



O LIBER ABBACI DE FIBONACCI

Das matemáticas medievais
para o ensino atual



Marc Moyon

Traduzido por

Iran Abreu Mendes e Lorena Mendes Cavalcante

O LIBER ABBACI DE FIBONACCI

Das matemáticas medievais
para o ensino atual

Prefácio

Iran Abreu Mendes

Posfácio

Wagner Rodrigues Valente



São Paulo
2025

Copyright © 2025 by Marc Moyon. All Rights Reserved.

Editor

José Roberto Marinho

Projeto gráfico e capa

Waldelino Duarte

Tradução, Notas e revisão de texto

Iran Abreu Mendes e Lorena Lais Mendes Cavalcante

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moyon, Marc

O liber Abbaci de Fibonacci: das matemáticas medievais para o ensino atual / Marc Moyon; tradução Iran Abreu Mendes, Lorena Mendes Cavalcante; prefácio Iran Abreu Mendes; posfácio Wagner Rodrigues Valente. - São Paulo: LF Editorial, 2025.

Título original: Le Liber Abbaci de Fibonacci.

Bibliografia.

ISBN 978-65-5563-541-6

1. Fibonacci, Leonardo, aproximadamente 1170-aproximadamente 1240
2. Matemática - História 3. Matemática medieval I. Mendes, Iran Abreu. II. Cavalcante, Lorena Mendes. III. Valente, Wagner Rodrigues. IV. Título.

25-252432

CDD-510

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática 510

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão do organizador. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil • *Printed in Brazil*



Editora Livraria da Física

Fone: (11) 3815-8688 / Loja (IFUSP)

Fone: (11) 3936-3413 / Editora

www.livrariadafisica.com.br | www.lfeditorial.com.br

Comitê Editorial

Carlos Aldemir Farias da Silva
Universidade Federal do Pará (UFPA/Brasil)

Emmánuel Lizcano Fernández
Universidade Nacional de Educação à Distância (UNED/Espanha)

Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Pará (UFPA/Brasil)

Jesus Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidade Católica do Peru (Peru)

John Andrew Fossa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN/Brasil)

José Manuel Matos
Universidade Nova de Lisboa (Portugal)

Luis Radford
Laurentian University (Canadá)

Raquel Gonçalves-Maia
Universidad de Lisboa (Portugal)

Teresa Vergani
Universidade Aberta de Portugal (Portugal)

Wagner Rodrigues Valente
Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP/Brasil)



Sumário

Prefácio: Iran Abreu Mendes	9
Aviso aos leitores	17
1. Leonardo de Pisa ou Fibonacci: algumas palavras	21
Contexto geopolítico do século XIII	23
Leonardo de Pisa (vida e obra): um matemático entre os países do Islã e da Europa Latina	26
O <i>Liber Abbaci</i> [O Livro de Cálculo]	33
Números inteiros: numeração indo-arábica	35
A escrita de frações em Fibonacci: uma fonte Maghrebina (norte-africana)?	45
Álgebra na obra de Fibonacci	47
2. <i>Liber Abbaci</i> através de uma seleção de questões	51
Introdução	54
Problemas de frações e proporcionalidade	56
Para saber mais: situação de proporcionalidade, cálculos e representação	56
Compartilhamento de ovelha: um almoço selvagem	58
O encontro de duas formigas	61
O leão no poço	64
A torre das serpentes	67
Um problema de modelagem: o problema do coelho	69
Problemas de iteração e de potências	77
As frutas e o viajante	79
Problemas das cidades atravessadas	84
A árvore, seus galhos e seus ninhos	89
Os sete anciãos	91
O tabuleiro de xadrez (1)	93
O tabuleiro de xadrez (2)	104
Técnicas Avançadas de Resolução	109
O método simples de falsa posição	109
O método da dupla falsa posição	110
Problema de idade	112

As Cisternas.....	115
Lucros, despesas e vendas: proporcionalidade.....	119
Lucros, despesas e vendas: regra direta e regra inversa.....	123
Lucros e despesas de um comerciante viajante.....	127
O salário de um trabalhador.....	134
Homens e dinheiro.....	139
O problema do número pensado e o teorema do resto chinês.....	143
O "algoritmo ampliador" do <i>Liber Abbaci</i>	147
3. Fibonacci na sala de aula.....	161
Prolegômenos: uso do <i>Liber Abbaci</i> nas aulas.	
Que ambições para o presente?.....	163
Recreação e ensino de Matemática.....	167
Texto original, livros escolares contemporâneos e propostas didáticas.....	171
Um exemplo de implementação educacional: o problema do pomar.....	185
Quando a "perspectiva histórica" rima com "desenvolvimento algorítmico".....	187
Tentativas de resolver usando álgebra.....	189
Ensaio de resolução por tentativa e erro.....	192
Resolução pelo "método de inversão" ou "regra transversal".....	192
Generalização do problema.....	197
Avaliação e as competências matemáticas.....	201
4. Parte final.....	203
Conclusão.....	205
Apêndices.....	211
Bibliografia Consultada.....	220
Posfácio: Wagner Rodrigues Valente.....	235
Índice de onomástico.....	239
Índice de locais mencionados.....	241
Sobre o Autor.....	243

Prefácio

Em busca das almas matemáticas perdidas

Se alguém pudesse olhar para nós lá do alto, veria que o mundo está repleto de pessoas que correm apressadas, transpiradas e muito cansadas, e que atrás delas correm atrasadas, as suas almas perdidas ...

(Olga Tokarczuk; Joanna Concejo, 2020)¹

Em nosso caso, podíamos nos perguntar: se alma é vida, então, por onde andam as almas matemáticas produzidas historicamente? Se afastaram dos corpos matemáticos humanos ou se perderam nos caminhos abstratos sem pensamento e sem ações práticas? Será que migraram para novos corpos científicos e não souberam voltar aos seus corpos matemáticos? Ou será que desapareceram nos percursos de escritas e reescritas dos documentos antigos que serviram de base para a produção matemática e não tiveram como encontrar seus lugares de origem?

Para pensar sobre o assunto, precisamos ter em conta que a maior parte dos nossos conhecimentos acerca das culturas antigas chega até nós na forma de documentos já escritos por outras gerações da Antiguidade remota, que foram sendo reproduzidos ao longo dos milênios em diversas épocas e lugares.

¹ TOKARCZUK, Olga; CONCEJO, Joanna. A alma perdida. Tradução Teresa Fernandes Swiatkiewicz. Lisboa: Editora Fábula, 2020.

Em quase todos os casos as reproduções desses documentos sobreviveram, principalmente, por meio de cópias distanciadas dos originais, em muitos graus de descontinuidades em relação aos originais ou por acréscimos de outras informações na intenção de explicitar mais o que não parecia claro para quem os reeditou.

Tais cópias nem sempre estiveram ou ainda estão livres de erros cometidos por quem copiou esses documentos (em alguns casos se trata de manuscritos antigos), e que muitas vezes não tinha domínio dos assuntos aos quais se tratava no manuscrito copiado, ou que pode ter cometido erros interpretativos de grande amplitude, que acabaram por desvirtuar as ideias de quem escreveu o texto original.

A prática da copia de manuscritos se constituiu em um processo muito importante na preservação e manutenção dos conhecimentos socioculturais produzidos pela humanidade, e devido a situações como essas mencionadas nos parágrafos anteriores, resulta num princípio segundo o qual todas as pessoas que se interessarem em utilizar a sério quaisquer tipos de textos antigos, devem ter muita cautela e prestar muita atenção às incertezas presentes nesses textos para saber lidar com as informações neles presentes, uma vez que se trata de fontes históricas muito mais próximas dos originais e que certamente podem ter sofrido algum tipo de reconfiguração textual ao longo das diversas edições, fazendo com que as informações presentes nas novas cópias se distanciassem do manuscrito original.

Igualmente, podem ocorrer equívocos interpretativos quando se trata da organização de um novo texto a partir da compilação de diversos textos originais, com o objetivo de produzir uma nova informação que se diferencia de cada uma das fontes que geraram tal compilação. Neste caso trata-se de se tomar um cuidado com esse tipo de exercício autoral, acadêmico e historiográfico, pois essa prática tem implicações importantes em estudos e pesquisas relacionados a investigação histórica que envolvem análise de documentos antigos, tradução de textos originais e elaboração de novos textos historio-

gráficos com enfoques renovados acerca de determinados aspectos da história sociocultural da humanidade.

Tal atitude significa atentar para um melhor exercício de formulação de juízos possivelmente mais aproximados sobre os passos de produção dos conhecimentos pelos antigos, em busca de dar veracidade aos fatos historiografados, principalmente se a partir desses fatos forem realizados outros estudos que impliquem na reescrita das histórias contidas nos documentos pesquisados ou em processos de promoção de aprendizagem da cultura por meio das informações históricas.

Assim, podemos pensar que o ofício do historiador está imbricado no exercício da tradução de fatos e acontecimentos sociais em busca da construção de realidades passadas e presentes, em práticas descritivas, analíticas e indutivas como num movimento de idas e vindas das marés, sempre em busca de novos indícios trazidos pelas correntes informativas, às quais tem acesso, na meta de ampliar o novo conhecimento sobre fenômenos socioculturais históricos em todos os seus momentos. Portanto, esse processo de tradução das realidades nas formas de documentos se processa desde as observações até a exploração curiosa de artefatos, mentafatos e sociofatos que possam compor cenários descritivos e interpretativos para, então, compor as histórias da cultura humana.

No campo da pesquisa em história da matemática se trata de compor, recompor, descrever e explicar as mais variadas formas de desenvolvimento do conhecimento matemático em contextos socioculturais diversos, tomando a cada história um ou mais aspectos para os quais possam convergir os fatos e acontecimentos que compõem a historiografia elaborada. Neste caso podem ser tomados como ponto de inscrição e circunscrição das histórias da matemática, elementos que comporão os cenários temáticos das matemáticas focalizadas, como no exemplo deste livro elaborado por Marc Moyon para dar um novo enfoque ao *Liber Abbaci de Leonardo de Pisa – O Fibonacci*.

O tema do livro em pauta tem com centro de convergência poligonal as aritméticas emergentes do trabalho de um matemático autor da Idade Média,

e foi estruturado para conectar diferentes vértices da cultura matemática, que estão indicados em sua obra, e que ultrapassou muitos séculos, sob uma multiplicidade de escritas e interpretações em busca de uma nova ótica cultural matemática da qual se pode lançar novas lentes no passado em conexão com o presente. É possível, portanto, considerarmos as potencialidades desse livro para o ensino de aritmética e outros temas correlacionados às matemáticas escolares, a partir do legado deixado por Fibonacci, que aqui está muito bem descrito e comentado analiticamente por Marc Moyon.

Por compreender que um prefácio ou prólogo corresponde a uma espécie de texto introdutório à uma obra escrita, cuja elaboração é feita de maneira descontraída, ou seja, na forma de um texto que antecede a narrativa do autor, nele me propus a ampliar a possibilidade de o leitor fazer sua imersão e contextualização no texto.

Neste sentido, interconecto minhas palavras na forma de um testemunho para apresentar uma reflexão que me levou a asseverar que o trabalho elaborado por Moyon vem ao encontro dos meus argumentos favoráveis à institucionalização de princípios e métodos que fundamentem uma abordagem conceitual e didática para o ensino da matemática escolar assentado no desenvolvimento histórico das culturas matemáticas, uma vez que esse foi meu propósito de estudos e pesquisas desde a década de 1990, quando apontei princípios, fundamentos e métodos que advogavam a favor da exploração e problematização histórica da matemática em seus contextos socio-históricos, cognitivos e culturais para promover uma aprendizagem compreensiva da matemática pelos estudantes.

Portanto, reitero que este livro é uma demonstração de alguns dos modos de se produzir uma publicação que atende a dois eixos temáticos da pesquisa em história da matemática que aqui estão completamente associados: a história e epistemologia da matemática e a história para o ensino da matemática.

tica (Mendes, 2023a)². Por isso posso aprofundar com bastante propriedade, que o livro evidencia uma pluralidade de relações com minhas colocações mencionadas anteriormente e que estão aqui concretizadas nas cinco partes principais que compõem a organização estrutural do livro.

Tal organização envolve uma pesquisa historiográfica que reinterpreta um conjunto de fatos históricos associados a acontecimentos do passado em conexão com o presente, a fim de estabelecer um movimento sequencial histórico (Mendes, 2023b)³ e, em seguida segue por um fio condutor que leva o leitor em direção a um campo de experiências didáticas experimentais possíveis, caracterizadas pela recreação matemática, ludicidade de pensamento e criatividade matemática, além das potencialidades de exercício do imaginário matemático característico do trabalho de Fibonacci.

É assim que o autor nos apresenta inicialmente um Leonardo de Pisa ou Fibonacci como um matemático medieval além do seu tempo, situado simultaneamente entre os países do Islã e a Europa Latina, em um ambiente fértil que lhe possibilitou produzir seu *Liber Abbaci* [Livro de Cálculo], nos deixando um legado sobre os números inteiros fundado na numeração indo-árabe e ao mesmo tempo sobre a escrita de frações e uma prática concernente às ideias iniciais da álgebra.

Mas é sobre o *Liber Abbaci* que o autor se debruça com mais vitalidade ao tomar o tema nas mãos, através de uma seleção de questões e problematizações investigadas, de modo a criar seu sequencial histórico de problemas recreativos e lúdicos extraídos do original do *Liber Abbaci* (em latim), traduzindo-os para a língua francesa e nos oferecendo a possibilidade de traduzí-lo

2 MENDES, I. A.. O processo de pesquisa em suas três dimensões e o CREPHIMat. In: Iran Abreu Mendes; Luis Andrés Castillo Bracho.(Org.). **Catálogo do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática** - CREPHIMat (1990-2021). 1ed. Belém: Flecha do Tempo, 2023, v. , p. 8-20.

3 MENDES, I. A. História como um agente cognitivo de aprendizagem matemática compreensiva. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 25, n. 2, p. 329–355, 2023. DOI: 10.23925/1983-3156.2023v25i1p329-355. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/62018>. Acesso em: 16 ago. 2024.

para a língua portuguesa (como um desafio), o que nos levou a um exercício de aprendizagem da tradução jamais imaginado.

No que concerne ao desenvolvimento histórico e epistemológico da matemática em Fibonacci, Moyon selecionou um material para o seu sequencial histórico, incluindo uma diversidade de problemas que envolve números inteiros, frações e proporcionalidade em diferentes situações cotidianas reais e imaginadas, para proporcionar o desenvolvimento da criatividade matemática nos cálculos e suas representações escritas, como por exemplo no caso de *Um almoço selvagem*, do *Encontro entre duas formigas* e no clássico *Problema do coelho*, dentre outros. Contudo, sua ludicidade de autor não parou aí. Prosseguiu com a seleção de outros problemas como os que envolvem iterações e potências, dos quais destacamos *As frutas e o viajante*, *A árvore, seus galhos e seus ninhos*; *Os sete anciãos* e, como não podia faltar os problemas que envolvem os tabuleiros de xadrez.

Na preparação dos processos didáticos para exploração de seu sequencial histórico sobre o assunto elaborado nas partes iniciais do livro, o autor apresenta técnicas avançadas de resolução dos problemas selecionados, como os métodos de falsa posição, ao abordar problemas relacionados à idade, lucros, despesas e vendas para relacionar regras de três direta e inversa; aritmética comercial e financeira e outros algoritmos potencializadores dos exercícios de aprendizagem compreensiva a partir do *Liber Abbaci*;

Na parte didática experimental o autor nos apresenta Fibonacci na sala de aula, ou seja, a utilização dos problemas selecionados para seu exercício docente envolvendo o *Liber Abbaci* nas aulas de matemática nos anos finais do ensino fundamental. Descreve um exemplo de implementação pedagógica envolvendo os problemas de modo a explorar pedagogicamente a perspectiva histórica com uso dos algorítmicos gerados na interpretação de cada problema.

Por fim, descreve sua experiência avaliativa das competências e habilidades matemáticas dos estudantes e nos oferece encaminhamentos para novas experiências com o mesmo tema, assim como nos dá uma oportunidade ímpar

de pensar em um exercício completo de pesquisa sobre história da matemática e seu desdobramento didático na sala de aula, em processos completamente incorporados aos programas de ensino e aos livros didáticos, tal como sugere Mendes (2023b) em seu *Movimento Sequencial Histórico* para o ensino de matemática (MSH). Isto porque Moyon nos apresenta, ainda, um conjunto de livros didáticos brasileiros em que destaca aspectos da obra de Fibonacci que parecem nos livros e comenta os modos como tais aspectos se posicionam nos livros comentados por ele.

Ao final, o livro ainda nos traz um grupo de links indicativos de sites onde se pode explorar os manuscritos sobre a obra de Fibonacci e finaliza com uma bibliografia selecionada sobre o tema.

Cabe aos leitores mergulharem nesse mar de ideias, ludicidade e recreação matemática oferecida por Fibonacci e selecionada por Marc Moyon para que se torne possível encontrar as almas perdidas da matemática que se afastaram dos corpos matemáticos no decorrer dos tempos.

Belém, Agosto, 2024.

Iran Abreu Mendes



Aviso aos leitores

Esta obra está redigida para alunos e professores dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio (11-18 anos), bem como a todas as pessoas curiosas sobre matemática e sua história. Como tal, eu não tive a pretensão de oferecer neste livro os resultados de um estudo exaustivo da obra de Fibonacci que visasse a erudição. Trata-se, antes, de um modesto florescimento de problemas provenientes do *Liber Abbaci* [livro de cálculo], traduzidos a partir da edição de referência⁴, mantendo o espírito original do texto latino (especialmente para escrever números, e em particular frações). Os problemas foram escolhidos entre os mais propícios para uso educacional da obra mais importante do matemático pisano, sem qualquer dúvida. O primeiro objetivo era traduzir para o Brasil os meus trechos do *Liber Abbaci* publicados nas edições do Canguru (Moyon, 2016). Entretanto, à medida que fui dialogando com Iran Abreu Mendes o projeto se transformou e cresceu até se tornar no presente livro. Agradeço muito sinceramente, pois sem ele e o colega Wagner Rodrigues Valente do GHEMAT (Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática - SP), esta obra, por mais modesta que seja, não estaria destinada a ser de grande importância. Com efeito, é de meu conhecimento, que até o ano de 2024 não existiu nenhuma versão do *Liber Abbaci* em português. De outra parte, destaco, esta obra também marca o ponto de partida de uma frutuosa colaboração, concernente à pesquisa em história da matemática, entre

⁴ A seguir utilizo a grafia “*Liber Abbaci*” seguindo a leitura dos manuscritos disponíveis em Fibonacci (2020, p.3).

o Brasil e a França. Também, espero que ela seja bem acolhida pelos leitores, desejosos de conhecer melhor a matemática medieval e suas potencialidades para o ensino da matemática na atualidade.

Agradeço especialmente à Lorena Cavalcante pela parceria na tradução e revisão técnica. Tive um prazer imenso de trabalhar na tradução em português, por mais difícil que ela tenha sido. As questões envolvendo tradução do vocabulário e dos conceitos são naturais e importantes, contudo aquelas de aculturação são ainda mais importantes. De fato, é necessário levar em conta ao máximo possível o leitor-alvo da tradução (leitores de cultura lusófona) de um texto escrito por um autor francês, com uma experiência pedagógica na França. Eu aprendi muito com as discussões com Iran Abreu Mendes e Lorena Cavalcante. Agradeço também calorosamente a André e Jean-Philippe Deledicq que escreveram vários comentários matemáticos da primeira edição, alguns dos quais estão incluídos no presente trabalho, pois certamente sem essas contribuições eu não teria tido a coragem de escrever um novo livro para um público lusófono⁵. Agradeço também desde já a Félise Moyon que teve a gentileza de criar os desenhos para este trabalho. Por último, expresso a minha gratidão aos meus colegas Helder Pinto e Helmuth Malonek da Universidade de Aveiro (Portugal) por terem concordado em revisar e criticar este trabalho antes da sua publicação.

A primeira parte deste livro dá uma visão de conjunto da obra de Fibonacci e do contexto em que evoluiu, no século XIII, em Pisa, ou mais geralmente em torno do Mar Mediterrâneo. Com efeito, Fibonacci pode ser considerado um ‘passador’ de saberes e saber-saber-fazer dos países do Islã à Europa latina pelo seu conhecimento do corpus matemático árabe e mesmo das tradições locais do cálculo, cujos traços são evidentes na sua obra, mas que muitas vezes são difíceis de se dar a conhecer⁶.

5 N.T. A intenção é divulgar os resultados de estudos e pesquisas sobre esse tema, de modo que este livro seja consultado por leitores de países de língua portuguesa, interessados no assunto da pesquisa aqui descrita, ou ainda, tomar como objeto de investigação em futuras pesquisas.

6 Ver, em particular, Giusti (2021).

A escolha de problemas, apresentada na segunda parte, tem por objetivo mostrar a riqueza dos textos de Fibonacci e ilustrar alguns dos métodos que ele usou. Eu também selecionei estes problemas ao pensar no ensino de matemática, por considerar que são particularmente interessantes para os alunos hoje. Eu tentei ao máximo, sempre que possível, fazer comentários matemáticos (em termos modernos) de modo a permitir que meus leitores entendam melhor o texto medieval e os raciocínios matemáticos que emergem do texto original. Para traduções latino-francesas, eu desejei permanecer o mais próximo possível do texto de Fibonacci, embora eu mesmo me tenha permitido certos desvios, mas permanecendo-lhe fiel, a fim de tornar o texto compreensível para leitores de hoje. Isto porque o texto medieval parece por vezes complicado, o que me levou a tentar simplificá-lo, desde que não sacrificasse o raciocínio nem o léxico. O texto francês foi então traduzido para português. Uma revisão fina em paralelo com o texto em latim (disponível no livro para todas as citações de Fibonacci) foi realizada conjuntamente pelo autor e pelos tradutores. Eu também adotei uma pontuação moderna por razões de legibilidade, uma vez que nos textos os autores medievais não se usavam pontos ou vírgulas como fazemos hoje⁷.

Em todas as citações, mantive a numeração da edição latina de referência (numeração dada, consoante os casos, por todas as letras, romana ou indo-árabe) (Fibonacci, 2020). A terceira parte é explicitamente dedicada às possibilidades de se usar o texto de Fibonacci nas aulas de matemática atuais. Nela, eu expus algumas experiências durante as quais os alunos franceses trabalharam no texto do *Liber Abbaci* para desenvolver certas habilidades matemáticas.

Finalmente, no meu próprio texto ou nos meus comentários, indiquei entre colchetes [...] a tradução de expressões em língua estrangeira (primeiro redigida em itálico). Tentei limitar o uso de notas de rodapé por uma questão

7 N.T. O mesmo cuidado foi adotado para a tradução em língua portuguesa, pelos tradutores, para atender à norma culta e às normas técnicas brasileiras.

de fluidez. Além disso, limitei as referências bibliográficas ao mais essencial e recente; que são indicadas no final do livro.

Espero que os leitores desfrutem dos problemas escolhidos e dos métodos implementados por Fibonacci. Eis, em todo o caso, uma boa ocasião para ler matemática medieval do Século XIII e explorá-la em sala de aula para aqueles que desejam realizar tal intento.

Marc Moyon
Belém, 19 de maio de 2024