

Matemática Discreta:  
Conjuntos, Recorrências,  
Combinatória e Probabilidade.  
Volume - 1 (3ª edição).



## **Conselho Editorial da LF Editorial**

Amílcar Pinto Martins - Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell - Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva - Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes - UNED, Madri

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford - Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Universidade Estadual Paulista - UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa - Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras - Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia - Universidade de Lisboa

Teresa Vergani - Universidade Aberta de Portugal

Matemática Discreta:  
Conjuntos, Recorrências,  
Combinatória e Probabilidade.  
Volume - 1 (3ª edição).

Carlos A. Gomes  
cgomesmat@gmail.com

Iesus C. Diniz  
iesus\_diniz@yahoo.com.br



2024

Copyright © 2024 os autores  
1ª Edição

**Direção editorial:** Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

**Capa:** Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

---

Gomes, Carlos A.  
Matemática discreta: conjuntos, recorrências, combinatória e probabilidade: volume 1 /  
Carlos A. Gomes, Iesus C. Diniz, Roberto Teodoro. – 3. ed. – São Paulo: LF Editorial, 2024.

Bibliografia.  
ISBN 978-65-5563-517-1

1. Álgebra 2. Grafos - Teoria 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Probabilidades I. Diniz, Iesus C.  
II. Teodoro, Roberto. III. Título.

24-239565

CDD-510.7

---

Índices para catálogo sistemático:  
1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida  
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.  
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107  
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



Editora Livraria da Física  
[www.livrariadafisica.com.br](http://www.livrariadafisica.com.br)  
(11) 3815-8688 | Loja do Instituto de Física da USP  
(11) 3936-3413 | Editora

# Sumário

<b>Prefácio à Terceira Edição</b>	<b>1</b>
<b>Prefácio</b>	<b>3</b>
<b>1 Noções de lógica e conjuntos</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Noções de Lógica . . . . .	2
1.2.1 Proposições compostas . . . . .	4
1.2.2 Quantificadores . . . . .	8
1.3 Conjuntos . . . . .	9
1.3.1 Representações de um conjunto . . . . .	9
1.3.2 Relação de pertinência . . . . .	10
1.3.3 Relação de inclusão . . . . .	11
1.4 Igualdade de conjuntos . . . . .	11
1.4.1 Conjuntos das partes . . . . .	12
1.4.2 Operações com conjuntos . . . . .	12
1.5 Princípio da inclusão e exclusão . . . . .	15
1.6 Partição de um conjunto . . . . .	21
1.7 Produto cartesiano . . . . .	22
1.8 Relações binárias . . . . .	23
1.8.1 Relações de equivalência . . . . .	23
1.9 Exercícios propostos . . . . .	25
<b>2 Técnicas de demonstração</b>	<b>33</b>
2.1 Introdução . . . . .	33
2.2 Demonstração direta . . . . .	33
2.3 A contrapositiva . . . . .	36
2.4 Redução ao absurdo (ou prova por contradição) . . . . .	38
2.5 Demonstrando via um contraexemplo . . . . .	40
2.6 Equivalência . . . . .	45
2.7 Demonstração por indução e PBO . . . . .	49

2.7.1	Conjunto dos números naturais . . . . .	49
2.7.2	Princípio da boa ordenação e indução . . . . .	50
2.7.3	Alguns teoremas clássicos demonstrados por indução . . . . .	55
2.8	Continuidade discreta . . . . .	62
2.8.1	Do mundo contínuo ao mundo discreto . . . . .	63
2.9	Notações “O” e “o” de Landau . . . . .	65
2.10	Exercícios propostos . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Combinatória</b>	<b>85</b>
3.1	O fatorial . . . . .	85
3.2	Princípio Aditivo . . . . .	87
3.3	Princípio Fundamental da Contagem . . . . .	88
3.4	Permutações caóticas . . . . .	104
3.5	Princípio de Dirichlet (ou da casa dos pombos) . . . . .	111
3.5.1	Três versões do Princípio de Dirichlet . . . . .	113
3.6	Exercícios propostos . . . . .	119
<b>4</b>	<b>Números Combinatórios</b>	<b>135</b>
4.1	Coefficientes Binomiais . . . . .	135
4.2	Coefficientes Multinomiais e o Polinômio de Leibniz . . . . .	167
4.3	Número Catalan . . . . .	172
4.4	Números de Stirling . . . . .	182
4.4.1	Números de Stirling Tipo I . . . . .	184
4.4.2	Números de Stirling Tipo II . . . . .	199
4.5	Exercícios propostos . . . . .	214
<b>5</b>	<b>Probabilidade</b>	<b>223</b>
5.1	Espaço de Probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . . . . .	223
5.2	Propriedades da Probabilidade . . . . .	230
5.2.1	Lei Binomial das Probabilidades . . . . .	247
5.3	Probabilidade Condicional . . . . .	249
5.4	Esperança . . . . .	263
5.5	Exercícios propostos . . . . .	265
<b>6</b>	<b>Sequências numéricas e relações de recorrência</b>	<b>277</b>
6.1	Sequências numéricas . . . . .	277
6.2	A sequência de Fibonacci . . . . .	280
6.3	Progressões aritméticas . . . . .	297
6.4	Progressões aritméticas de ordem superior . . . . .	315
6.5	Progressões geométricas . . . . .	331
6.5.1	Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita . . . . .	333

6.6	Recorrências . . . . .	344
6.7	Recorrências lineares . . . . .	352
6.7.1	Recorrências lineares de 1ª ordem . . . . .	352
6.7.2	Resolução de recorrências lineares . . . . .	353
6.7.3	Recorrências lineares de 2ª ordem . . . . .	360
6.7.4	Outros exemplos envolvendo recorrências . . . . .	372
6.8	Exercícios propostos . . . . .	387
<b>7</b>	<b>Funções geradoras</b>	<b>409</b>
7.1	Introdução . . . . .	409
7.2	Funções geradoras . . . . .	410
7.2.1	Operações com funções geradoras . . . . .	416
7.3	Funções geradoras; funções que contam! . . . . .	424
7.4	Função Geradora Exponencial . . . . .	433
7.5	Avaliando somas . . . . .	438
7.6	Funções Geradoras e Recorrências . . . . .	441
7.7	Funções geradoras $\times$ identidades combinatórias . . . . .	445
7.8	Partições de um inteiro . . . . .	451
7.9	Exercícios propostos . . . . .	455
<b>A</b>	<b>Distribuição de bolas em urnas</b>	<b>463</b>
A.1	Introdução . . . . .	463
A.2	Bolas distintas em urnas distintas . . . . .	463
A.3	Bolas idênticas em urnas distintas . . . . .	464
A.4	Bolas distintas em urnas idênticas . . . . .	464
A.5	Bolas idênticas em urnas idênticas . . . . .	465
<b>B</b>	<b>A fórmula de Stirling</b>	<b>471</b>
B.1	Introdução . . . . .	471
B.2	A fórmula de Stirling . . . . .	473
<b>C</b>	<b>Paradoxos e Problemas Curiosos</b>	<b>485</b>
C.1	Paradoxo de Bertrand . . . . .	485
C.2	Problema dos dados . . . . .	488
C.3	Problema dos Aniversários . . . . .	488
C.4	O problema de Monty Hall . . . . .	490
C.5	Problema dos Casamentos Não Desfeitos . . . . .	492
C.6	Cinco prisioneiros e um dado . . . . .	493
C.7	Liberdade $\times$ Probabilidade . . . . .	495
C.8	Equação Quadrática e Probabilidade . . . . .	495
C.9	O Último Teorema de Fermat $\times$ Probabilidade . . . . .	497

C.10 Loteria e Probabilidade . . . . .	498
C.11 O Problema do Colecionador de Figurinhas . . . . .	499
C.12 O Problema da Agulha de Buffon . . . . .	500
<b>D Argumentos combinatórios e contagens duplas</b>	<b>507</b>
D.1 Argumentos combinatórios . . . . .	507
D.1.1 Identidades envolvendo números combinatórios . . . . .	507
D.1.2 Se contar é inteiro! . . . . .	518
D.2 Contagem dupla . . . . .	524
D.3 Problemas propostos . . . . .	528
<b>Sobre os autores</b>	<b>535</b>



# Prefácio à Terceira Edição

Nesta terceira edição foi feita uma detalhada revisão de todo volume 1 na qual gostaríamos de agradecer a todos que mandaram sugestões e comentários, em particular, aos professores Paulo Argolo e Rodrigo Madureira.

Novos exercícios foram postos nos capítulos segundo, terceiro e sexto além da complementação de um apêndice sobre *Contagem Dupla* e *Provas por Argumentos Combinatórios* em que a teoria é apresentada ao longo de 30 exemplos detalhadamente comentados e mais uma sessão de 50 problemas propostos.

Novembro de 2024.

Os autores.



# Prefácio

O presente livro tem como objetivo apresentar tópicos e técnicas de métodos discretos e análise combinatória. Destina-se a estudantes de Graduação e Mestrado, de diversas áreas como Matemática, Estatística, Ciência da Computação e Engenharias, assim como a alunos do Ensino Médio, particularmente aqueles interessados em princípios de contagem e resolução de problemas de Olimpíadas Matemáticas. Neste volume, incluem-se os seguintes temas: lógica e conjuntos, redação de demonstrações, fundamentos de combinatória e enumeração, probabilidade, relações de recorrência e funções geradoras. A teoria é entremeada com muitas aplicações e exemplos, além de interessantes notas históricas. No final de cada capítulo, é proposta uma coleção de exercícios, visando a complementar e revisar as definições e resultados apresentados.

O livro inicia com os conceitos e ideias importantes da Matemática Discreta: lógica, conjuntos e relações. No Capítulo 2, apresentam-se as principais técnicas de demonstração, permitindo ao leitor que se familiarize com a natureza de uma prova. O capítulo também possibilita aos estudantes aprenderem a construir provas matematicamente corretas, escritas de forma clara e completa.

O Capítulo 3 é dedicado aos elementos da análise combinatória: o Princípio Fundamental da Contagem, permutações, arranjos, combinações simples e completas, permutações caóticas e o Princípio das Gavetas de Dirichlet.

A jornada prossegue no Capítulo 4, com a apresentação de propriedades dos coeficientes binomiais e multinomiais e uma exposição sobre os números de Catalan e de Stirling. O próximo assunto naturalmente é a Teoria da Probabilidade, abordada no Capítulo 5. Aqui são tratadas a definição axiomática e propriedades de uma medida de probabilidade, probabilidade condicional e variáveis aleatórias discretas.

O Capítulo 6 traz um tratamento detalhado de sequências numéricas e fórmulas de recorrência, com destaque para a sequência de Fibonacci, progressões aritméticas, progressões geométricas e equações lineares de recorrência. O capítulo final do livro se centra em uma ferramenta essencial: as funções geradoras (séries formais de potência) e suas aplicações em problemas de contagem e enumeração.

Os autores ainda brindam o leitor com três apêndices, que explanam sobre a distribuição de bolas em urnas, a fórmula de Stirling e alguns paradoxos e problemas clássicos em Teoria da Probabilidade.

O livro *Matemática discreta – Volume 1* representa uma contribuição significativa ao estudo dos conceitos e ferramentas de métodos discretos e do raciocínio combinatório. Por meio da exposição da teoria, aplicações e exercícios, pretende, assim, colaborar para a aquisição de conhecimentos nessas áreas e para o desenvolvimento da criatividade matemática.

Março de 2021.

Élcio Lebensztayn.

## Agradecimentos:

Aos amigos Élcio Lebensztayn e Marcelo Siqueira pelas muitas e oportunas contribuições ao texto.



# 1

## Noções de lógica e conjuntos

### 1.1 Introdução

A Matemática é uma linguagem e como tal necessita de símbolos e regras bem estabelecidas para conectar e relacionar esses símbolos. Neste primeiro capítulo apresentaremos os rudimentos básicos da linguagem da lógica na qual se sustenta a Matemática, introduziremos a noção de conjunto que é um objeto conveniente para expressar e manipular as ideias Matemáticas. Praticamente toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é fundamental e a partir dela, os conceitos matemáticos podem ser expressos de maneira bastante precisa. Ela é também uma das mais simples das ideias matemáticas. No século XIX, alguns matemáticos e filósofos de grande porte, tais como Augustus De Morgan, David Boole, Bertrand Russel, entre tantos outros começaram a formalizar a lógica e usá-la para dar fundamentação teórica às bases da Matemática. Para esse propósito começaram a desenvolver a chamada *Lógica Simbólica*, formada por símbolos e uma linguagem própria e universal, livre de contexto. Apesar de não haver uma definição formal do que vem a ser um conjunto, a palavra **conjunto** expressa a ideia de coleção de objetos.

No final do século XIX, o matemático russo Georg Cantor (1845 – 1918) desenvolveu uma rigorosa teoria para tratar os conjuntos (A Teoria dos Conjuntos). Não vamos tratar dessa teoria aqui pelo fato de ela fugir ao nosso objetivo introdutório e pelo fato de estarmos interessados apenas em usar a linguagem proveniente dessa teoria. Por isso, no nosso caso seria mais adequado falar em noções sobre a **linguagem dos conjuntos** e é justamente isso que faremos a seguir.

Georg Cantor é muito conhecido por ter elaborado a moderna Teoria dos Conjuntos, foi a partir desta teoria que chegou ao conceito de número transfinito, incluindo as classes numéricas dos cardinais e ordinais e estabelecendo a diferença entre estes dois conceitos, que colocaram novos problemas quando se referem a

conjuntos infinitos. Nasceu em São Petersburgo (Rússia), filho do comerciante dinamarquês, George Waldemar Cantor, e de uma musicista russa, Maria Anna Böhm. Em 1856 sua família mudou-se para a Alemanha, continuando aí os seus estudos. Estudou no Instituto Federal de Tecnologia de Zurique. Doutorou-se na Universidade de Berlim em 1867. Teve como professores Ernst Kummer (1810 – 1893), Karl Weierstrass (1815 – 1897) e Leopold Kronecker (1823 – 1891).

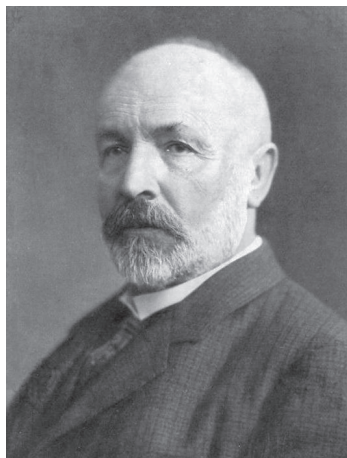


Figura 1.1: Georg Cantor (1845 – 1918)

## 1.2 Noções de Lógica

Antes de apresentarmos a linguagem básica da Teoria dos Conjuntos, faremos uma rápida incursão nos rudimentos básicos da Lógica Matemática. Simplificadamente, a Lógica é o estudo dos princípios e das técnicas do raciocínio. As suas origens remontam à Grécia antiga, tendo como seu principal representante Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), que é considerado o pai da Lógica. Entretanto foi apenas no século XVII que uma linguagem simbólica começou a ser utilizada no estudo dessa ciência. O famoso matemático alemão Gottfried Leibniz (1646 – 1716) foi o responsável pela introdução dessa linguagem simbólica para o estudo da Lógica como ciência formal. O matemático inglês Georg Boole (1815 – 1864) publicou um famoso trabalho, “An Investigation of the Laws of Thought”, onde ofereceu importantes contribuições para o tratamento formal da Lógica como ciência, particularmente do ponto de vista matemático. Atualmente a Lógica Matemática transcende as barreiras da própria Matemática e encontra muitas aplicações em



muitas áreas afins como por exemplo na Ciência da Computação e Engenharias.



Figura 1.2: Aristóteles (384 a.C. — 322 a.C.)

A seguir apresentaremos as ideias fundamentais usadas na linguagem da Lógica Matemática, seus símbolos e suas leis que serão muito úteis para sistematizar a escrita e o pensamento matemático.

**Proposição 1.1.** *Uma sentença declarativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, mas não ambas é chamada de uma proposição (ou declaração). Vamos representar as proposições por letras minúsculas do alfabeto  $p, q, r, s, \dots$  que chamaremos de variáveis Booleanas ou variáveis lógicas.*

**Exemplo 1.1.** *As seguintes sentenças são consideradas proposições:*

- Aristóteles foi um filósofo grego;
- $2 + 2 = 5$ ;
- Se  $1 = 2$ , então hoje vai chover;
- Todos os carros são azuis.

Já as sentenças a seguir não são consideradas proposições:

- Hoje vai chover? Nesse caso temos uma pergunta. Não consideraremos perguntas como sendo proposições.
- Hoje vai chover! Nesse caso temos uma exclamação. Não consideraremos exclamações como sendo proposições.
- $x + 2 = 3$ . Não podemos afirmar se essa sentença é verdadeira ou falsa, pois não sabemos quem é o  $x$ .

- Eu acho os cearenses engraçados e inteligentes. Nesse caso temos uma opinião e não consideraremos opiniões como sendo proposições.

**Definição 1.1.** A veracidade ou falsidade de uma proposição é chamado de valor lógico da proposição que é denotado por (V) (verdadeiro) ou (F) (falso). Em Ciência da Computação, normalmente utiliza-se os símbolos 1 para verdadeiro e 0 para falso.

**Observação 1.1.** Há algumas sentenças que não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Por exemplo, a sentença: “Essa sentença é falsa”. Assuma, por exemplo, que ela é verdadeira. Isso iria contradizer o que ela mesma diz. Caso você assumisse que ela é falsa, isso significaria que ela seria verdadeira, o que também nos levaria a uma contradição. Esse tipo de sentença autocontraditória não é considerada uma proposição e sim um **paradoxo**.

**Observação 1.2.** O valor lógico de uma proposição pode não ser conhecido por alguma razão, mas mesmo assim ela ainda pode ser considerada uma proposição. Por exemplo, em 1637 o matemático francês Pierre de Fermat (1607 – 1665) conjecturou que se  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  não existem três inteiros não nulos  $x, y$  e  $z$  tais que  $x^n + y^n = z^n$ . O valor lógico dessa afirmação é chamado de **O Último Teorema de Fermat** só veio a ser conhecido 258 anos depois, quando o matemático inglês Andrew Wiles provou que realmente Fermat estava certo. Na Matemática há diversas conjecturas como essa cujo valor lógico ainda não é conhecido ainda hoje, tais como a **Conjectura de Goldbach**, segundo a qual todo número par maior que 2 é soma de dois números primos (não necessariamente distintos) e a famosa **Hipótese de Riemann**, segundo a qual todas as raízes complexas da função zeta de Riemann tem parte real igual a  $\frac{1}{2}$ .

**Definição 1.2** (Negação de uma proposição). Dada uma proposição  $p$ , definimos a negação de  $p$  como sendo a proposição  $\sim p$ , lê-se não  $p$ , que tem valor lógico contrário ao de  $p$ , conforme ilustra a tabela a seguir:

$p$	$\sim p$
V	F
F	V

Essa tabela é chamada de **tabela verdade** da proposição  $p$ .

### 1.2.1 Proposições compostas

No estudo e no uso da Lógica Matemática existem vários símbolos que resumimos na tabela a seguir:

Conectivo	Símbolo	Denominação
e	$\wedge$	Conjunção
ou	$\vee$	Disjunção
Se...então	$\Rightarrow$	Condicional
Se, e somente se	$\Leftrightarrow$	Bicondicional
Não	$\sim$	Negação
Existe	$\exists$	Existência
Existe um único	$\exists!$	Unicidade
Para todo	$\forall$	Qualquer que seja

**Definição 1.3** (Proposições compostas). *São sentenças formadas por duas ou mais proposições que estejam relacionadas por conectivos lógicos.*

**Exemplo 1.2.** *Considere as seguintes proposições:*

- $p$ : Tomar banho.
- $q$ : Usar sabonete.

A partir delas podemos formular outras proposições compostas, vejamos:

- $p \wedge q$ : Tomar banho e usar sabonete;
- $p \vee q$ : Tomar banho ou usar sabonete;
- $p \Rightarrow q$ : Se tomar banho, então irá usar sabonete;
- $p \Leftrightarrow q$ : Tomar banho se, e somente se, usar sabonete;
- $p \wedge \sim q$ : Tomar banho e não usar sabonete.

Para atribuírmos valores os lógicos verdadeiro(V) ou falso (F) às proposições compostas utilizamos as chamadas tabelas-verdade. A seguir apresentaremos as tabelas verdade associadas aos tipos de proposições compostas mais comuns.

1. Conjunção: conectivo “e” ( $\wedge$ ).

A proposição  $p \wedge q$  será considerada verdadeira (V) apenas no caso em que as proposições  $p$  e  $q$  foram ambas verdadeiras, noutras palavras, a proposição  $p \wedge q$  é considerada falsa (F) quando pelo menos uma das proposições  $p$  ou  $q$  for falsa. Essas informações podem ser resumidas na seguinte tabela verdade:

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2. Disjunção: conectivo “ou” ( $\vee$ ).

A proposição  $p \vee q$  será considerada verdadeira (V) quando pelo menos uma das proposições  $p$  ou  $q$  for verdadeira, noutras palavras, a proposição  $p \vee q$  só será considerada falsa (F) quando as proposições  $p$  e  $q$  forem falsas. Essas informações podem ser resumidas na seguinte tabela verdade:

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. Condicional: conectivo “Se...então” ( $\Rightarrow$ ).

A proposição  $p \Rightarrow q$  será considerada falsa (F) apenas no caso em que as proposições  $p$  for verdadeira (V) e  $q$  for falsa (F). Neste caso, teremos a seguinte tabela-verdade:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

4. Bicondicional: conectivo “Se, e somente se” ( $\Leftrightarrow$ ).

**Definição 1.4** (Equivalência de proposições). *Duas proposições  $p$  e  $q$  são equivalentes, indica-se  $p \Leftrightarrow q$ , se têm a mesma tabela de valores lógicos.*

**Exemplo 1.3** (Equivalência entre uma proposição e sua contrapositiva). *Mostre que uma proposição  $p \Rightarrow q$  e sua contrapositiva  $\sim q \Rightarrow \sim p$  são equivalentes.*

*Solução.* De fato, as proposições  $p \Rightarrow q$  e  $\sim q \Rightarrow \sim p$  têm a mesma tabela de valores lógicos, última coluna das tabelas abaixo, conforme ilustramos a seguir:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V