Matemática Discreta:
Conjuntos, Recorrências,
Combinatória e Probabilidade.
Volume - 1 (3ª edição).

Matemática Discreta: Conjuntos, Recorrências, Combinatória e Probabilidade.

Volume - 1 (3^a edição).

Carlos A. Gomes
cgomesmat@gmail.com

Iesus C. Diniz
iesus_diniz@yahoo.com.br

LF EDITORIAL

2024

1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Gomes, Carlos A.
Matemática discreta: conjuntos, recorrências, combinatória e probabilidade: volume 1 /
Carlos A. Gomes, Iesus C. Diniz, Roberto Teodoro. – 3. ed. – São Paulo: LF Editorial, 2024.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-517-1

1. Álgebra 2. Grafos - Teoria 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Probabilidades I. Diniz, Iesus C.
II. Teodoro, Roberto. III. Título.

24-239565 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br
(11) 3815-8688 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Sumário

Prefácio à Terceira Edição

Nesta terceira edição foi feita uma detalhada revisão de todo volume 1 na qual gostaríamos de agradecer a todos que mandaram sugestões e comentários, em particular, aos professores Paulo Argolo e Rodrigo Madureira.

Novos exercícios foram postos nos capítulos segundo, terceiro e sexto além da complementação de um apêndice sobre *Contagem Dupla* e *Provas por Argumentos Combinatórios* em que a teoria é apresentada ao longo de 30 exemplos detalhadamente comentados e mais uma sessão de 50 problemas propostos.

Novembro de 2024.

Os autores.

Prefácio

O presente livro tem como objetivo apresentar tópicos e técnicas de métodos discretos e análise combinatória. Destina-se a estudantes de Graduação e Mestrado, de diversas áreas como Matemática, Estatística, Ciência da Computação e Engenharias, assim como a alunos do Ensino Médio, particularmente aqueles interessados em princípios de contagem e resolução de problemas de Olimpíadas Matemáticas. Neste volume, incluem-se os seguintes temas: lógica e conjuntos, redação de demonstrações, fundamentos de combinatória e enumeração, probabilidade, relações de recorrência e funções geradoras. A teoria é entremeada com muitas aplicações e exemplos, além de interessantes notas históricas. No final de cada capítulo, é proposta uma coleção de exercícios, visando a complementar e revisar as definições e resultados apresentados.

O livro inicia com os conceitos e ideias importantes da Matemática Discreta: lógica, conjuntos e relações. No Capítulo 2, apresentam-se as principais técnicas de demonstração, permitindo ao leitor que se familiarize com a natureza de uma prova. O capítulo também possibilita aos estudantes aprenderem a construir provas matematicamente corretas, escritas de forma clara e completa.

O Capítulo 3 é dedicado aos elementos da análise combinatória: o Princípio Fundamental da Contagem, permutações, arranjos, combinações simples e completas, permutações caóticas e o Princípio das Gavetas de Dirichlet.

A jornada prossegue no Capítulo 4, com a apresentação de propriedades dos coeficientes binomiais e multinomiais e uma exposição sobre os números de Catalan e de Stirling. O próximo assunto naturalmente é a Teoria da Probabilidade, abordada no Capítulo 5. Aqui são tratadas a definição axiomática e propriedades de uma medida de probabilidade, probabilidade condicional e variáveis aleatórias discretas.

O Capítulo 6 traz um tratamento detalhado de sequências numéricas e fórmulas de recorrência, com destaque para a sequência de Fibonacci, progressões aritméticas, progressões geométricas e equações lineares de recorrência. O capítulo final do livro se centra em uma ferramenta essencial: as funções geradoras (séries formais de potência) e suas aplicações em problemas de contagem e enumeração.

Os autores ainda brindam o leitor com três apêndices, que explanam sobre a distribuição de bolas em urnas, a fórmula de Stirling e alguns paradoxos e problemas clássicos em Teoria da Probabilidade.

O livro *Matemática discreta – Volume 1* representa uma contribuição significativa ao estudo dos conceitos e ferramentas de métodos discretos e do raciocínio combinatório. Por meio da exposição da teoria, aplicações e exercícios, pretende, assim, colaborar para a aquisição de conhecimentos nessas áreas e para o desenvolvimento da criatividade matemática.

Março de 2021.

Élcio Lebensztayn.

Agradecimentos:

Aos amigos Élcio Lebensztayn e Marcelo Siqueira pelas muitas e oportunas contribuições ao texto.

1

Noções de lógica e conjuntos

1.1 Introdução

A Matemática é uma linguagem e como tal necessita de símbolos e regras bem estabelecidas para conectar e relacionar esses símbolos. Neste primeiro capítulo apresentaremos os rudimentos básicos da linguagem da lógica na qual se sustenta a Matemática, introduziremos a noção de conjunto que é um objeto conveniente para expressar e manipular as ideias Matemáticas. Praticamente toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é fundamental e a partir dela, os conceitos matemáticos podem ser expressos de maneira bastante precisa. Ela é também uma das mais simples das ideias matemáticas. No século XIX, alguns matemáticos e filósofos de grande porte, tais como Augustus De Morgan, David Boole, Bertrand Russel, entre tantos outros começaram a formalizar a lógica e usá-la para dar fundamentação teórica às bases da Matemática. Para esse propósito começaram a desenvolver a chamada *Lógica Simbólica*, formada por símbolos e uma linguagem própria e universal, livre de contexto. Apesar de não haver uma definição formal do que vem a ser um conjunto, a palavra **conjunto** expressa a ideia de coleção de objetos.

No final do século XIX, o matemático russo Georg Cantor ($1845-1918$) desenvolveu uma rigorosa teoria para tratar os conjuntos (A Teoria dos Conjuntos). Não vamos tratar dessa teoria aqui pelo fato de ela fugir ao nosso objetivo introdutório e pelo fato de estarmos interessados apenas em usar a linguagem proveniente dessa teoria. Por isso, no nosso caso seria mais adequado falar em noções sobre a **linguagem dos conjuntos** e é justamente isso que faremos a seguir.

Georg Cantor é muito conhecido por ter elaborado a moderna Teoria dos Conjuntos, foi a partir desta teoria que chegou ao conceito de número transfinito, incluindo as classes numéricas dos cardinais e ordinais e estabelecendo a diferença entre estes dois conceitos, que colocaram novos problemas quando se referem a conjuntos infinitos. Nasceu em São Petersburgo (Rússia), filho do comerciante dinamarquês, George Waldemar Cantor, e de uma musicista russa, Maria Anna Böhm. Em 1856 sua família mudou-se para a Alemanha, continuando aí os seus estudos. Estudou no Instituto Federal de Tecnologia de Zurique. Doutorou-se na Universidade de Berlim em 1867. Teve como professores Ernst Kummer $(1810 - 1893)$, Karl Weierstrass $(1815 - 1897)$ e Leopold Kronecker $(1823 - 1891)$.

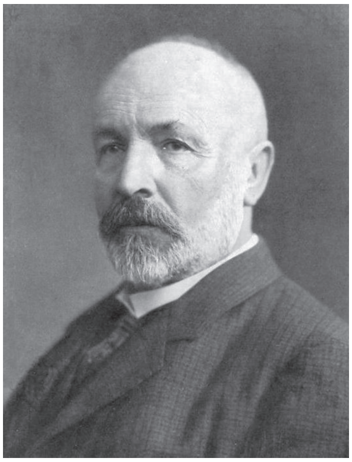

Figura 1.1: Georg Cantor $(1845 - 1918)$

1.2 Noções de Lógica

Antes de apresentarmos a linguagem básica da Teoria dos Conjuntos, faremos uma rápida incursão nos rudimentos básicos da Lógica Matemática. Simplificadamente, a Lógica é o estudo dos princípios e das técnicas do raciocínio. As suas origens remontam à Grécia antiga, tendo como seu principal representante Aristóteles $(384\ \text{a.C.} - 322\ \text{a.C.})$, que é considerado o pai da Lógica. Entretanto foi apenas no século XVII que uma linguagem simbólica começou a ser utilizada no estudo dessa ciência. O famoso matemático alemão Gottfried Liebniz $(1646 - 1716)$ foi o responsável pela introdução desse linguagem simbólica para o estudo da Lógica como ciência formal. O matemático inglês Georg Boole $(1815 - 1864)$ publicou um famoso trabalho, “An Investigation of the Laws of Thought”, onde ofereceu importante contribuições para o tratamento formal da Lógica como ciência, particularmente do ponto de vista matemático. Atualmente a Lógica Matemática transcende as barreiras da própria Matemática e encontra muitas aplicações em muitas áreas afins como por exemplo na Ciência da Computação e Engenharias.

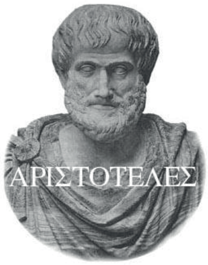

Figura 1.2: Aristóteles (384 a.C. $-$ 322 a.C.)

A seguir apresentaremos as ideias fundamentais usadas na linguagem da Lógica Matemática, seus símbolos e suas leis que serão muito úteis para sistematizar a escrita e o pensamento matemático.

Proposição 1.1. *Uma sentença declarativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, mas não ambas é chamada de uma proposição (ou declaração). Vamos representar as proposições por letras minúsculas do alfabeto* $p, q, r, s, \ldots$ *que chamaremos de variáveis Booleanas ou variáveis lógicas.*

Exemplo 1.1. *As seguintes sentenças são consideradas proposições:*

- Aristóteles foi um filósofo grego;
- $2 + 2 = 5$;
- Se $1 = 2$, então hoje vai chover;
- Todos os carros são azuis.

Já as sentenças a seguir não são consideradas proposições:

- Hoje vai chover? Nesse caso temos uma pergunta. Não consideraremos perguntas como sendo proposições.
- Hoje vai chover! Nesse caso temos uma exclamação. Não consideraremos exclamações como sendo proposições.
- $x + 2 = 3$. Não podemos afirmar se essa sentença é verdadeira ou falsa, pois não sabemos quem é o x.

- Eu acho os cearenses engraçados e inteligentes. Nesse caso temos uma opinião e não consideraremos opiniões como sendo proposições.

Definição 1.1. *A veracidade ou falsidade de um proposição é chamado de valor lógico da proposição que é denotado por* (V) *(verdadeiro) ou* (F) *(falso). Em Ciência da Computação, normalmente utiliza-se os símbolos* 1 *para verdadeiro e* 0 *para falso.*

Observação 1.1. *Há algumas sentenças que não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Por exemplo, a sentença: "Essa sentença é falsa". Assuma, por exemplo, que ela é verdadeira. Isso iria contradizer o que ela mesma diz. Caso você assumisse que ela é falsa, isso significaria que ela seria verdadeira, o que também nos levaria a uma contradição. Esse tipo de sentença autocontraditória não é considerada uma proposição e sim um* **paradoxo***.*

Observação 1.2. *O valor lógico de uma proposição pode não ser conhecido por alguma razão, mas mesmo assim ela ainda pode ser considerada uma proposição. Por exemplo, em* 1637 *o matemático francês Pierre de Fermat* $(1607 - 1665)$ *conjecturou que se* $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ *não existem três inteiros não nulos* x, y *e* z *tais que* $x^n + y^n = z^n$*. O valor lógico dessa afirmação é chamado de* **O Último Teorema de Fermat** *só veio a ser conhecido* 258 *anos depois, quando o matemático inglês Andrew Wiles provou que realmente Fermat estava certo. Na Matemática há diversas conjecturas como essa cujo valor lógico ainda não é conhecido ainda hoje,tais como a* **Conjectura de Goldbach***, segundo a qual todo número par maior que 2 é soma de dois números primos (não necessariamente distintos) e a famosa* **Hipótese de Riemann***, segundo a qual todas as raízes complexas da função zeta de Riemann tem parte real igual a* $\frac{1}{2}$*.*

Definição 1.2 (Negação de uma proposição)**.** *Dada uma proposição* p*, definimos a negação de* p *como sendo a proposição* $\sim p$*, lê-se não* p*, que tem valor lógico contrário ao de* p*, conforme ilustra a tabela a seguir:*

p	$\sim p$
V	*F*
F	*V*

Essa tabela é chamada de **tabela verdade** *da proposição* p*.*

1.2.1 Proposições compostas

No estudo e no uso da Lógica Matemática existem vários símbolos que resumimos na tabela a seguir:

Conectivo	Símbolo	Denominação
e	$\wedge$	Conjunção
ou	$\vee$	Disjunção
Se...então	$\Rightarrow$	Condicional
Se, e somente se	$\Leftrightarrow$	Bicondicional
Não	$\sim$	Negação
Existe	$\exists$	Existência
Existe um único	$\exists!$	Unicidade
Para todo	$\forall$	Qualquer que seja

Definição 1.3 (Proposições compostas)**.** *São sentenças formadas por duas ou mais proposições que estejam relacionas por conectivos lógicos.*

Exemplo 1.2. *Considere as seguintes proposições:*

- p*: Tomar banho.*
- q*: Usar sabonete.*

A partir delas podemos formular outras proposições compostas, vejamos:

- $\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}$*: Tomar banho e usar sabonete;*
- $\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$*: Tomar banho ou usar sabonete;*
- $\mathsf{p} \Rightarrow \mathsf{q}$*: Se tomar banho, então irá usar sabonete;*
- $\mathsf{p} \Leftrightarrow \mathsf{q}$*: Tomar banho se, e somente se, usar sabonete;*
- $\mathsf{p} \wedge \sim \mathsf{q}$*: Tomar banho e não usar sabonete.*

Para atribuirmos valores os lógicos verdeiro(V) ou falso (F) às proposições compostas utilizamos as chamadas tabelas-verdade. A seguir apresentaremos as tabelas verdade associadas aos tipos de proposições compostas mais comuns.

1. Conjunção: conectivo “e” ($\wedge$).

   A proposição $\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}$ será considerada verdadeira (V) apenas no caso em que as proposições p e q foram ambas verdadeiras, noutras palavras, a proposição $\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}$ é considerada falsa (F) quando pelo menos uma das proposições p ou q for falsa. Essas informações podem ser resumidas na seguinte tabela verdade:

p	q	$\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2. Disjunção: conectivo "ou" ($\vee$).

   A proposição $p \vee q$ será considerada verdadeira (V) quando pelo menos uma das proposições p ou q for verdadeira, noutras palavras, a proposição $p \vee q$ só será considerada falsa (F) quando as proposições p e q forem falsas. Essas informações podem ser resumidas na seguinte tabela verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. Condicional: conectivo "Se...então" ($\Rightarrow$).

   A proposição $p \Rightarrow q$ será considerada falsa (F) apenas no caso em que as proposições p for verdadeira (V) e q for falsa (F). Neste caso, teremos a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

4. Bicondicional: conectivo "Se, e somente se" ($\Leftrightarrow$).

   Definição 1.4 (Equivalência de proposições)**.** *Duas proposições* p *e* q *são* **equivalentes***, indica-se* $p \Leftrightarrow q$*, se têm a mesma tabela de valores lógicos.*

Exemplo 1.3 (Equivalência entre uma proposição e sua contrapositiva)**.** *Mostre que uma proposição* $p \Rightarrow q$ *e sua contrapositiva* $\sim q \Rightarrow \sim p$ *são equivalentes.*

Solução. De fato, as proposições $p \Rightarrow q$ e $\sim q \Rightarrow \sim p$ têm a mesma tabela de valores lógicos, última coluna das tabelas abaixo, conforme ilustramos a seguir:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V