Pressupõe-se que o primeiro lançamento do dado não exerce influência sobre o segundo lançamento, ou que os dois dados não se influenciam mutuamente.

Para justificação de (1.6), partimos de N primeiros sistemas e M segundos sistemas, dos quais N_i estão no estado i e M_j no estado j . Pressupomos iguais probabilidades, $p_i = \lim (N_i/N) = \lim (M_i/M)$. Existem NM pares de sistemas, dos quais $N_i M_j$ estão no estado ij . Decorre daqui a probabilidade de encontrar o estado ij :

$$p_{ij} = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \frac{N_i M_j}{NM} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M_j}{M} = p_i p_j. \quad (1.7)$$

Valor médio e desvio médio quadrático

Para N sistemas com estados discretos i , a soma

$$\sum_i p_i = 1, \quad (1.8)$$

percorre todos os estados possíveis. Consideremos agora uma grandeza x do sistema, arbitrária, que no estado i assume o valor x_i . São exemplos o número de pintas resultante de um lançamento de um dado ($x_i = i$) ou a energia de um átomo ($x_i = \varepsilon_i$). Por definição, o *valor médio* é

$$\bar{x} = \sum_i p_i x_i \quad \text{valor médio.} \quad (1.9)$$

Evidentemente, $\bar{x}$ representa o valor médio de x referido a todos os N sistemas (no limite $N \rightarrow \infty$). A definição (1.9) pode ser de imediato transposta para uma função $f(x)$

$$\overline{f(x)} = \sum_i p_i f_i = \sum_i p_i f(x_i). \quad (1.10)$$

Os valores x_i que ocorrem, de facto, diferem do valor médio $\bar{x}$. No entanto, o valor médio deste afastamento anula-se:

$$\overline{x - \bar{x}} = \sum_i p_i (x_i - \bar{x}) = \sum_i p_i x_i - \bar{x} \sum_i p_i = \bar{x} - \bar{x} = 0. \quad (1.11)$$

Este facto deve-se ao cancelamento dos afastamentos positivos e negativos. Por outro lado, uma medida para o afastamento em relação ao valor médio é dada pelo *desvio médio quadrático* ou *desvio médio* Δx , definido por

$$\Delta x = \sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}} \quad \text{desvio médio quadrático.} \quad (1.12)$$

Podemos exprimir Δx em função de $\overline{x^2}$ e $\bar{x}^2$:

$$(\Delta x)^2 = \sum_i p_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i p_i x_i^2 - 2\bar{x} \sum_i p_i x_i + \bar{x}^2 \sum_i p_i = \overline{x^2} - \bar{x}^2. \quad (1.13)$$

De $(\Delta x)^2 \geq 0$ decorre

$$\overline{x^2} \geq \bar{x}^2. \quad (1.14)$$

Como exemplo simples, consideremos para um dado (ideal) a grandeza do sistema $x =$ número de pintas, portanto, $x_i = i$. Esta tem valor médio

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^6 p_i i = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}. \quad (1.15)$$

De

$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^6 p_i i^2 = \frac{1}{6} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6}, \quad (1.16)$$

decorre

$$(\Delta x)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{35}{12}, \quad (1.17)$$

e, portanto, o desvio médio $\Delta x \approx 1.7$.

Sobre a física dos dados

Implicitamente assumimos que o resultado do lançamento do dado é aleatório, não é, portanto, previsível. Discutimos este ponto, tendo em vista as equações deterministas que descrevem o movimento do dado.

Imaginemos uma máquina de lançar dados, em que inicialmente vários dados repousam em determinadas posições, e na qual forças dependentes do tempo, previamente conhecidas, atuam sobre os dados. Ao fim de um determinado tempo, as forças deixam de atuar e os dados ficam em repouso. Esta descrição é válida, em particular, para a máquina de loto, que aos sábados, ao fim da tarde, entra em ação na televisão. O movimento das esferas do loto (os dados) é determinado pelas equações de movimento da Mecânica Clássica, nas quais as forças dependentes do tempo previamente conhecidas são incorporadas (para este fim eliminamos a pessoa que lança os dados). Para dadas condições iniciais, estas equações determinam de modo inequívoco o estado do sistema em qualquer instante posterior. Como entender, então, que o resultado do loto não seja previsível?

Uma característica de tais sistemas é que variações muito pequenas no estado podem tornar-se rapidamente grandes. Se, por exemplo, for alterado ligeiramente o parâmetro de choque, no choque entre duas esferas, então, a direção de espalhamento muda também um pouco. No percurso para a carambola seguinte, pode, no entanto, já esta pequena variação dar lugar a uma variação do parâmetro de choque substancialmente maior para a colisão seguinte (figura 1.1). Em resumo, ao fim de poucos choques, dois estados vizinhos muito próximos dão origem a estados absolutamente diferentes. Ora, não é possível especificar as condições iniciais para

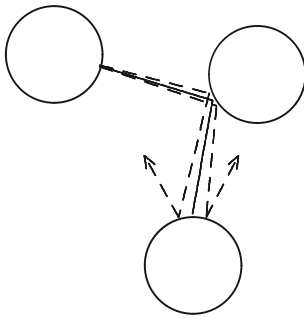


Figura 1.1 Sejam os círculos bolas de bilhar, esferas do loto ou os átomos de um gás. As duas colisões consecutivas da esfera à esquerda, em cima, estão esquematicamente representadas. A figura ilustra que pequenas diferenças, nas condições iniciais, muito rapidamente podem tornar-se grandes e podem conduzir a trajetórias completamente diferentes. Para poucos choques, o percurso é ainda previsível (bolas de bilhar), pelo contrário, não o é para muitos choques (loto, gás).

a máquina de loto com precisão arbitrariamente elevada. No âmbito das possíveis limitações, encontram-se muitíssimas condições iniciais muito próximas, as quais com as equações de movimento determinísticas, conduzem a todos os resultados possíveis.

Devido ao comportamento caótico (estados vizinhos afastam-se muito rapidamente uns dos outros), também outras pequenas perturbações ou incertezas (para além daquelas nas condições iniciais) podem tornar o resultado não previsível. Estas perturbações podem ser: incertezas nas forças exteriores (por exemplo, relativas a oscilações na tensão na rede), o tossir de uma pessoa no estúdio de televisão, flutuações térmicas, incertezas quânticas. Devemos, no entanto, frisar que, para o comportamento aleatório da máquina de loto, nem a temperatura finita nem as incertezas quânticas são necessárias. Em princípio, os dados também podem ser lançados à temperatura $T = 0$ e num mundo (fictício) com $\hbar = 0$.

O comportamento caótico das esferas do loto pode ser comparado com o dos átomos de um gás clássico. Também aqui um estado inicial ordenado (comparável às posições iniciais das esferas do loto) pode tornar-se muito rapidamente caótico. Para um gás, não é necessário revolvê-lo mediante forças exteriores, já que a energia cinética dos átomos cuida deste aspecto.

Exercícios*1.1 Erros tipográficos não detectados*

Dois leitores leem um livro. O leitor A encontra 200 erros tipográficos, o leitor B encontra apenas 150. Dos erros de impressão encontrados, 100 são os mesmos. Faça uma estimativa do número de erros de impressão que ficaram por detectar.

1.2 Mesmo dia de aniversário

Determine a probabilidade P_N de que pelo menos 2 de N estudantes façam anos no mesmo dia. Qual é o resultado para $N = 10$? Qual deveria ser o número mínimo $N_{\min}$ para que a probabilidade de pelo menos dois estudantes fazerem anos no mesmo dia seja superior a $1/2$?

2 Lei dos grandes números

O passeio aleatório unidimensional é um mecanismo que conduz à distribuição aleatória. Neste caso, as propriedades de distribuições de probabilidade que nos interessam, podem ser obtidas e discutidas com particular facilidade. Estas são, nomeadamente, a lei dos grandes números (neste capítulo) e a distribuição normal (nos capítulos 3 e 4).

Passeio aleatório

No caso a uma dimensão, um passeio aleatório é constituído por N passos efetuados ao longo de uma linha reta. A esta reta damos a designação de eixo dos xx . O passeio aleatório começa em $x = 0$. Um passo consiste num salto de $\Delta x = +1$ ou -1 . O salto de $+1$ ocorre com probabilidade p e o salto de -1 ocorre com probabilidade q . Tem-se

$$p + q = 1. \quad (2.1)$$

Os passos individuais são independentes uns dos outros. Seja n_+ o número de passos positivos e seja n_- o número de passos negativos. Somados dão o número total de passos,

$$n_+ + n_- = N. \quad (2.2)$$

Ao fim de N passos, calculemos as seguintes grandezas:

1. A probabilidade $P_N(m)$ de alcançar $x = m = n_+ - n_-$. Esta é igual à probabilidade $W_N(n)$ de que sejam efetuados $n = n_+$ passos positivos,

$$P_N(m) = W_N(n) \quad (m = n_+ - n_-, \quad n = n_+). \quad (2.3)$$

2. Os valores médios $\overline{m}$ e $\overline{n}$.
3. Os desvios médios Δm e Δn .
4. A distribuição contínua para N elevado (capítulo 3).

Apresentamos alguns exemplos de aplicação do passeio aleatório:

- Em cada ponto da rede de um cristal encontra-se um eletrão desemparelhado, cujo spin (e, portanto, cujo momento magnético μ_B) se orienta independentemente dos restantes eletrões (figura 2.1). Num campo magnético externo $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$, a componente z do spin quântico toma os valores $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$.