

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E
TECNOLOGIAS DIGITAIS VIA
INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS E
OBJETOS DE APRENDIZAGEM**



Conselho Editorial da LF Editorial

Amílcar Pinto Martins - Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell - Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva - Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes - UNED, Madri

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford - Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Universidade Estadual Paulista - UNESP/
Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida - Universidade Federal do Rio
Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa - Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras - Universidade de Granada, Espanha

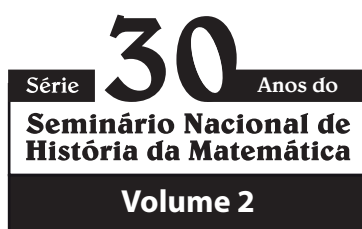
Maria Marly de Oliveira - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia - Universidade de Lisboa

Teresa Vergani - Universidade Aberta de Portugal

GISELLE COSTA DE SOUSA
ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES
MARIA LUIZA DOS SANTOS

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS VIA INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS E OBJETOS DE APRENDIZAGEM



Marcos Lübeck
Rafael Montoito
(Organizadores)



2025

Copyright © 2025 os autores
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Projeto gráfico e diagramação: Fabrício Ribeiro

Apoio Financeiro: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Sousa, Giselle Costa de

História da matemática e tecnologias digitais via instrumentos matemáticos e objetos de aprendizagem / Giselle Costa de Sousa, Anna Beatriz de Andrade Gomes, Maria Luiza dos Santos ; Marcos Lübeck, Rafael Montoito (organizadores). -- São Paulo : LF Editorial, 2025. -- (Série 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática ; v. 2)

Bibliografia.

ISBN 978-65-5563-558-4

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Matemática - História 3. Tecnologias digitais I. Gomes, Anna Beatriz de Andrade. II. Santos, Maria Luiza dos. III. Lübeck, Marcos. IV. Montoito, Rafael. V. Título. VI. Série.

25-260186

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.

Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



EDITORIAL

LF Editorial

www.livrariadafisica.com.br

www.lfeditorial.com.br

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

APRESENTAÇÃO

*Venho de antes da primeira estância
Antes, até, do que as navegações...
Antes das horas... De qualquer distância...
Antes da lava levantar vulcões!*

*Trago milênios nos pezuolos cheios...
Eras maduras a me reciclar...
Vem tanta história nesse meu arreio
Que não se cansa de desencilhar!*

Os versos selecionados são parte da canção *O tempo e o vento*, a qual foi composta por Rodrigo Bauer e venceu a 21ª Seara da Canção Gaúcha, em 2022. Sua escolha para compor a apresentação desta Série Comemorativa aos 30 Anos do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) é bastante significativa, por vários motivos, a começar porque somos, os presidentes da Comissão Científica e Comissão Local, e organizadores dela, gaúchos de nascimento e, portanto, identificados com este chão e sua cultura.

Esta letra canta o tempo, entidade extra-humana que sempre houve, e que passa, incontrolável e irrefreável, embora muitas vezes tentemos dominá-lo. E o tempo passou... lá se foram 30 anos da realização do I SNHM, ocorrido em 1995, na Universidade Federal Rural de Pernambuco, em Recife. Neste 2025, em Pelotas, no Rio Grande do Sul (RS), o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSul) se orgulha em fazer parte da história deste evento, sediando-o, e ocupando um espaço no tempo, que seguirá

avanzando para futuras edições, em outras paragens. É assim mesmo! O tempo é composto de peças conectadas e o IFSul se vincula ao que veio antes, e ao que virá depois.

Nas marcas deixadas pelo tempo recente, ficaram dis-sabores da tragédia climática que acometeu o RS em 2024. Erguer-se dos escombros e promover um evento que recebe profissionais, pesquisadores e estudantes de todo o país, e de fora, foi um passo indelével para escrevermos novos capítulos da história – uma história mais otimista e solidária. Eis que a presença e união dos participantes no XVI SNHM abrilhanta o nosso estado e traz, para o extremo-sul do Brasil, as discussões mais atuais sobre a História da Matemática.

Dirigindo-nos àqueles versos iniciais, torna-se impossível não lembrar do saudoso professor Ubiratan D'Ambrosio que, em diversas oportunidades, escreveu e afirmou que o ser humano busca não apenas a sobrevivência, mas a sua transcendência. Este é um dos motivos pelo qual todas as culturas humanas produzem Matemática e deixam seus vestígios espalhados pelo tempo: a Matemática – que vem de “antes, até, do que as navegações..., antes das horas..., de qualquer distância”, cujos documentos e diversas fontes enchem os “peçuelos” dos pesquisadores à espera de serem esquadrihados – é um objeto de estudo de diferentes “eras” e pesquisas que, feitas ao longo dos anos e em admirável quantidade, vão desnudando e acrescentando tantas novas camadas de “história nesse meu arreo”.

Nos 30 anos decorridos pelo SNHM, incontáveis foram os professores e os alunos que participaram dos momentos de estudo e partilha de saberes: graduandos se afeiçoaram à História da Matemática, muitos mestrandos e doutorandos

constituíram-se relevantes pesquisadores, e historiadores, hoje renomados, seguem firmes partilhando experiências. Não é, portanto, difícil de perceber que a comunidade de investigadores em História da Matemática tem crescido em número e temáticas de estudo, investindo em novos tópicos sem, necessariamente, renunciar aos assuntos que são clássicos nesse meio.

Desde 2001, no IV SNHM, realizado na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em Natal, a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) publica, em cada edição, uma série de livros sobre os minicursos ministrados no evento, que juntas compõem a chamada “Coleção História da Matemática para Professores”, contendo agora mais de 135 livros. Seus principais objetivos são divulgar o conhecimento científico sobre a História da Matemática e incentivar os professores a levarem, para os seus alunos, esse conhecimento. Os minicursos são direcionados ao desenvolvimento de atividades e ações didático-pedagógicas que façam uso da História da Matemática voltadas para o ensino de conteúdos em diferentes níveis, atendendo ao objetivo original e basilar da sua existência nos SNHM, que é oferecer aos professores do ensino fundamental, médio e superior temas da História da Matemática que possam subsidiar e serem trabalhados em suas práticas.

O XVI SNHM, ao seu tempo e maneira, dá continuidade nisto, onde professores e pesquisadores do Brasil e de fora se encontram, para apresentar pesquisas, compartilhar e construir conhecimentos sobre a História da Matemática. Às séries de livros anteriores, esta, que é comemorativa aos 30 anos do SNHM, se une, na expectativa – e esperança – de tempos

sempre melhores para a educação brasileira: uma educação que seja crítica, de qualidade e formativa no viés da cidadania e do desenvolvimento sociocultural.

Marcos Lübeck

Rafael Montoito

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS EM ALIANÇA COM INSTRUMENTOS E OA.....	19
História da Matemática e Tecnologias Digitais em aliança com Instrumentos Matemáticos.....	21
História da Matemática e Tecnologias Digitais em aliança com Objetos de Aprendizagem.....	30
CADERNO DE ATIVIDADES ALIANDO HM E TD VIA OCTANTE REFLEXIVO DOS IRMÃOS HADLEY	43
O Octante, sua produção e contexto inglês do século XVII....	43
O caderno de atividades.....	56
Atividade 1 – Conhecendo o instrumento Octante Reflexivo (Adaptada de Gomes, 2024).....	58
Atividade 2 – Explorando o instrumento Octante Reflexivo no GeoGebra (Adaptado de Gomes, 2024).....	68
Atividade 3 – Identificando conhecimentos de natureza matemática mobilizados no uso do instrumento Octante (Adaptado de Gomes, 2024).....	78
OBJETO DE APRENDIZAGEM ALIANDO HM E TD A PARTIR DO PROBLEMA DO XADREZ DE AL-BIRUNI	89
O problema do xadrez em <i>A Cronologia das Nações Antigas</i> de al-Biruni	89

<i>Apresentando o Objeto de Aprendizagem O desafio de al-Biruni: solucionando o problema do xadrez.....</i>	101
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	111
REFERÊNCIAS	119
AS AUTORAS.....	131

INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos a história vem sendo delineada e culturalmente produzida num coletivo ativo e constante que produz, reproduz e coproduz conhecimentos e saberes, dentre os quais se situam os de natureza matemática. Neste sentido, nas diferentes atividades sociais, uma história da matemática vem se constituindo em diferentes regiões e épocas. Similarmente, estamos vivendo em uma sociedade cada vez mais conectada que globaliza suas informações, vivências e ações, em especial, a partir de tecnologias. Escreve-se assim, novas histórias, inclusive, novas histórias da matemática.

A fim de compreender este cenário, diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas, por exemplo, no campo da história da matemática e no campo das tecnologias digitais. Algumas dessas pesquisas voltam-se, inclusive, para investigações desses campos no âmbito educacional. De fato, Miguel e Miorin (2019), Mendes (2015, 2023), Mendes e Chaquiam (2016), Saito (2013, 2015, 2016), entre outros, examinam uso de história da matemática no ensino de matemática. Da mesma forma, Levy (1993), Tikhomirov (1981), Borba, Scucuglia e Ganidis (2020), Borba, Souto e Canedo Júnior (2022), Borba e Penteadó (2019) e outros, estudam a utilização das tecnologias digitais em sala de aula de matemática. Em ambos os casos, argumentos favoráveis em paralelo avaliação de limitações deste uso são ponderados e revelam que se procura oportunizar possibilidades de ensino-aprendizagem por meio de uma história pedagogicamente vetorizada, sendo mais uma alternativa

metodológica assim como o uso das tecnologias digitais no ensino, que busca propiciar aprendizado pela incorporação de diferentes mídias na educação matemática num coletivo pensante.

Mais recentemente, um campo relativamente novo de investigação neste contexto vem sendo inaugurado, a saber, a *aliança entre história da matemática e tecnologias digitais*. De fato, Sousa (2023b), por meio de uma linha do tempo da aliança, coloca que iniciativas sistemáticas de estudos direcionados para essa temática tem seu primeiro registro, no Brasil, em 2012. Contudo, conforme Oliveira e Sousa (2012), há ressalva que alguns trabalhos anteriores, embora não diretamente voltados para aliança, já tenham sido desenvolvidos, a exemplo do livro de Trivizoli e Mariotto (2011) – que trata de panorama histórico e resolução de problema de Apolônio utilizando software geométrico –, fruto de minicurso no IX Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM). Desde então, um conjunto de pesquisas que aliam história da matemática e tecnologias digitais vem sendo produzido, incluindo minicursos em 4 recentes edições do SNHM (2017, 2021, 2023 e 2025). Portanto, é neste contexto que situamos a temática deste livro e justificamos sua proposição tendo em vista a ampliação de contribuições científicas que almejam a aliança entre história da matemática e tecnologias digitais, particularmente, via instrumentos matemáticos e objetos de aprendizagem do tipo jogo digital.

Para esclarecer essas proposições, voltamos neste momento a atenção para a definição da aliança entre história da matemática e tecnologias digitais. A aliança entre história

da matemática e tecnologias digitais é definida por uma tendência em educação matemática que procura abordar problemas/temas/episódios históricos de natureza matemática por meio/com apoio de tecnologias (Sousa, 2020). Para tanto, se norteia por *parâmetros* – referencial; metodologia; tópicos de história da matemática (tema histórico); recursos tecnológicos mais recorrentes; argumentos favoráveis e ênfase/cunho educacional –, apontados por Costa e Sousa (2017), que guiam os estudos.

Além dos parâmetros supracitados, a aliança se mune de elementos constituintes como *atividades-históricas-com-tecnologias* e *investigação-histórica-com-tecnologias*. Com relação ao primeiro elemento, são consideradas atividades/tarefas (conjunto) que exploram/investigam problemas/situações/episódios/temas históricos, de natureza matemáticos, via/com apoio de tecnologias digitais. Para tanto, possuem itens essenciais que envolvem elementos textuais, informações básicas, desenvolvimento da atividade e avaliação. Sobre o segundo elemento da aliança podemos dizer que são veículos/meios de viabilização prática da aplicação das atividades/desenvolvimento de pesquisa/estudos da aliança em condições, ocorrendo em fases que se relacionam com ações de introdução a tarefa investigativa/imersão na atividade, desenvolvimento da investigação que faz uso de tecnologia digital e avaliação que concebe momento de socialização dos resultados de compreensão de elementos de natureza matemática a partir da história, compreendendo-a com apoio de tecnologias e ao mesmo tempo se apropriando de tais tendências em conjunto.

Vale enfatizar que, inicialmente, a aliança foi pensada com a conexão entre três tendências em educação matemática, ou seja, história da matemática, tecnologias digitais e investigação matemática. Isto justifica, pois, a presença do segundo elemento da aliança mencionado antes e ainda que o primeiro elemento era visto como o veículo de concretização dos trabalhos em prol do ensino de matemática. Contudo, à medida que as pesquisas foram avançando, foi percebido que a tríade de tendências podia se resumir ao par, história e tecnologias, para a aliança, podendo assim a conexão deste binário ocorrer não só via investigação matemática, mas por outras tendências e possibilidades de conjunções. Deste modo, a partir de Sousa (2023b), assumes *alianças entre HM e TD* e não só aliança.

As *alianças entre história da matemática e tecnologias digitais* podem se congregam a outras tendências, variadas tecnologias e diferentes aspectos que aludem cunho educacional, para além dos parâmetros e elementos concebidos preliminarmente. Portanto, à luz dessas alianças, vários trabalhos se solidificam unindo teoria e práticas, seja por meio de atividades-históricas-com-tecnologias, seja a partir de objetos de aprendizagem, seja mediante instrumentos matemáticos, ou outras opções que devem incluir prioritariamente *materiais didáticos instrucionais/produtos educacionais*¹ que podem ser explorados em sala de aula.

1 De acordo com a Capes, há várias categorias de produtos educacionais como: o material didático e instrucional; desenvolvimento de produto; desenvolvimento de aplicativo; desenvolvimento de técnicas; cursos de curta duração e atividades de extensão e; outros produtos como produções artísticas. Em particular, material didático instrucional podem ser consideradas “propostas de ensino tais como sugestões de experimentos e outras atividades práticas, sequências didáticas, propostas de intervenção, roteiros de oficinas; material textual tais como

Para concretizarmos esta finalidade, definimos alguns *procedimentos para pesquisas da aliança ou alianças entre história da matemática e tecnologias digitais*. Esclarecendo, orienta-se que investigações preliminares sejam realizadas em documentos/temas/episódios históricos, por exemplo, por meio de 1. *estudo histórico-matemático de obras/documentos*. Concebemos um estudo histórico-matemático como sendo um exame das fontes históricas em seu contexto num movimento de texto e contexto que foca em conhecimentos de natureza matemática e suas relações com demais conhecimentos em sua malha histórica², levando em conta elementos historiográficos, epistemológicos e contextuais. Além disso, assumimos documento como sendo um recurso para pesquisa historiográfica. Para Garnica e Souza (2012),

fontes seriam os resíduos do passado que chegam até nós; documentos são as fontes que, num determinado momento, em determinadas condições e segundo determinados interesses tomamos efetivamente como recursos para uma investigação.

manuais, guias, textos de apoio, artigos em revistas técnicas ou de divulgação, livros didáticos e paradidáticos, histórias em quadrinhos e similares, dicionários, relatórios publicizados ou não, parciais ou finais de projetos encomendados sob demanda de órgãos públicos”, tendo o objetivo de apoiar a realização de atividades educativas e de formação, podendo seu formato e tipo mudar de acordo com a sua finalidade. (Documento, ..., 2019, p. 10).

- 2 Saito (2015) usa essa expressão, malha histórica, em seus estudos sobre interface entre história e ensino, para fazer referência à trama de fios que tece um tecido assim como podemos encontrar eles no conhecimento historicamente produzido em seu contexto numa aproximação de vertente historiográfica atualizada ou crítica, cujos questionamentos que norteiam a produção histórica estão no presente, entretanto este não é usado para julgar o conhecimento produzido no passado, mas para examiná-lo numa malha histórica tecida pelo fio da não linearidade temporal. Diferentemente, a vertente historiográfica tradicional busca eles lineares de um requerido progresso do conhecimento.

Fontes podem existir ou ser criadas e permanecerem sem ser tomadas como recursos de pesquisa. Um antigo acervo de livros e registros numa biblioteca, por exemplo, tem fontes. Essas fontes, segundo alguns autores, só serão chamadas de documentos quando um leitor atento ler esses livros, estudar esses registros e, portanto, usá-los como recursos para uma pesquisa específica.

Posteriormente, 2. *extraímos situações deste estudo* para uso e produção do material didático instrucional. Em seguida, 3. as situações extraídas são usadas na *produção do material didático*. Por fim, 4. *o material é testado e validado, avaliando resultados*.

Assumindo a definição, os parâmetros atuais, bem como elementos constitutivos e procedimentos, trazemos neste livro uma amostra de práticas fundamentadas na aliança entre história da matemática e tecnologias digitais, por meio da investigação de problemas históricos de natureza aritmética e geométrica, fazendo o uso de produtos educacionais mais recentes desenvolvidos na perspectiva supracitada com apoio de recursos como GeoGebra e Objetos de Aprendizagem (OA) do tipo jogo digital³. Nesta direção, serão exploradas atividades-históricas-com-tecnologia, guiadas pelo instrumento Octante Reflexivo⁴ dos irmãos Hadley (ingleses do

3 Para Kirriemuir e Mcfarlane (2004), um jogo digital é um jogo que só pode ser executado em vídeo games, computadores ou dispositivos móveis. Exemplos podem ser citados por Santos (2024).

4 Segundo Gomes (2024, p. 17), o octante reflexivo é um instrumento, desenvolvido pelos irmãos Hadley na Inglaterra entre o fim do século XVII e o século XVIII, “capaz de encontrar a distância angular entre o horizonte e um astro ou entre dois astros por meio da dupla reflexão entre espelhos de no máximo 90°. Em seu contexto de produção, a finalidade desta função do Octante era

século XVIII), bem como, objeto de aprendizagem, produzido a partir de estudo histórico-matemático de fragmento da obra *A Cronologia das Nações Antigas* de al-Biruni (islâmico do período medieval) sobre problema de xadrez.

Desse modo, o presente livro é fruto de minicurso ofertado no XVI Seminário Nacional de História da Matemática no qual os aspectos teóricos e metodológicos foram apresentados juntamente com o desenvolvimento de atividades e ações didático-pedagógicas que façam uso da história da matemática em aliança com tecnologias digitais via instrumentos matemáticos e objetos de aprendizagem. Para tanto, encontra-se dividido em cinco capítulos. O primeiro deles, compreende este introdutório onde situamos o leitor a respeito da temática, anseios e estrutura do livro. O segundo capítulo é intitulado *Sobre história da matemática e tecnologias digitais em aliança com instrumentos e objetos de aprendizagem*. Nele, são apresentados fundamentos da proposta de aliança entre história da matemática e tecnologias digitais, sendo a primeira seção destinada a particularidade desta proposta para o caso de instrumentos matemáticos e a segunda seção para o caso de objetos de aprendizagem. O terceiro capítulo tem como título *Caderno de atividades aliando HM e TD via Octante Reflexivo dos irmãos Hadley*. Nele, há duas seções, sendo que na primeira é apresentado o estudo histórico-matemático feito em torno do instrumento Octante Reflexivo, seus autores e contexto e, na segunda seção, são trazidas as atividades elaboradas à luz dessa investigação. O quarto capítulo recebe o título de *Objeto de aprendizagem*

auxiliar a navegação”, sendo um instrumento similar ao sextante ou quadrante, por exemplo.

aliando HM e TD a partir do problema do xadrez de al-Biruni. Nele, trazemos duas seções, uma sobre os aspectos histórico-matemáticos do problema do xadrez do fragmento do documento estudado, sobre al-Biruni e seu contexto; a outra seção apresenta o objeto de aprendizagem produzido e suas possibilidades didáticas. Por fim, o quinto capítulo trata das considerações finais do livro.

Considerando essa estrutura e partir do cenário apresentado, as alianças construídas, impregnadas no âmago social, entre história da matemática e tecnologias digitais, compõem-se numa via de conexão com instrumentos matemáticos e objetos de aprendizagem conforme segue o próximo capítulo.

SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS EM ALIANÇA COM INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS E OA

Encontramos na literatura diversas de bibliografias que retratam argumentos favoráveis da utilização da história da matemática (HM) enquanto tendência em educação matemática, a exemplo de Miguel e Miorim (2019) e Fauvel e Mannen (2000). Similarmente, outras tendências como uso de tecnologias digitais (TD) também se sustentam em argumentos que valorizam suas vantagens frente à educação matemática, como por exemplo propõem Borba e Penteadó (2019) e Borba, Souto e Canedo Júnior (2022). Além disso, trabalhos como Sousa (2020b) e Sousa (2023b) sugerem que a união entre tendências como história da matemática e tecnologias digitais podem ser bastante promissoras, bem como a conjunção desta união com outras possíveis conexões em prol do ensino e aprendizagem da matemática. Neste ínterim, além da aliança entre história da matemática e tecnologias digitais, surgem as alianças entre HM e TD, como pode ser ilustrado na Figura 1 adiante.

Figura 1 – Aliança e Alianças



Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Conforme posto, de modo sistemático, a partir de 2012, no Brasil, há um movimento de proposição de estudos sobre uso de história da matemática e tecnologias digitais de modo aliado. Embora ainda haja necessidade de fomento de mais trabalhos, como aponta levantamento feito por Sanchez, Castillo e Mendes (2021), esse tempo transcorrido de pouco mais de uma década de contribuições, tem levado a aliança entre HM e TD a composições mais robustas, atualizando sua definição, ampliando os parâmetros iniciais de proposição, delineando novos elementos constituintes, direcionando novos procedimentos e expandindo possibilidades de conexões inovadoras ao ponto da tríade de aliança entre HM, TD e IM ser concebida como o par de conexão entre HM e TD que tende a se unir com inúmeras outras opções em prol da educação matemática, consolidando uma tendência.

Dentre as opções de aliança entre HM e TD, temos as apresentadas por Sousa (2020b, 2023b, 2024) que envolvem ligações da história da matemática e tecnologias digitais com