

QUADRADOS MÁGICOS:
conectando história, cultura e atividades
nas aulas de matemática



Conselho Editorial da LF Editorial

Amílcar Pinto Martins - Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell - Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva - Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes - UNED, Madri

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford - Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Universidade Estadual Paulista - UNESP/
Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida - Universidade Federal do Rio
Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa - Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras - Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia - Universidade de Lisboa

Teresa Vergani - Universidade Aberta de Portugal

GUSTAVO BARBOSA

QUADRADOS MÁGICOS:
conectando história, cultura e atividades
nas aulas de matemática



Marcos Lübeck
Rafael Montoito
(Organizadores)



2025

Copyright © 2025 os autores
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Projeto gráfico e diagramação: Fabrício Ribeiro

Apoio Financeiro: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Barbosa, Gustavo

Quadrados mágicos: conectando história, cultura eatividades nas aulas de matemática / Gustavo Barbosa ; Marcos Lübeck, Rafael Montoito (organizadores). – São Paulo: LF Editorial, 2025. – (Série 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática; v. 8)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-564-5

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Matemática - História I. Lübeck, Marcos. II. Montoito, Rafael. III. Título. IV. Série.

25-260208

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



LF Editorial

www.livrariadafisica.com.br

www.lfeditorial.com.br

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

APRESENTAÇÃO

Venho de antes da primeira estância

Antes, até, do que as navegações...

Antes das horas... De qualquer distância...

Antes da lava levantar vulcões!

Trago milênios nos peçuelos cheios...

Eras maduras a me reciclar...

Vem tanta história nesse meu arreio

Que não se cansa de desencilhar!

Os versos selecionados são parte da canção *O tempo e o vento*, a qual foi composta por Rodrigo Bauer e venceu a 21ª Seara da Canção Gaúcha, em 2022. Sua escolha para compor a apresentação desta Série Comemorativa aos 30 Anos do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) é bastante significativa, por vários motivos, a começar porque somos, os presidentes da Comissão Científica e Comissão Local, e organizadores dela, gaúchos de nascimento e, portanto, identificados com este chão e sua cultura.

Esta letra canta o tempo, entidade extra-humana que sempre houve, e que passa, incontrolável e irrefreável, embora muitas vezes tentemos dominá-lo. E o tempo passou... lá se foram 30 anos da realização do I SNHM, ocorrido em 1995, na Universidade Federal Rural de Pernambuco, em Recife. Neste 2025, em Pelotas, no Rio Grande do Sul (RS), o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSul) se orgulha em fazer parte da história deste evento, sediando-o, e ocupando um espaço no tempo, que seguirá

avançando para futuras edições, em outras paragens. É assim mesmo! O tempo é composto de peças conectadas e o IFSul se vincula ao que veio antes, e ao que virá depois.

Nas marcas deixadas pelo tempo recente, ficaram desabores da tragédia climática que acometeu o RS em 2024. Erguer-se dos escombros e promover um evento que recebe profissionais, pesquisadores e estudantes de todo o país, e de fora, foi um passo indelével para escrevermos novos capítulos da história – uma história mais otimista e solidária. Eis que a presença e união dos participantes no XVI SNHM abrillanta o nosso estado e traz, para o extremo-sul do Brasil, as discussões mais atuais sobre a História da Matemática.

Dirigindo-nos àqueles versos iniciais, torna-se impossível não lembrar do saudoso professor Ubiratan D'Ambrosio que, em diversas oportunidades, escreveu e afirmou que o ser humano busca não apenas a sobrevivência, mas a sua transcendência. Este é um dos motivos pelo qual todas culturas humanas produzem Matemática e deixam seus vestígios espalhados pelo tempo: a Matemática – que vem de “antes, até, do que as navegações..., antes das horas..., de qualquer distância”, cujos documentos e diversas fontes enchem os “peçuelos” dos pesquisadores à espera de serem esquadrinhados – é um objeto de estudo de diferentes “eras” e pesquisas que, feitas ao longo dos anos e em admirável quantidade, vão desnudando e acrescentando tantas novas camadas de “história nesse meu arreio”.

Nos 30 anos decorridos pelo SNHM, incontáveis foram os professores e os alunos que participaram dos momentos de estudo e partilha de saberes: graduandos se afeiçoaram à História da Matemática, muitos mestrandos e doutorandos

constituíram-se relevantes pesquisadores, e historiadores, hoje renomados, seguem firmes partilhando experiências. Não é, portanto, difícil de perceber que a comunidade de investigadores em História da Matemática tem crescido em número e temáticas de estudo, investindo em novos tópicos sem, necessariamente, renunciar aos assuntos que são clássicos nesse meio.

Desde 2001, no IV SNHM, realizado na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em Natal, a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) publica, em cada edição, uma série de livros sobre os minicursos ministrados no evento, que juntas compõem a chamada “Coleção História da Matemática para Professores”, contendo agora mais de 135 livros. Seus principais objetivos são divulgar o conhecimento científico sobre a História da Matemática e incentivar os professores a levarem, para os seus alunos, esse conhecimento. Os minicursos são direcionados ao desenvolvimento de atividades e ações didático-pedagógicas que façam uso da História da Matemática voltadas para o ensino de conteúdos em diferentes níveis, atendendo ao objetivo original e basilar da sua existência nos SNHM, que é oferecer aos professores do ensino fundamental, médio e superior temas da História da Matemática que possam subsidiar e serem trabalhados em suas práticas.

O XVI SNHM, ao seu tempo e maneira, dá continuidade nisto, onde professores e pesquisadores do Brasil e de fora se encontram, para apresentar pesquisas, compartilhar e construir conhecimentos sobre a História da Matemática. Às séries de livros anteriores, esta, que é comemorativa aos 30 anos do SNHM, se une, na expectativa – e esperança – de tempos

sempre melhores para a educação brasileira: uma educação que seja crítica, de qualidade e formativa no viés da cidadania e do desenvolvimento sociocultural.

Marcos Lübeck

Rafael Montoito

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
O que são quadrados mágicos (e alguns exemplos).....	11
A importância histórica e cultural dos quadrados mágicos	16
UMA HISTÓRIA DOS QUADRADOS MÁGICOS	23
Nos mistérios das lendas chinesas.....	23
Sob o véu da numerologia indiana.....	29
O arranjo harmonioso dos números na civilização islâmica....	39
A transição para o Ocidente	45
Conclusões preliminares	64
A CONSTRUÇÃO DOS QUADRADOS MÁGICOS DE ORDEM 3	67
Os quadrados de ordem ímpar.....	67
Atividade I: Construção de um quadrado mágico com valor inicial 1	67
Atividade II: Construção de um quadrado mágico com valor inicial qualquer	73
Atividade III: Construção de um quadrado mágico com valores <i>pares</i>	75
Atividade IV: Construção de um quadrado mágico com valor inicial <i>par</i> qualquer	77
Atividade V: Construção de um quadrado mágico com valores <i>ímpares</i>	78

Atividade VI: Construção de um quadrado com múltiplos <i>pares</i> e <i>ímpares</i>	80
Atividade VII: Rotacionando o quadrado em torno do centro	82
Atividade VIII: Rotação axial	84
CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
REFERÊNCIAS	89
O AUTOR.....	93

INTRODUÇÃO

O que são quadrados mágicos (e alguns exemplos)

Os quadrados mágicos fazem parte dos conteúdos matemáticos que possuem um forte apelo lúdico. Isto é, apresentados em sala de aula como um jogo, uma brincadeira ou um problema, os quadrados mágicos proporcionam aos alunos oportunidades para desenvolverem estratégias de pensamento matemático de forma divertida. Entre as habilidades envolvidas estão: o desenvolvimento de estratégias de cálculo, e a interação entre transformações geométricas e a elaboração de algoritmos.

Um quadrado mágico de ordem n é um arranjo de n^2 inteiros distintos, dispostos de maneira tal que a soma dos valores em uma mesma linha (horizontal), coluna (vertical) ou nas diagonais principais (de um vértice a outro) resulte no mesmo valor – chamado *constante mágica* do quadrado.

Figura 1 – Quadrado mágico de ordem 3

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Swetz (2008, p. 2)

No quadrado acima, verifica-se que a soma dos valores em cada uma das linhas é 15, o mesmo ocorre em cada coluna e nas diagonais principais.

Existem quadrados mágicos de ordem *par* e *ímpar*, cada qual com seu método específico de construção e propriedades. Nossa foco será nas possibilidades de atividades com os quadrados mágicos de ordem *ímpar*. Os exemplos do Capítulo 2 terão como base os quadrados de ordem 3, ficando a cargo dos professores estenderem suas atividades para as ordens que desejarem.

Figura 2 – Quadrado mágico de ordem 4

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Fonte: Sesiano (2019, p. 45)

“O quadrado mágico se diz *normal* se os n^2 números que o formam são os n^2 primeiros números inteiros positivos” (Eves, 2011, p. 269). Assim, os exemplos acima apresentados são de quadrados mágicos normais, e, nesse caso, sua constante mágica é determinada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2}$$

Vale mencionar que o menor quadrado mágico de ordem ímpar é o de ordem 3, e para um quadrado de ordem par, o menor quadrado resultante será de ordem 4. Contudo, essas não são as únicas possibilidades de se preencher um quadrado mágico, como será visto no decorrer desse trabalho. Além disso, é possível iniciar o preenchimento de um quadrado mágico normal por qualquer uma de suas células, de modo que o algoritmo de construção também pode ser modificado. As possibilidades de construções distintas é um fator que estimula a criatividade dos estudantes.

Quadrados mágicos com bordas sucessivas são aqueles em que “a remoção sucessiva de suas bordas deixa, a cada vez, um novo quadrado mágico” (Sesiano, 2017, p. 3, tradução nossa)¹, como mostrado na figura abaixo.

¹ A fim de evitar repetições dessa expressão, considere que todas as traduções aqui apresentadas são de responsabilidade do autor.

Figura 3 – Quadrado mágico com bordas sucessivas

92	17	4	95	8	91	12	87	16	83
99	76	31	22	77	26	73	30	69	2
1	20	64	41	36	63	40	59	81	100
3	19	67	58	47	51	46	34	82	98
96	80	33	52	45	57	48	68	21	5
7	78	35	49	56	44	53	66	23	94
90	27	62	43	54	50	55	39	74	11
13	72	42	60	65	38	61	37	29	88
86	32	70	79	24	75	28	71	25	15
18	84	97	6	93	10	89	14	85	9

Fonte: Sesiano (2017, p. 4)

Há também os chamados *quadrados pandiagonais*, nos quais a soma dos valores das diagonais não contínuas também totaliza a *constante mágica*. As diagonais não contínuas são “um par de linhas diagonais, em ambos os lados e paralelas a uma diagonal principal, que juntas compreendem n células” (Sesiano, 2017, p. 4, grifo do autor).

Figura 4 – Quadrado *pandiagonal*

11	22	47	50	9	24	45	52
38	59	2	31	40	57	4	29
18	15	54	43	20	13	56	41
63	34	27	6	61	36	25	8
3	30	39	58	1	32	37	60
46	51	10	23	48	49	12	21
26	7	62	35	28	5	64	33
55	42	19	14	53	44	17	16

Fonte: Sesiano (2017, p. 5)

Desse modo, no quadrado acima temos as somas das diagonais não contínuas: a primeira delas com 7 células ($22 + 2 + 43 + 61 + 32 + 12 + 33$), e a segunda com 1 célula (55), totalizando 260 como resultado da soma de 8 células (ordem do quadrado). Do mesmo modo, por exemplo, podemos somar os valores de quaisquer duas diagonais com 4 células cada, uma vez que a soma de cada uma resulta 130:

diagonal $50 + 2 + 15 + 63$;
 diagonal $60 + 12 + 5 + 53$;
 diagonal $3 + 51 + 62 + 14$;
 diagonal $9 + 57 + 56 + 8$.

E há os quadrados *compostos*, em que o quadrado principal é composto por subquadrados que, por sua vez, também são mágicos.

Esperamos ter convencido o leitor de que os quadrados mágicos oferecem amplas possibilidades de estudo, muito embora por questões de tempo e de espaço não nos seja possível abordar todas. Para isso, deixamos nas referências bibliográficas os autores e obras que viabilizam os caminhos para quem desejar conhecer mais sobre o assunto.

A importância histórica e cultural dos quadrados mágicos

Os quadrados mágicos possuem uma longa história na tradição matemática, de modo que suas origens se perdem na sombra das lendas. As narrativas historiográficas atribuem os seus primórdios ao oriente, mais precisamente na China, por volta de 2200 a.E.C.² Sua aparição remete ao misticismo que reveste padrões numéricos e geométricos, tais como a mitologia, a cosmologia e a religião, semelhante ao que ocorre em praticamente todas as culturas antigas. “Após longos séculos de brilhante civilização, os sábios chineses não deixaram de atribuir aos emblemas numéricos a função de representar o Universo” (Granet, 1997, n.p.).

Segundo o historiador da matemática Howard Eves, “nenhuma abordagem da matemática chinesa antiga, por mais breve que seja, pode deixar de mencionar o quadrado mágico chamado *lo-shu*” (Eves, 2011, p. 268, grifo do autor). O

² a.E.C. = antes da Era Comum.

significado do termo é “escrita do Rio Luo” (Swetz, 2008, p. 2). Ao longo de nossa pesquisa, nos deparamos com duas grafias para o nome que os quadrados mágicos são encontrados na literatura chinesa, resultado de diferentes transliterações por parte dos autores. Eves (2011) escreve *lo-shu*, já Swetz (2008) e Martzloff (2006) registram *luoshu*. Escolhemos a segunda, por ser oriunda de estudos especializados.

Em vez mudarmos a chave de leitura ao cruzarmos a fronteira da China com a Índia e, depois, a fronteira desta com o Oriente Médio, uma alternativa seria a de dedicar “atenção aos processos de encontro, contato, interação, troca e hibridização cultural” (Burke, 2003, p. 16). Não apenas mercadorias se cruzam nas rotas comerciais, não somente moedas são cambiais, mas também histórias, hábitos, costumes, línguas, músicas, que se transmitem e se metamorfoseiam em um enquadramento mais geral de “tradução cultural” (Burke, 2003, p. 55), que se define muito mais como um processo do que como um estado. Com os quadrados mágicos não foi diferente, o contexto sobrenatural e supersticioso também se faz presente em sua presença na Índia, como possível resultado de apropriações e acomodações culturais. “Segundo a lenda, o conhecimento dos quadrados mágicos foi transmitido do Senhor Shiva a um mago chamado Manibhadra” (Swetz, 2008, p. 83). Porém, as mudanças não se restringiram aos contextos sobrenaturais que faziam dos quadrados mágicos um amuleto a seus patronos.

Como se costuma verificar na história cultural da matemática, diferentes povos utilizam recursos teóricos segundo suas necessidades ou peculiaridades. Na Índia, os quadrados mágicos adquiriram novas formas de construção, e se

aproximaram de um jogo chamado *chaturanga* – que significa “exército formado de quatro membros” (Lasker, 1999, p. 31), que são: elefantes, cavalos, carros e soldados a pé, comandados por um rei e seu vizir. Transmitidos aos povos árabes, o jogo chegou à Europa com outro nome, assimilado à organização bélica medieval a tradução dos quatro membros passou a ser: torres, cavalos, bispos e peões, comandados por um rei e sua rainha, respectivamente. O jogo de xadrez é jogado sobre um tabuleiro quadrado composto por oito fileiras e oito colunas, alternando entre células de cores diferentes, em geral uma clara e a outra escura, ou seja, um quadrado de ordem 8 que acrescenta cores.

No século VII, o jogo de xadrez chegou à Pérsia vindo da Índia, onde havia sido inventado algum tempo antes. Parece ter sido rapidamente associado à construção de quadrados mágicos: os primeiros tratados árabes frequentemente descrevem a colocação sucessiva de números em quadrados de pequenas ordens por meio de movimentos de xadrez (Sesiano, 2017, p. 6).

Transportados nas rotas para o ocidente, os quadrados mágicos se disseminaram nos países islâmicos e encontraram outras formas de se fazer cálculos. Desses contatos, adaptações, hibridização, devem ter ocasionado melhorias e refinamentos nos métodos já existentes, ao longo dos séculos. Contribuiu para a sua expansão o uso popular como um talismã, um artefato cuja finalidade ultrapassa as propriedades matemáticas em benefício da utilidade prática.

Dois textos do século X (Sesiano, 2017) mostram o estudo dos quadrados mágicos (*wafq al-a'dād* ou “disposição harmoniosa dos números”, como eram então chamados) na cultura árabe. A própria concepção de *álgebra* foi concebida como uma ciência de manipulações dos números como substância oculta ou mágica. “No estágio mitológico, a álgebra se apresenta como uma coleção de símbolos ligados à tradição e aos mitos e o número se reduz ao *número empírico*” (Lintz, 2007, p. 348, grifos do autor). Pertencentes à teoria dos números, os quadrados mágicos ocupavam, na pesquisa matemática islâmica, uma posição semelhante à dos números ‘perfeitos’ ou ‘amigáveis’ para os pitagóricos na Antiguidade Tardia. Ou seja, fontes atestam uma investigação matemático-científica dos quadrados mágicos, à parte de seu uso prático.

Não se sabe exatamente quando os quadrados mágicos chegaram à Europa. Sabe-se que os missionários Jesuítas que estiveram na China no século XVII conheciam os quadrados mágicos (Swetz, 2008, p. 3). Contudo, um dos registros mais conhecidos de que se tem conhecimento no continente não é um tratado matemático, nem uma obra de literatura esotérica ou relato de viagem, mas sim uma peça de arte. A gravura em cobre feita por Albrecht Dürer (1471-1528) no ano de 1514, intitulada *Melancolia*³, traz um quadrado mágico de ordem 4, entrelaçado a sólidos geométricos e elementos de arquitetura e perspectiva.

³ O leitor pode saber mais sobre essa obra em: https://www-nga-gov.translate.goog/collection/highlights/durer-melencolia.html?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt&_x_tr_pto=tc. Acesso em: 16 dez. 2024.

Os séculos XV e XVI foram marcados por um “florescimento” nas artes. Foi “um período de inovação [...], uma época de novos gêneros, novos estilos, novas técnicas” (Burke, 2010, p. 25). Uma troca entre duas culturas, uma intelectual, a das universidades, e outra manual, a das oficinas artísticas, enriqueceu ambas em um cruzamento entre disciplinas. Em meio ao entrelaçamento entre teoria e prática, por um lado, os artistas se beneficiaram da geometria e óptica para desenvolver a *perspectiva linear*, tornando-se “praticantes de matemática” (Saito, 2015, p. 172); e, por outro lado, os acadêmicos aprendiam ao observar os artesões trabalhando, acompanhando seus procedimentos em esboços, pinturas, esculturas e arquitetura.

Inseridos nesse contexto, os quadrados mágicos foram assimilados pela classe artística e ganharam uma nova plataforma de representação. Interpretada por estudiosos da arte e ciências do Renascimento, *Melancolia* representa “o triunfo de seus interesses matemáticos” (D’Amore, 2015, p. 250) marcado pelo encontro entre alquimia, astrologia e filosofia, com os estudos geométricos feitos por Dürer na Universidade de Bolonha.

No século XVII os quadrados mágicos tiveram destaque na França, onde Bernard Frenicle de Bessy (1604-1674) se dedicou a fundo no assunto, seu trabalho resultou em duas obras: *Des quarrez magiques* e *Table générale des quarrez magiques de quatre de côté*, publicadas somente em 1693, quase 20 anos após a sua morte. Frenicle listou 880 quadrados mágicos de ordem 4, sendo esta a totalidade de quadrados mágicos dessa ordem, embora ele não tenha fornecido uma demonstração para tal. É de interesse dos pesquisadores da história