Matemática Discreta:
Matrizes, Determinantes, Grafos
Combinatória Algébrica e O Método Probabilístico.
Volume - 2

Matemática Discreta:
Matrizes, Determinantes, Grafos
Combinatória Algébrica e O Método Probabilístico.
Volume - 2

Carlos A. Gomes - Iesus C. Diniz - Roberto Teodoro

LF EDITORIAL

2024

1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Gomes, Carlos A.
Matemática discreta: matrizes, determinantes, grafos, combinatória algébrica e o método probabilístico: volume 2 / Carlos A. Gomes, Iesus C. Diniz, Roberto Teodoro. – São Paulo: LF Editorial, 2024.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-321-4

1. Álgebra 2. Grafos - Teoria 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Probabilidades I. Diniz, Iesus C. II. Teodoro, Roberto. III. Título.

24-229506 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br
(11) 3815-8688 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Sumário

Prefácio

A escrita do primeiro volume dessa sequência de livros sobre matemática discreta foi muito motivada por interesses e curiosidades próprios dos autores. Víamos uma oportunidade de escrever sobre tópicos de nosso interesse e disponibilizar ao público de língua portuguesa material raramente abordado em vernáculo.

Dentro desse amplo guarda-chuva chamado de matemática discreta cabem tantos desses nossos interesses que o primeiro volume teve que ser encerrado antes do que queríamos por razões de tempo e espaço. As questões relacionadas ao tempo poderiam se resolver em uma segunda edição, mas não as limitações de espaço, que só podem ser resolvidas com mais um volume. Em razão disso, ao finalizar o volume 1 dessa sequência de livros, já estava claro que teríamos uma continuação para que pudéssemos abordar ainda mais tópicos que achamos interessantes.

O resultado dessa sequência são tópicos mais comumente abordados, como matrizes, determinantes e grafos, a materiais raramente vistos em nosso idioma, como combinatória algébrica e o método probabilístico, ainda enriquecido com outros três apêndices com materiais interessantes que não encontraram espaço no corpo principal do livro.

Ao longo do texto procuramos manter uma linguagem rigorosa e ilustrada por vários exemplos, muitos dos quais vêm de olimpíadas matemáticas. Essa escolha por tantos exemplos e exercícios envolvendo problemas olímpicos se dá especialmente por duas razões. Primeiramente, esses problemas frequentemente ilustram formas novas e criativas de abordar tópicos, o que ajuda a ampliar as perspectivas sobre os temas tratados. Ao encarar um novo problema cuja solução não se conhece, uma das estratégias básicas é tentar adaptar resoluções de problemas conhecidos ao novo caso, e ter amplo leque de questões conhecidas aumenta as chances de conhecer uma abordagem que se possa tentar adaptar ao novo problema.

A outra razão dessa escolha é o público crescente no Brasil de pessoas interessadas em aprofundar seus estudos em temas caros às competições matemáticas, cuja bibliografia em língua portuguesa vêm crescendo a cada ano, mas que ainda não tinha visto alguns dos tópicos aqui tratados.

O cuidado tido com escrita e revisão nunca são suficientes para eliminar todos os erros de um livro, erros que são de inteira responsabilidade dos autores. Tendo agora a oportunidade de ser escrutinado por um público de leitores bem mais amplo, muitos erros podem surgir e esperamos que estes possíveis erros não afetem a experiência do leitor, que possa aqui encontrar tanta satisfação ao ler o livro quanta tivemos aos escrevê-lo.

Setembro de 2024.

Os autores

Agradecimentos

Aos amigos Élcio Lebensztayn e Marcelo Siqueira pelas muitas e oportunas contribuições ao texto.

Capítulo 1

Matrizes e Determinantes

Matrizes são uma ferramenta muito útil em diversas áreas da matemática e seus determinantes possuem um aspecto algébrico muito rico. Neste capítulo vamos apresentar as propriedades básicas de matrizes e determinantes, sem o intuito de completeza de um curso de álgebra linear. Com este capítulo queremos apresentar aspectos que achamos interessantes das operações e propriedades de matrizes e seus determinantes, fixar notação, e tornar o livro mais auto-contido. Alguns dos resultados deste capítulo serão utilizados em capítulos posteriores.

1.1 Matrizes

Definição 1.1 (Matriz)**.** *Denotemos* $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ *e fixemos* m, n *inteiros positivos e um corpo* $\mathbb{K}$*. Uma matriz* $m \times n$ *com valores em* $\mathbb{K}$ *é uma função* $A : I_m \times I_n \to \mathbb{K}$*. A imagem* $A(i, j)$ *é denotada* a_{ij}*. Representamos o conjunto de matrizes* $m \times n$ *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *por* $M(m \times n, \mathbb{K})$ *e uma matriz* $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ *por* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*, ou simplesmente* $A = [a_{ij}]$ *quando o contexto não deixar dúvidas. Nos referimos a* a_{ij} *como o elemento da* i*-ésima linha e* j*-ésima coluna da matriz* A*. Frequentemente o corpo* $\mathbb{K}$ *será omitido na descrição e, quando não houver referência em contrário, deve ser interpretado como* $\mathbb{R}$*. Duas matrizes de* $M(m \times n, \mathbb{K})$ *são iguais se possuem os mesmos elementos, i.e.,* $A = B$ *se* $a_{ij} = b_{ij}$*,* $\forall i, j$*.*

Podemos representar uma matriz A na forma de tabela de ordem $m \times n$ disposta em m linhas e n colunas.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição 1.2 (Matriz Quadrada)**.** *As matrizes* $M(n\times n, \mathbb{K})$ *são chamadas de quadradas. Neste caso, as indicamos apenas por* $M(n, \mathbb{K})$ *ou* $M_n(\mathbb{K})$*. Assim,* M_n *deve representar as matrizes quadradas de ordem* n *sobre o corpo dos números reais.*

Vejamos agora alguns exemplos de matrizes com diversas formas sobre distintos corpos.

Exemplo 1.1. *São alguns exemplos de matrizes:*

a) Uma matriz quadrada de ordem 2 sobre $\mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} 2-i & 3 \\ 4+5i & -2i \end{bmatrix}$$

b) Uma matriz em $M(2 \times 3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Uma matriz em $M(1 \times 4, \mathbb{Z}_5)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Uma matriz em $M(3 \times 1, \mathbb{C})$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3i \\ 1-i \end{bmatrix}$$

As matrizes $M(1 \times n, \mathbb{K})$ são também chamadas de **matrizes linha** e as matrizes da forma $M(m \times 1, \mathbb{K})$ são também chamadas de **matrizes coluna**.

1.2 Operações

Em $M(m \times n, \mathbb{K})$ definimos as operações de adição e multiplicação por escalar $a \in \mathbb{K}$ componente a componente:

Definição 1.3 (Adição de Matrizes)**.** *Dadas* $A, B \in M(m \times n, \mathbb{K})$*,* $A = [a_{ij}]$*,* $B = [b_{ij}]$*, e* $\alpha \in \mathbb{K}$*, definimos a adição* $A + B$ *por*

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

e a multiplicação por escalar αA *por*

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

A matriz $O \in M(m \times n, \mathbb{K})$ com todas as entradas nulas é chamada de **matriz nula** e frequentemente denotada apenas por 0. O contexto é geralmente suficiente para não haver confusão se se trata da matriz nula ou do elemento $0 \in \mathbb{K}$.

Como os termos que compõem nossas matrizes provém de um corpo, as propriedades da adição de matrizes, bem como da multiplicação por escalar, provém das propriedades de $\mathbb{K}$.

Proposição 1.1. *A adição de matrizes e a multiplicação por escalar em* $M(m \times n, \mathbb{K})$ *tem as seguintes propriedades,* $\forall A, B, C \in M(m \times n, \mathbb{K}), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$*:*

i) (comutatividade) $A + B = B + A$

ii) (associatividade) $(A + B) + C = A + (B + C)$

iii) (elemento neutro) $A + 0 = 0 + A = A$

iv) (inverso aditivo) $\forall A \exists ! B : A + B = B + A = 0$

v) (distributividade) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

vi) (associatividade da multiplicação por escalar) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Demonstração. Vamos ilustrar como as propriedades listadas decorrem das propriedades de $\mathbb{K}$ provando (ii) e (iv), as demais demonstrações seguem de maneira análoga e ficam a cargo do leitor.

(ii) Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$. Então $((A + B) + C)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (A + (B + C))_{ij}$. Na igualdade do meio utilizamos a associatividade da adição em $\mathbb{K}$.

(iv) Para $A = [a_{ij}]$, considere $B = [-a_{ij}]$, em que cada termo é o inverso aditivo do termo correspondente de A. Então, $(A + B)_{ij} = a_{ij} - a_{ij} = 0$. Caso C seja outra matriz inversa aditiva de A, então $C = C + 0 = C + (A + B) = (C + A) + B = 0 + B = B$. ∎

Observação 1.1. *Como a matriz inversa aditiva de uma matriz* A *é única, a denotaremos por* $-A$*.*

Outra operação importante entre matrizes é a multiplicação.

Definição 1.4 (Multiplicação de Matrizes)**.** *Dadas* $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$*, e* $B \in M(n \times q, \mathbb{K})$ *definimos o seu produto como sendo a matriz* $C \in M(m \times q, \mathbb{K})$ *que é dada por*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Denotamos essa operação por $C = AB$*.*

A multiplicação AB entre duas matrizes A e B só está definido quando a matriz à esquerda da operação possui o mesmo número de colunas que a quantidade de linhas da matriz à direita da operação, de modo que não é para qualquer par de matrizes que a operação de multiplicação está definida. Observe também que o produto de duas matrizes pode ser uma matriz com formato diferente dos fatores. Além disso, mesmo quando os produtos AB e BA estão definidos, em geral o produto *não é comutativo*, i.e., $AB \neq BA$.

Exemplo 1.2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No exemplo acima, além de identificarmos que *o produto de matrizes não é comutativo*, ainda vemos o caso de duas matrizes não-nulas cujo produto é a matriz nula, algo que não ocorre na multiplicação em $\mathbb{K}$.

Exemplo 1.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

No exemplo acima, a matriz à esquerda é chamada de **matriz identidade de ordem 3**. As matrizes $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ cujos termos são $(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$ são chamadas de matrizes identidade. Assim, no exemplo temos a matriz identidade de ordem 3, I_3. Elas têm o importante papel de elemento neutro da multiplicação em $M_n(\mathbb{K})$.

Em uma matriz A, a **diagonal principal** é composta pelos elementos a_{ii}, e A é chamada de **matriz diagonal** se seus únicos termos diferentes de 0 forem termos da diagonal principal. Assim, as matrizes identidade I_n são exemplos de matrizes diagonais.

Proposição 1.2. *Considerando que as matrizes* A, B, C *a seguir satisfazem às condições que tornam possíveis as multiplicações e adições, são válidas as seguintes propriedades:*

i) (distributividade) $A(B + C) = AB + AC$ *e* $(A + B)C = AC + BC$

ii) (associatividade) $(AB)C = A(BC)$

iii) (elemento neutro) Se $A \in M_n(\mathbb{K})$, $AI_n = I_nA = A$

iv) (multiplicação pela matriz nula) $A \cdot 0 = 0$

Demonstração.

i) $(A(B + C))_{ij} = \sum_k a_{ik}(B + C)_{kj} = \sum_k a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_k(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_k a_{ik}b_{kj} + \sum_k a_{ik}c_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}$. Análogo para o outro caso.

ii) $((AB)C)_{ij} = \sum_k(AB)_{ik}c_{kj} = \sum_k(\sum_t a_{it}b_{tk})c_{kj} = \sum_t a_{it}(\sum_k b_{tk}c_{kj}) = \sum_t a_{it}(BC)_{tj} = (A(BC))_{ij}$

iii) $(AI_n)_{ij} = \sum_k a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$, pois o único termo diferente de 0 na soma ocorre quando $k = j$, caso em que $\delta_{jj=1}$, pois $\delta_{kj} = 0$ sempre que $k \neq j$. Com explicação similar, $(I_nA)_{ij} = \sum_k \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij}$.

iv) $(A0)_{ij} = \sum_k a_{ik}0 = 0$.

■

É importante destacar que diferentemente do que ocorre com corpos (como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), nem todas as matrizes não-nulas possuem inversa multiplicativa. No caso do exemplo 1.2, supondo que existe B tal que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I_2$, ao multiplicarmos à direita por B na igualdade $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, obtemos $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot B$, que implicaria $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, o que é um absurdo. Desse argumento concluímos que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não possui inversa multiplicativa.

A existência de inversa multiplicativa para uma matriz é, então, uma propriedade a ser destacada.

Definição 1.5 (Matriz Invertível)**.** *Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é chamada de **invertível** quando existir $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_n$. O subconjunto de $M_n(\mathbb{K})$ formado pelas matrizes que possuem inversa é denotado por $GL_n(\mathbb{K})$. Matrizes quadradas que não possuem inversa multiplicativa são chamadas de **singulares**.*

Proposição 1.3. *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então sua inversa é única.*

Demonstração. Suponha que B e C sejam matrizes tais que $AB = BA = I_n$ e $AC = CA = I_n$. Então $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$. ■

Como toda matriz invertível A possui inversa única, a denotaremos por A^{-1}.

Proposição 1.4. *Sejam A e B matrizes quadradas, então*

i) se A é invertível, então A^{-1} é também invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;

ii) se A e B são invertíveis, então o produto é invertível e dado por

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demonstração. (i) Da equação $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, segue da definição de matriz inversa que A é a matriz inversa de A^{-1}, i.e., $A = (A^{-1})^{-1}$.

(ii) Note que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = BB^{-1} = I.$$

Portanto, $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB.

■

Podemos definir recursivamente a potenciação de maneira natural, isto é, dado $n \in \mathbb{N}$ temos

$$A^n = A^{n-1}A,$$

onde $A^0 = I_n$.

Exemplo 1.4. *Sejam* p *um inteiro positivo e* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Calcule* A^p.

Solução. Podemos escrever a seguinte decomposição $A = I + T$, onde $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculando as potências de T, podemos perceber que $T^k = 0$ para $k \geq 4$. Portanto,

$$\begin{aligned} A^p = & \ (I+T)^p \\ = & \ I + pT + \binom{n}{2}T^2 + \binom{n}{3}T^3 \\ = & \begin{bmatrix} 1 & p & \frac{p(p-1)}{2} & \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \\ 0 & 1 & p & \frac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.5. *Dada uma matriz quadrada* A *de ordem* m, *tal que* $\max |a_{ij}| = M$, *obtenha uma cota superior para os elementos de* A^n, *em função de* m *e* M.

Solução. Denotando $[A^n]_{ij}$ por $a_{ij}^{(n)}$, temos que $|a_{ij}^{(1)}| \leq M$ e $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)} \Rightarrow |a_{ij}^{(2)}| = |\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)}| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}^{(1)}| \cdot |a_{kj}^{(1)}|$, pela desigualdade triangular. A limitação por M implica $|a_{ij}^{(2)}| \leq \sum_{k=1}^{m} M \cdot M = mM^2$.

Vamos agora utilizar indução para provar que $\forall n \geq 1$, vale que $|a_{ij}^{(n)}| \leq m^{n-1}M^n$. Como o passo base é a hipótese $|a_{ij}^{(1)}| \leq M$, basta provarmos o passo indutivo, assumindo que $|a_{ij}^{(n)}| \leq m^{n-1}M^n$.

De fato, como $a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(n)}$ (de $A^{n+1} = A \cdot A^n$), segue que $|a_{ij}^{(n+1)}| = |\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(n)}| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}^{(1)}| \cdot |a_{kj}^{(n)}| \leq \sum_{k=1}^{m} M \cdot m^{n-1}M^n = m^n M^{n+1}$.

Concluímos, então, que $|a_{ij}^{(n)}| \leq m^{n-1}M^n$, $\forall n \geq 1$. ■

O exemplo acima mostra uma limitação no crescimento dos termos de A^n. Assim, sendo A uma matriz quadrada qualquer, com $\max|a_{ij}| = M$, podemos argumentar que

$$\left|\frac{(A^n)_{ij}}{n!}\right| \leq \frac{m^{n-1}M^n}{n!} = \frac{1}{m}\frac{(mM)^n}{n!}.$$

Usando o critério da razão, podemos argumentar que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n)_{ij}}{n!}$$

é absolutamente convergente, para todo par ij. Deste modo, a série abaixo define uma matriz quadrada de mesma ordem que A, uma vez que seu valor para cada linha i e coluna j está definida pelo limite da série anterior

$$I + \sum_{n\geq 1} \frac{A^n}{n!}.$$

A soma acima se assemelha à série de Taylor da função exponencial de uma variável real (ou complexa) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Utilizando essa similaridade, vamos chamar a matriz obtida pela série acima de **exponencial da matriz A**, denotando

$$e^A := I + \sum_{n\geq 1} \frac{A^n}{n!}.$$

A simbologia e^A não deve fazer o leitor pensar que estamos fazendo potenciação com expoente matricial, apenas entenda como um nome dado à matriz definida pela série, nome este que facilita recordar algumas propriedades dessa matriz. Por exemplo, $e^0 = I$ e se $t, k \in \mathbb{K}$, então $e^{(t+k)A} = e^{tA+kA} = e^{tA} \cdot e^{kA}$.

Vamos calcular algumas exponenciais explicitamente para ilustrar que nem sempre é simples identificar e^A.

Exemplo 1.6. *Calcule* e^{I_3}.

Solução. Como $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtemos $I_3^n = I_3$, $\forall n \geq 1$. Deste modo, $\frac{I_3^n}{n!} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n!} \end{bmatrix}$ do que segue

$$e^I = I + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

■

Exemplo 1.7. *Calcule* e^B, *em que* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução. Para efetuarmos o cálculo de e^B, devemos entender quais são os elementos de B^n para cada $n \geq 1$. Ao efetuarmos os cálculos, obtemos que

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^4 = 0,$$

e como $B^{4+k} = B^4 \cdot B^k = 0 \cdot B^k = 0$, a série que define e^B se torna apenas a soma finita

$$e^B = I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Exemplo 1.8. *Calcule* e^A, *em que* $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$.

Solução. Mais uma vez, começamos calculando as primeiras potências de A para entender seu comportamento.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -a^3 \\ a^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix},$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0 & a^5 \\ -a^5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^6 = \begin{bmatrix} -a^6 & 0 \\ 0 & -a^6 \end{bmatrix}, \quad A^7 = \begin{bmatrix} 0 & -a^7 \\ a^7 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^8 = \begin{bmatrix} a^8 & 0 \\ 0 & a^8 \end{bmatrix}, \ldots$$

A sequência obtida acima nos sugere provar por indução as fórmulas

$$A^{2n} = \begin{bmatrix} (-1)^n a^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n a^{2n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n a^{2n+1} \\ (-1)^{n+1} a^{2n+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Como, pelas potências de A já calculadas os passos base já estão feitos, vamos apenas averiguar os passos de indução. Assumindo a fórmula válida para A^{2n}, note que

$$A^{2(n+1)} = A^{2n+2} = A^{2n} \cdot A^2 = \begin{bmatrix} (-1)^n a^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n a^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix}$$