TRIÂNGULO ARITMÉTICO:

aspectos históricos e abordagens em livros didáticos de Matemática do Brasil

LF EDITORIAL

Conselho Editorial da LF Editorial

Amílcar Pinto Martins - Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell - Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva - Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes - UNED, Madri

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford - Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Universidade Estadual Paulista - UNESP/ Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa - Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras - Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia - Universidade de Lisboa

Teresa Vergani - Universidade Aberta de Portugal

LUCAS QUEIROZ CORDEIRO DE MOURA
NICKSON DEYVIS DA SILVA CORREIA
VIVIANE DE OLIVEIRA SANTOS

TRIÂNGULO ARITMÉTICO:

aspectos históricos e abordagens em livros didáticos de Matemática do Brasil

Série 30 Anos do
Seminário Nacional de História da Matemática
Volume 6

Marcos Lübeck
Rafael Montoito
(Organizadores)

LF EDITORIAL

2025

Copyright © 2025 os autores
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro
Projeto gráfico e diagramação: Fabrício Ribeiro

Apoio Financeiro: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moura, Lucas Queiroz Cordeiro de
Triângulo aritmético : aspectos históricos e abordagens em livros didáticos de matemática do Brasil / Lucas Queiroz Cordeiro de Moura, Nickson Deyvis da Silva Correia, Viviane de Oliveira Santos ;Marcos Lübeck, Rafael Montoito (organizadores). – São Paulo: LF Editorial, 2025. – (Série 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática; v. 6)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-562-1

1. Aritmética 2. Livros didáticos - Matemática 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Matemática - História I. Correia, Nickson Deyvis da Silva. II. Santos, Viviane de Oliveira. III. Lübeck, Marcos.IV. Montoito, Rafael. V. Título. VI. Série.

25-260200 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998

LF Editorial
www.livrariadafisica.com.br
www.lfeditorial.com.br
(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

APRESENTAÇÃO

Venho de antes da primeira estância
Antes, até, do que as navegações...
Antes das horas... De qualquer distância...
Antes da lava levantar vulcões!

Trago milênios nos peçuelos cheios...
Eras maduras a me reciclar...
Vem tanta história nesse meu arreio
Que não se cansa de desencilhar!

Os versos selecionados são parte da canção *O tempo e o vento*, a qual foi composta por Rodrigo Bauer e venceu a 21ª Seara da Canção Gaúcha, em 2022. Sua escolha para compor a apresentação desta Série Comemorativa aos 30 Anos do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) é bastante significativa, por vários motivos, a começar porque somos, os presidentes da Comissão Científica e Comissão Local, e organizadores dela, gaúchos de nascimento e, portanto, identificados com este chão e sua cultura.

Esta letra canta o tempo, entidade extra-humana que sempre houve, e que passa, incontrolável e irrefreável, embora muitas vezes tentemos dominá-lo. E o tempo passou... lá se foram 30 anos da realização do I SNHM, ocorrido em 1995, na Universidade Federal Rural de Pernambuco, em Recife. Neste 2025, em Pelotas, no Rio Grande do Sul (RS), o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSul) se orgulha em fazer parte da história deste evento, sediando-o, e ocupando um espaço no tempo, que seguirá

avançando para futuras edições, em outras paragens. É assim mesmo! O tempo é composto de peças conectadas e o IFSul se vincula ao que veio antes, e ao que virá depois.

Nas marcas deixadas pelo tempo recente, ficaram dissabores da tragédia climática que acometeu o RS em 2024. Erguer-se dos escombros e promover um evento que recebe profissionais, pesquisadores e estudantes de todo o país, e de fora, foi um passo indelével para escrevermos novos capítulos da história – uma história mais otimista e solidária. Eis que a presença e união dos participantes no XVI SNHM abrilhanta o nosso estado e traz, para o extremo-sul do Brasil, as discussões mais atuais sobre a História da Matemática.

Dirigindo-nos àqueles versos iniciais, torna-se impossível não lembrar do saudoso professor Ubiratan D'Ambrosio que, em diversas oportunidades, escreveu e afirmou que o ser humano busca não apenas a sobrevivência, mas a sua transcendência. Este é um dos motivos pelo qual todas culturas humanas produzem Matemática e deixam seus vestígios espalhados pelo tempo: a Matemática – que vem de "antes, até, do que as navegações..., antes das horas..., de qualquer distância", cujos documentos e diversas fontes enchem os "peçuelos" dos pesquisadores à espera de serem esquadrinhados – é um objeto de estudo de diferentes "eras" e pesquisas que, feitas ao longo dos anos e em admirável quantidade, vão desnudando e acrescentando tantas novas camadas de "história nesse meu arreio".

Nos 30 anos decorridos pelo SNHM, incontáveis foram os professores e os alunos que participaram dos momentos de estudo e partilha de saberes: graduandos se afeiçoaram à História da Matemática, muitos mestrandos e doutorandos

constituíram-se relevantes pesquisadores, e historiadores, hoje renomados, seguem firmes partilhando experiências. Não é, portanto, difícil de perceber que a comunidade de investigadores em História da Matemática tem crescido em número e temáticas de estudo, investindo em novos tópicos sem, necessariamente, renunciar aos assuntos que são clássicos nesse meio.

Desde 2001, no IV SNHM, realizado na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em Natal, a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) publica, em cada edição, uma série de livros sobre os minicursos ministrados no evento, que juntas compõem a chamada "Coleção História da Matemática para Professores", contendo agora mais de 135 livros. Seus principais objetivos são divulgar o conhecimento científico sobre a História da Matemática e incentivar os professores a levarem, para os seus alunos, esse conhecimento. Os minicursos são direcionados ao desenvolvimento de atividades e ações didático-pedagógicas que façam uso da História da Matemática voltadas para o ensino de conteúdos em diferentes níveis, atendendo ao objetivo original e basilar da sua existência nos SNHM, que é oferecer aos professores do ensino fundamental, médio e superior temas da História da Matemática que possam subsidiar e serem trabalhados em suas práticas.

O XVI SNHM, ao seu tempo e maneira, dá continuidade nisto, onde professores e pesquisadores do Brasil e de fora se encontram, para apresentar pesquisas, compartilhar e construir conhecimentos sobre a História da Matemática. Às séries de livros anteriores, esta, que é comemorativa aos 30 anos do SNHM, se une, na expectativa – e esperança – de tempos

sempre melhores para a educação brasileira: uma educação que seja crítica, de qualidade e formativa no viés da cidadania e do desenvolvimento sociocultural.

Marcos Lübeck
Rafael Montoito

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11

O TRIÂNGULO ARITMÉTICO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA 15

Aspectos históricos 15

Blaise Pascal (1623-1662) e o Tratado sobre o Triângulo Aritmético 33

TRIÂNGULO ARITMÉTICO NA HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL 49

O Ensino de Matemática no Brasil Colônia (1500-1822) e Brasil Império (1822-1889) 49

Ensino de Matemática nas República Velha (1889-1930) e Era Vargas (1930 - 1945) 57

Ensino de Matemática nas República Populista (1945-1964) e Ditadura Militar (1964-1984) 76

Ensino de Matemática na República Nova (1984-atual) 94

O TRIÂNGULO ARITMÉTICO COMO TEMA DE PESQUISA BIBLIOGRÁFICA 127

CONSIDERAÇÕES FINAIS 149

REFERÊNCIAS 151

A/OS AUTOR(A/ES) 163

INTRODUÇÃO

Dentre vários conteúdos matemáticos ministrados em sala de aula, abordaremos neste livro sobre o Triângulo Aritmético, conteúdo também presente em livros didáticos de Matemática produzidos e utilizados no Brasil desde a década de 1930.

A escolha do conteúdo pode ser pautada em Dias (2014), ao dizer que a importância do tema para a História da Matemática se reflete nas aplicações do Triângulo Aritmético ao longo de sua história. Além disso, compreender o Triângulo Aritmético se torna fundamental, pois é utilizado ao abordar o conteúdo Binômio de Newton, uma vez que existe uma relação intrínseca entre a forma como o Triângulo Aritmético é construído e os coeficientes binomiais que aparecem nos binômios de Newton (Affonso, 2014).

Uma abordagem histórica pode promover uma aprendizagem mais significativa para os professores e, consequentemente, para os seus estudantes. Desta forma, iremos apresentar aspectos históricos do Triângulo Aritmético e suas abordagens em livros didáticos de Matemática do Brasil. Além disso, será apresentada uma proposta para realizar um Projeto de Pesquisa de Iniciação Científica abordando o Triângulo Aritmético.

Dassie e Costa (2014) ressaltam que as fontes desempenham um papel crucial na historiografia da Educação Matemática e, dentre essas fontes, destacam-se os livros didáticos. Ainda nesse contexto, Valente (2008), com base em Chervel (1990), menciona que o estudo dos livros didáticos é

uma referência consolidada para vários historiadores que pesquisam disciplinas escolares, uma vez que esses livros revelam significativamente o desenvolvimento histórico de uma disciplina específica.

Couto e Jucá (2019) ainda acrescentam que, ao utilizar livros didáticos como objeto de pesquisa, o pesquisador tem a oportunidade de traçar a história de uma determinada disciplina, permitindo observar as transformações ocorridas ao longo do tempo. Desta forma, apresentar uma abordagem histórica do conteúdo utilizando como fontes livros didáticos do Brasil se torna de grande importância.

Ao longo do texto, serão expostas as possíveis origens e estudos iniciais do conteúdo, visando compreender as nomenclaturas desse triângulo durante a história e suas contribuições para a História da Matemática. Também iremos explicitar de que modo esse conteúdo foi apresentado em livros didáticos de Matemática produzidos e utilizados no Brasil, abordando a apresentação geral, os aspectos históricos, alguns exercícios, entre outros.

Por fim, será apresentada uma proposta de como abordar historicamente o Triângulo Aritmético por meio de um Projeto de Pesquisa de Iniciação Científica com estudantes do Ensino Médio.

Esperamos que este livro venha a colaborar com a formação de professores de Matemática em relação ao conhecimento histórico sobre o Triângulo Aritmético, a sua abordagem nos livros didáticos de Matemática e a possibilidade de pesquisa sobre o tema com estudantes do Ensino Médio.

Todos nós, professores e professoras, buscamos formas de melhoria no ensino e na aprendizagem da Matemática, e a História da Matemática é uma das formas que pode propiciar uma matemática mais humana e nos fazer entender como os conteúdos matemáticos se desenvolveram ao longo da história.

O TRIÂNGULO ARITMÉTICO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Iniciaremos nosso texto expondo sobre as possíveis origens e estudos iniciais do Triângulo Aritmético, visando compreender as suas nomenclaturas ao longo da história e suas contribuições para a História da Matemática.

Aspectos históricos

De acordo com Fossa (2018), Blaise Pascal (1623–1662) foi um dos primeiros matemáticos a formular corretamente a técnica de indução matemática presente em sua própria obra.

> Na escola básica, o tema Triângulo Aritmético (mais conhecido nos livros como Triângulo de Pascal) é pouco explorado. Na maioria das vezes, é utilizado como introdução ao estudo do Binômio de Newton ou como complementação ao conceito de Combinações Simples. (Rosadas, 2016, p. 13).

Na tradução da obra de Pascal, *Tratado sobre o triângulo aritmético*[1], realizada por John A. Fossa e Fabrício Possebon (2013), é visto que o "Triângulo de Pascal" surgiu muito antes de Pascal. Porém, por que hoje os livros didáticos e outras fontes do ensino apresentam tal conteúdo como Triângulo de Pascal?

1 *Traite du Triangle Arithmetique* (1665).

Para Fossa (2018), Pascal não apenas criou o conceito do Triângulo sem se basear em trabalhos anteriores, mas também apresentou, em Pascal (2013), uma explicação minuciosa sobre o tema, além de descrever diversas aplicações relacionadas.

Segundo Lopes, Carneiro e Carneiro (2020), além do nome Triângulo de Pascal, o Triângulo Aritmético teve vários nomes, isso devido ao fato de ser objeto de estudo de vários matemáticos ao longo da história: Triângulo de Yang Hui, Triângulo Combinatório e Triângulo de Tartaglia.

Dias (2014, p. 51) relata que as concepções do Triângulo Aritmético percorrem por três situações essenciais, que são: "[...] o Triângulo Aritmético a partir dos números figurados, o Triângulo Combinatório e o Triângulo Binominal [...]". Para entendermos melhor sobre o Triângulo Aritmético que antecede a concepção de Blaise Pascal, utilizaremos os trabalhos de Dias (2014) e Edwards (2002).

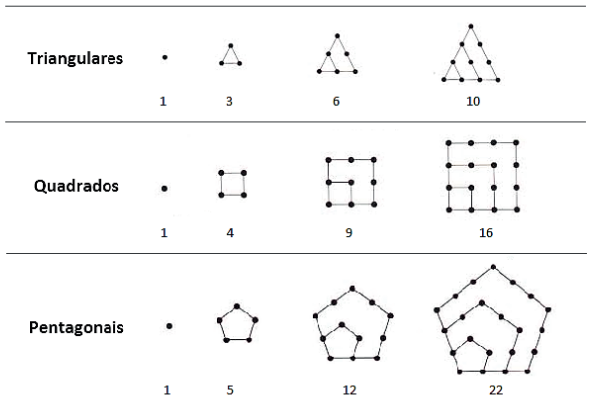
Triângulo Figurado

Dias (2014), com referências em Edwards (2002), nos revela que a história do Triângulo Aritmético tem seus primeiros indícios "[...] com a preocupação pitagórica dos padrões numéricos, ou seja, os números figurados, e remonta ao ano 540 a.C." (Dias, 2014, p. 51), conhecido como Triângulo Figurado.

Segundo Dias (2014), como acontece com os números triangulares e quadrados, é possível criar outros poligonais no plano, como os números pentagonais, hexagonais e assim por diante, conforme ilustrado na Figura 1. Contudo, a generalização de números triangulares na direção do Triângulo Aritmético não leva a números quadrados no plano, como

estimava-se, mas a números triangulares de três dimensões, como os piramidais ou tetraédricos, mencionados por Teon (aproximadamente 335–405 E.C.) e Nicômaco (aproximadamente 60–120 E.C), respectivamente.

Figura 1 – Números polinomiais



Fonte: Dias (2014, p. 52).

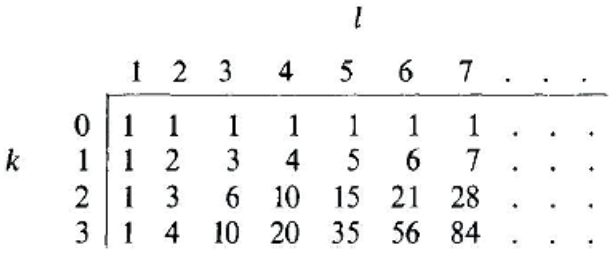
Na interpretação de Teon e Nicômaco, os números triangulares são constituídos pela soma dos primeiros naturais. Desse modo, como 1 é o primeiro número natural e o primeiro número triangular, na soma dos dois primeiros números 1 + 2 o resultado é 3, que é número triangular conseguinte. Com a soma dos três primeiros números naturais 1 + 2 + 3, encontra-se o próximo número triangular, o 6.

Segundo Edwards (2002), os números piramidais são os números triangulares em três dimensões, formados pela soma dos primeiros números triangulares. Dias (2014) ressalta que na soma dos três primeiros números triangulares 1 + 3 + 6 o

resultado será 10, sendo esse o próximo número piramidal. A soma dos quatro termos 1 + 3 + 6 + 10 resultará no próximo número, o 20, com isso, o próximo número piramidal será a soma dos seus antecessores.

Os números tetraédricos (números de quatro dimensões), segundo Dias (2014), são frutos da soma dos primeiros números piramidais, como podemos observar na Figura 2.

Figura 2 – Parte dos Triângulos figurado com números figurados em até três dimensões



		l									
		1	2	3	4	5	6	7	.	.	.
	0	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.
k	1	1	2	3	4	5	6	7	.	.	.
	2	1	3	6	10	15	21	28	.	.	.
	3	1	4	10	20	35	56	84	.	.	.

Fig. 8 Part of the Figurate Triangle: the figurate numbers in 0, 1, 2 and 3 dimensions

Fonte: Edwards (2002, p. 23).

De acordo com Edwards (2002) e Dias (2014), os números figurados só foram explorados em quatro ou mais dimensões em aproximadamente mais de 1300 anos depois do tempo de Nicômaco e Teon, com o matemático italiano Nicolo Tartaglia (1500–1557). Segundo os autores, tal estudo foi ampliado "[...] enquanto enumerava lançamento de dados, ainda que sua tábua não tenha sido publicada até 1556" (Dias, 2014, p. 53).

Segundo Dias (2014), Michael Stifel (1487–1567), matemático alemão, desenvolveu em 1544 um método para

estender o Triângulo Figurado relacionando à extração de raízes, baseado em uma identidade euclidiana[2]. Ele utilizou os números binomiais, que obteve a partir desse triângulo, e os aplicou para calcular raízes de diferentes valores. Seu processo envolvia escrever a sequência dos números naturais (1, 2, 3, 4, ...) e, a partir do número 3, gerar os números triangulares (3, 6, 10, 15, ...). Em seguida, ele continuou a gerar sequências de números figurados de dimensões superiores, como os números tetraédricos, resultando numa sequência mais complexa. Essa abordagem de Stifel contribuiu para o entendimento e a aplicação dos números figurados na Matemática.

Figura 3 – Triângulo figurado de Steifel[3]

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	156	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870

Fonte: Edwards (2002, p. 25).

2 De acordo com Dias (2014), $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ é a identidade euclidiana.

3 A nossa tradução dessa figura no livro de Edwards (2002, p. 25) diz o seguinte: "A versão de Stifel do Triângulo Figurado (1545).

Dias (2014) observa que na Figura 3 a configuração "[...] forma uma espécie de escada, na qual cada degrau inicia dois números abaixo do anterior, observamos ainda que o número que inicia cada coluna é igual ao que está imediatamente a sua esquerda" (Dias, 2014, p. 53).

Triângulo Combinatório

Sobre o Triângulo Aritmético voltado às ideias combinatórias, Edwards (2002), apresenta o seguinte questionamento: "De quantas maneiras duas coisas podem ser escolhidas de *n* diferentes coisas?". Dias (2014) relata que existem três regras combinatórias nessa circunstância para responder essa pergunta.

Segundo Edwards (2002), Porfírio (233–309 E. C.), no seu trabalho intitulado *Isagoge: introdução às Categorias de Aristóteles*, busca entender quantas comparações poderiam ser feitas entre as cinco *vozes*[4] propostas por Aristóteles, já que pretendia discutir todas as similaridades e distinções entre elas. Ele observou de forma acertada que as primeiras associações podem ser enganosas e destacou que não são simplesmente 20 as diferenças, resultantes do fato de que cada uma das cinco vozes pode ser emparelhada com as quatro restantes. Porfírio chegou a um argumento geral ao afirmar que o número de pares não ordenados que podem ser formados por *n* objetos é dado pelo $(n - 1)$-ésimo número triangular. É necessário o seguinte pensamento:

4 De acordo com Xavier (2008, p. 61), Porfirio propõe o estudo dos seguintes conceitos: gênero (*génos*), espécie (*eîdos*), diferença (*diaphorá*), próprio (*ídion*) e acidente (*symbebekós*). Esses conceitos são fundamentais para descreves diferente modos de classificação na lógica e na metafísica.