

*Matemática para Institutos Federais, Universidades
e Concursos: Questões de Concursos, Vol. 1*

Análise Combinatória e Probabilidade

Conselho Editorial da LF Editorial

Amílcar Pinto Martins — Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell — Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva — Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes — UNED, Madri

Iran Abreu Mendes — Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford — Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida — Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo — Universidade Estadual Paulista — UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida — Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa — Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras — Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira — Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia — Universidade de Lisboa

Teresa Vergani — Universidade Aberta de Portugal

*Antônio Nunes de Oliveira
Marcos Cirineu Aguiar Siqueira
Luiz Maggi*

*Matemática para Institutos Federais, Universidades
e Concursos: Questões de Concursos, Vol. 1*
Análise Combinatória e Probabilidade



Editora Livraria da Física
São Paulo — 2024

Copyright © 2024 Editora Livraria da Física

1a. Edição

Editor: VÍCTOR PEREIRA MARINHO & JOSÉ ROBERTO MARINHO

Projeto gráfico e diagramação: THIAGO AUGUSTO SILVA DOURADO

Capa: FABRÍCIO RIBEIRO

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, Antônio Nunes de

Matemática para Institutos Federais, Universidades e concursos : questões de concursos : vol. 1 : análise combinatória e probabilidade / Antônio Nunes de Oliveira, Marcos Cirineu Aguiar Siqueira, Luiz Maggi. -- São Paulo : LF Editorial, 2024.

Bibliografia.

ISBN 978-65-5563-499-0

1. Análise combinatória - Problemas, exercícios etc. 2. Concursos públicos - Guias de estudo 3. Matemática (Atividades e exercícios) 4. Matemática - Concursos públicos 5. Probabilidades - Problemas, exercícios etc. 6. Vestibulares I. Siqueira, Marcos Cirineu Aguiar. II. Maggi, Luiz. III. Título.

24-230053
510.76

CDD-

Índices para catálogo sistemático:

I. Matemática : Concursos 510.76

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil

Printed in Brazil



www.lfeditorial.com.br

Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP

www.livrariadafisica.com.br

Telefones:

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

Os Autores



Antônio Nunes de Oliveira

Docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Cedro
Graduado em Física, mestre em Ensino de Ciências e Matemática e Doutor em Engenharia de
Processos

Docente colaborador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do
Instituto Federal do Ceará (PGECM-IFCE)

Docente do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, polo 23 (MNPEFSBF)
Doutorando em Ensino pelo programa de Pós-Graduação em ENSINO da Rede Nordeste de
Ensino (RENOEN-IFCE)



Marcos Cirineu Aguiar Siqueira

Docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Maracanaú
Especialista em Pesquisa Científica pela Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Luiz Maggi

Licenciado em Matemática, mestre em Educação Matemática e mestre em Educação. Professor aposentado na Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

REVISÃO ORTOGRÁFICA E GRAMATICAL

Prof. Dr. Everton Alencar. Professor Adjunto de Latim da Universidade Estadual do Ceará.

A Coleção

VOLUME 1

Capítulo 1 – Análise Combinatória

Capítulo 2 - Probabilidade

VOLUME 2

Capítulo 3 – Geometria Plana

Capítulo 4 – Geometria Espacial

VOLUME 3

Capítulo 5 – Conjuntos e Lógica Formal

Capítulo 6 – Funções Reais de Uma Variável Real

VOLUME 4

Capítulo 7 – Álgebra

Capítulo 8 – Trigonometria

VOLUME 5

Capítulo 9 – Vetores

Capítulo 10 – Geometria Analítica

VOLUME 6

Capítulo 11 – Progressões e Matemática Financeira

Capítulo 12 – Estatística

VOLUME 7

Capítulo 13 – Limites e Derivadas

Capítulo 14 – Integrais

A todos os estudantes e professores que buscam na educação uma maneira de transformar a sociedade, colaborando para torná-la mais justa e igualitária.

Prefácio

A matemática é a base para o desenvolvimento de diversas aplicações e fundamental para a compreensão das atividades pessoais e profissionais, visto que suas expressões modelam fenômenos da natureza e ditam regras para o funcionamento de várias situações cotidianas. Nesse sentido, é relevante que profissionais e estudantes busquem aprofundar seus conhecimentos por meio de estudos em materiais que forneçam contexto atualizado e ideias que se alinhem aos seus objetivos.

O livro “Matemática para Institutos Federais, Universidades e Concursos: Questões de Concursos, Vol. 1” cumpre o papel de alinhar a construção do conhecimento matemático ao objetivo de êxito em seleções, a partir de textos e exercícios. Os autores Antônio Nunes de Oliveira, Marcos Cirineu Aguiar Siqueira e Luiz Maggi possuem vasta experiência na elaboração deste tipo de material e, neste volume, dedicam atenção ao estudo de análise combinatória e probabilidade.

O livro está dividido em dois capítulos. O primeiro capítulo apresenta a análise combinatória com textos que explicam o princípio multiplicativo, permutações, arranjos e combinações. Esse capítulo conta com 60 questões de concursos, com sugestões de resolução que permitem ao leitor compreender a aplicação dos conceitos em problemas de análise combinatória.

O segundo capítulo trata de probabilidade, apresentando a definição de probabilidade e textos sobre eventos, desdobramentos fundamentais, probabilidade condicional, probabilidade total, distribuição de probabilidades e o método binomial. O capítulo contém sugestões de resolução de 76 questões de concursos que abordam os conteúdos de probabilidade.

Dessa forma, pode-se considerar que a obra “Matemática para Institutos Federais, Universidades e Concursos: Questões de Concursos, Vol. 1” é interessante para todos que buscam aprofundar seus conhecimentos e fixar conteúdos por meio de sugestões de soluções para problemas encontrados em diversas avaliações. Recomendo a leitura e desejo que os resultados de sua jornada alcancem seus objetivos.

OTÁVIO FLORIANO PAULINO
Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Apresentação

Este livro é a ferramenta essencial para que você aprimore seus conhecimentos em Análise Combinatória e Probabilidade, teste suas habilidades e experiências diante de situações-problema e avalie constantemente o seu progresso. Acreditamos firmemente que a resolução de questões é a melhor forma de você verificar e aprimorar o aprendizado.

Dedicamos este trabalho aos estudantes que buscam se preparar para concursos de professor de matemática em Institutos Federais e universidades, onde fornecemos uma coletânea criteriosa de problemas de Análise Combinatória e Probabilidade presentes em provas anteriores dessas instituições e similares. Nesta coleção os problemas são apresentados com soluções detalhadas, tornando a leitura do texto mais acessível e enriquecedora.

Nossa expectativa é que este livro o guie em sua trajetória rumo à aprovação e à conquista de um emprego público, permitindo que você se sinta confiante ao enfrentar os desafios das provas.

Caso você deseje um material que aborde os conteúdos de forma mais ampla e detalhada, incluindo demonstrações de teoremas, diversos exemplos e exercícios resolvidos, recomendamos o livro “Análise Combinatória e Probabilidade”, da coleção “Matemática Para Universidades e Concursos”. Essa coleção abrange textos explicativos e exercícios desafiadores que o ajudarão a aprimorar ainda mais o conhecimento na área.

A principal diferença entre essas duas coleções é que a segunda traz uma abordagem mais completa, sendo recomendada tanto para iniciantes no assunto quanto para aqueles que desejam revisar os conteúdos de maneira mais aprofundada. Por outro lado, se você concluiu recentemente a graduação

ou já possui experiência no tema e busca focar nos aspectos específicos das provas de concursos, esta coleção deve ser suficiente para otimizar seu estudo de forma objetiva.

Seja qual for o seu perfil de estudante, temos certeza de que este livro proporcionará uma preparação sólida e eficiente, apresentando os problemas mais relevantes e recorrentes em provas. Assim, você estará preparado para enfrentar qualquer desafio que lhe seja proposto.

Desejamos a você uma excelente jornada de aprendizado e sucesso em sua trajetória acadêmica e profissional!

Os AUTORES

Suas sugestões para o aprimoramento desta obra serão muito bem-vindas e podem ser enviadas para o e-mail matunicon@gmail.com.

Visite o nosso canal no YouTube: MATEMÁTICA PARA UNIVERSIDADES E CONCURSOS, lá você encontrará soluções de questões do ENADE, concursos públicos e exames de pós-graduação.

Ingresse em nosso grupo de WhatsApp (<https://chat.whatsapp.com/KPn2d8zwQph3zfbqvrCFkx>) e tenha contato exclusivo com os autores da obra, além de poder ficar atualizado sobre novas publicações e condições especiais de aquisição:



Abreviaturas e Siglas

AOCP	Associação civil sem fins econômicos, de caráter organizacional, filantrópico, assistencial, promocional, recreativo e educacional, sem cunho político ou partidário.
COMPERVE UFRN	Comissão Permanente do Vestibular da Universidade Federal do Rio Grande do Norte
COPEMA IFAL	Comissão Permanente de Magistério do Instituto Federal de Alagoas
COPEVE/UFAL	Comissão Permanente do Vestibular da Universidade Federal de Alagoas
CSEP IFPI	Comissão de Seleção de Pessoal do Instituto Federal do Piauí
FADESP	Fundação Amparo e Desenvolvimento da Pesquisa
FADESP IFPA	Fundação Amparo e Desenvolvimento da Pesquisa Instituto Federal do Pará
FCM	Fundação de Apoio à Educação e Desenvolvimento Tecnológico de Minas Gerais – Fundação CEFETMINAS
FUNRIO	Fundação de Apoio a Pesquisa, Ensino, e Assistência às Escola de Medicina e Cirurgia do Rio de Janeiro e ao Hospital Universitário Gaffrée e Guinle, da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
IBC	Instituto Benjamin Constant
IDECAN	Instituto de Desenvolvimento Educacional, Cultural e Assistencial Nacional

IFAC	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Acre
IFAL	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas
IFAM	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas
IFB	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília
IFB	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília
IFBA	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
IFMG SUDESTE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais
IFMS	Instituto Federal de Mato Grosso do Sul
IFMT	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso
IFNMG	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais
IFPA	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
IFPB	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
IFPI	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
IFRJ	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro
IFRN	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
IFRO	Instituto Federal de Rondônia
IFRS	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
IFSC	Instituto Federal de Santa Catarina
IFSul	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense
UFG/IFGO	Universidade Federal de Goiás/Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
UFMT	Universidade Federal do Mato Grosso

Sumário

Os autores	VII
A coleção	IX
Prefácio	XI
Apresentação	XIII
Abreviaturas e Siglas	XV
1 Análise Combinatória	1
2 Probabilidades	77
Gabaritos	181
Bibliografia	183

1. *Análise Combinatória*

Análise Combinatória:

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que se ocupa com o estudo dos problemas de contagem, normalmente expressos sob forma de combinações, arranjos ou permutações. De maneira mais generalista, Morgado, Carvalho e Fernandez (1991, p. 2), afirmam que “a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”.

Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:

- 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
- 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfaçam certas condições dadas (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991, p. 2).

Princípio Multiplicativo (Princípio Fundamental da Contagem):

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras distintas e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras distintas, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy .

É importante salientar que alguns textos preferem discernir entre dois princípios fundamentais de contagem, o *Princípio Aditivo* (Regra do ‘ou’) e o *Princípio Multiplicativo* (Regra do ‘e’).

Fatorial:

Seja n um inteiro positivo e maior que 1, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, definimos o fatorial de n (indicado por $n!$) da seguinte forma:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad n \geq 2.$$

Perceba que o fatorial de um número nada mais é do que o produto dele por todos os seus antecessores naturais não nulos.

Excepcionalmente, define-se o fatorial de um e o fatorial de zero como sendo a unidade:

$$1! = 1 \quad \text{e} \quad 0! = 1.$$

Arranjos Simples:

Seja um conjunto de n elementos no qual queremos fazer a escolha de uplas com p elementos cada (p -uplas). Chamamos de upla a todo o agrupamento ordenado, ou seja, tal que a ordem dos seus elementos componentes é levada em consideração, como os pares ordenados e as triplas ordenadas, por exemplo. Para tanto basta utilizar o Princípio Multiplicativo sobre cada uma das p escolhas a serem feitas, obtendo a seguinte expressão com p fatores:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1).$$

Multiplicando em cima e embaixo por $(n-p)!$ obtemos a expressão mais compacta:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad n \geq p,$$

que costumamos ler como “Arranjo de n elementos tomados p a p ” ou simplesmente “Arranjo de n elementos classe p ”.

Arranjos com Repetição

Diferem dos Arranjos Simples no sentido de que admitem elementos repetidos. Nesse sentido, a aplicação do Princípio Multiplicativo às p -uplas nos conduz à expressão:

$$AR_n^p = n \cdot n \cdot \dots \cdot n$$

com p fatores, o que nos leva a

$$AR_n^p = n^p$$

Permutações

Permutar elementos de um dado conjunto equivale a ‘misturar’ esses elementos, trocando-os de ordem. Existem pelo menos quatro casos de permutação:

- a) *Permutação Simples*, tipo de permutação em que todos os elementos entram uma única vez (sem repetições) no processo de contagem;
- b) *Permutação com Repetições*, tipo de permutação no qual são admitidos elementos repetidos dentro da sequência;
- c) *Permutação Circular*, sempre que, ao dispormos os elementos em sequência, o primeiro item da lista necessariamente tem contato direto com o último item;
- d) *Permutação Caótica*, situação na qual se condicionam os elementos a aparecerem no resultado fora de suas posições originais.

As permutações de letras para formar palavras distintas são chamadas de anagramas. Por exemplo, as palavras ROMA e AMOR são anagramas. Essas palavras não precisam ter significado em qualquer idioma, mas são meros agrupamentos de letras.

Permutações Simples:

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, existem $n!$ modos de ordenar esses elementos.

$$P_n = n!$$

#Exemplo: A palavra AMOR possui $P_n = 4! = 24$ anagramas.

Perceba que, na prática, a diferença entre Arranjo Simples (sentido estrito do objeto) e Permutação é que, enquanto no primeiro, elementos são descartados durante o processo de agrupamento ($p < n$), na segunda, todos os elementos necessariamente são utilizados ($p = n$). Em ambas as situações, vale reforçar, a ordem dos elementos é considerada.

#Exemplo: Partindo da palavra PENA, podemos obter NEP utilizando arranjos de 4 elementos tomados 3 a 3 e podemos obter NAPE utilizando permutações de 4 elementos. Note que, no primeiro caso houve uma letra descartada, já no caso seguinte, todas as letras foram utilizadas.

Permutações com Repetições:

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, com um deles repetido α vezes e outro repetido β vezes, existem $n!/(\alpha!\beta!)$ modos de ordenar esses elementos.

$$P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha!\beta!}$$

#Exemplo: A palavra BANANA possui $P_n = \frac{6!}{3!2!} = 60$ anagramas.

Permutações Circulares:

Dados n elementos distintos, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, existem $(n - 1)!$ modos de ordenar esses elementos de forma circular.

$$PC_n = (n - 1)!$$

#Exemplo: Existem $PC_4 = (4 - 1)! = 3! = 6$ maneiras distintas de se acomodar 4 pessoas em torno de uma mesa.

Permutações Caóticas: Trata-se de um tipo de permutação em que nenhum dos elementos do resultado se encontra na sua posição de origem.

#Exemplo: Dada a palavra PEDRA, a palavra ARPED integra o seu rol de permutações caóticas, pois todas as letras foram trocadas de lugar, porém a palavra EDARP não corresponde a uma permutação caótica de PEDRA porque a letra R permanece na quarta posição (da esquerda para a direita).

A expressão matemática correspondente, deduzida pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783), é a seguinte:

$$D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

Combinações

A combinação é uma prática que está relacionada à escolha de elementos para formação de conjuntos, ou seja, agrupamentos nos quais a ordem dos elementos *não* é levada em consideração. As combinações podem ser, pelo menos, de três tipos:

a) *Combinação simples*, tipo de combinatória tal que, além de não