

# Relatividade Especial e Geral



## **Conselho Editorial da LF Editorial**

Amílcar Pinto Martins - Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell - Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva - Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes - UNED, Madri

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford - Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Universidade Estadual Paulista - UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa - Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras - Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia - Universidade de Lisboa

Teresa Vergani - Universidade Aberta de Portugal

Paulo Daniel Emmel

## Relatividade Especial e Geral



2025

Copyright © 2025 Paulo Daniel Emmel  
1ª Edição

**Direção editorial:** Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

**Capa:** Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

---

Emmel, Paulo Daniel  
Relatividade especial e geral / Paulo Daniel Emmel. – São Paulo: LF Editorial, 2025.

Bibliografia.  
ISBN 978-65-5563-599-7

1. Física 2. Relatividade (Física) - Estudo e ensino 3. Relatividade geral (Física) I. Título.

25-277471

CDD-530.11

---

Índices para catálogo sistemático:  
1. Relatividade: Teoria: Física 530.11

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida  
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.  
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107  
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



EDITORIAL

LF Editorial

[www.livrariadafisica.com.br](http://www.livrariadafisica.com.br)

[www.lfeditorial.com.br](http://www.lfeditorial.com.br)

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

Meus agradecimentos a grandes professores que tive ao longo de minha vida de  
estudante e que foram responsáveis pelo meu crescimento intelectual:  
Wânia Daros, Nilze de Almeida, Mikiya Muramatsu e Henrique Fleming.  
Agradeço também o inestimável apoio que tive de minha companheira  
Maria Luísa Guillaumon Emmel.



# Índice

Dedicatória	ix
Citação	xi
Prefácio	xiii
<b>Parte 1. Relatividade Especial</b>	<b>1</b>
Capítulo 1. A não validade da Relatividade de Galileu	3
1. Eletromagnetismo e Transformações de Galileu	3
2. A experiência de Michelson-Morley	4
3. Contração de Lorentz-Fitzgerald	7
4. Arrastamento do éter	8
5. Teorias de emissão da luz	9
6. Princípios da Relatividade Especial	10
Capítulo 2. As transformações de Lorentz	11
1. A transformação proposta por Lorentz	11
2. As transformações de Lorentz	11
3. Sistema de unidades relativístico (SR)	16
Capítulo 3. Propriedades das Transformações de Lorentz	17
1. A simultaneidade é relativa	17
2. Simultaneidade	19
3. Contração de distâncias	20
4. Dilatação do tempo	21
5. O trem de Einstein	22
6. Dessincronização de relógios de um referencial	23
7. O observador na Relatividade Especial	24
8. Diferença entre medir e ver	26
9. Visualização de um cubo em movimento	26
10. A não existência de corpos rígidos na Relatividade	27
Capítulo 4. Representação Geométrica das Transformações de Lorentz	31
1. Transformações de Lorentz no Sistema de Unidades Relativístico	31
2. Simultaneidade	34
3. Contração de FitzGerald-Lorentz	35
4. Dilatação do tempo	36

5. Dessincronização de relógios	37
6. Cone do tempo	38
Capítulo 5. A adição relativística de velocidades	43
1. A adição de velocidades segundo Galileu	43
2. A transformação de velocidades segundo Einstein	43
3. Deslocamento de uma partícula em dois referenciais, método gráfico	45
4. Método gráfico de composição de velocidades	46
5. Cálculo da transformação de velocidades	49
Capítulo 6. O fator $k$	51
1. O método de Bondi	51
2. O fator $k$	51
3. Determinação de $k(v)$	52
4. Efeito Doppler	53
5. Composição de velocidades	54
6. Simultaneidade	54
7. O paradoxo do relógio.	55
8. As transformações de Lorentz a partir do fator $k$ .	56
9. Transformações de Lorentz e rotações	59
10. Transformações de Lorentz através de uma "rotação".	62
11. Composição de velocidades através de "rotações" sucessivas.	64
Capítulo 7. A trigonometria hiperbólica e as Transformações de Lorentz	65
1. A trigonometria circular	65
2. A trigonometria hiperbólica	67
3. As transformações de Lorentz e a trigonometria hiperbólica.	73
Capítulo 8. O paradoxo dos gêmeos	79
1. Paradoxo	79
2. Paradoxo dos gêmeos	79
3. Aproximação com aceleração instantânea	80
Capítulo 9. Horizonte de eventos	83
1. Horizonte de eventos	83
2. Movimento com aceleração uniforme	83
Capítulo 10. Dinâmica Relativística	87
1. Da cinemática à dinâmica relativística	87
2. Momentum linear $\mathbf{p}$	87
3. Trabalho, energia cinética e energia total	90
4. Relações diversas entre as energias cinética, total e de repouso (massa) e momentum.	91
5. Relação entre força e aceleração	91
6. Equivalência entre massa e energia total	92
7. Momentum angular	93
Capítulo 11. Lagrangeana Relativística	95
1. Formulação variacional da mecânica newtoniana	95
2. Mecânica relativística a partir de um princípio variacional.	97

3. Exemplo de potencial generalizado. Uma carga em um campo eletromagnético.	99
4. Formulação covariante da mecânica relativística	99
Capítulo 12. Eletrodinâmica Covariante	103
1. As equações de Maxwell	103
2. Formulação covariante do eletromagnetismo no vácuo.	105
3. Transformações de Lorentz para o campo eletromagnético	107
4. Campo eletromagnético de uma carga em movimento	109
Capítulo 13. Tensor energia-momentum	115
1. Densidade de carga e de corrente	115
2. Tensor de Energia-Momentum	116
3. Exemplos de tensores de energia-momentum.	120
<b>Parte 2. Tensores</b>	<b>123</b>
Capítulo 14. Variedades	125
1. Uma homenagem de Niemyer a Einstein	125
2. Variedades	126
3. Curvas e superfícies.	129
4. Transformação de coordenadas	130
5. Tensores contravariantes	132
6. Tensores Covariantes	133
7. Tensores mistos	133
8. Operações elementares com tensores	134
9. Espaço tangente	136
Capítulo 15. Métrica	139
1. Sistemas de coordenadas	139
2. Eixos ortogonais	139
3. Eixos não ortogonais	139
4. Bases covariante e contravariante	141
5. Bases de vetores dos espaços direto e recíproco	143
6. Métrica e base de vetores	144
7. Generalização para uma variedade qualquer de dimensão $n$	144
8. Produto escalar	145
9. Elemento de linha	145
Capítulo 16. Conexões	147
1. Conexões	147
2. Derivada Covariante	149
Capítulo 17. Conexões, segunda parte	151
1. $g_{ab}$ é um tensor	151
2. $\Gamma_{bc}^a$ não é um tensor	151
3. Coordenadas geodésicas	153
4. $\nabla_b X^a$ é um tensor	155
5. Propriedades da derivada covariante	155

Capítulo 18. Determinante da métrica	157
1. Determinantes, menores, cofatores e matriz inversa	157
2. Derivada do determinante da matriz como função das coordenadas.	158
3. Assinatura da métrica	158
4. Determinante da métrica	160
5. Divergente em coordenadas curvêneas	160
6. Laplaciano em coordenadas curvêneas	162
Capítulo 19. Densidades tensoriais	163
1. Densidades tensoriais	163
2. Pseudovetores	163
3. Propriedades do símbolo de Levi Civita em um espaço cartesiano de base ortonormal em 3D	165
4. Generalização para $n$ dimensões	167
5. Pseudotensores	168
6. Derivada covariante de um pseudotensor	171
7. Produto Misto	172
8. Por que o pseudotensor é também chamado de densidade tensorial?	172
Capítulo 20. Transporte paralelo	175
1. Transporte paralelo	175
2. Deslocamento paralelo infinitesimal de um vetor	176
3. Deslocamento paralelo infinitesimal de um tensor qualquer	177
4. Deslocamento paralelo infinitesimal da métrica	178
5. Deslocamento paralelo de um escalar	178
6. Transporte paralelo ao longo de uma curva	178
Capítulo 21. Geodésicas	181
1. Geodésicas	181
2. Transporte paralelo do vetor tangente	182
3. Curvas de distância extrema entre dois pontos	183
4. Aplicação: Cálculo de conexões.	185
Capítulo 22. O tensor de Riemann	187
1. O Tensor de Riemann	187
2. Identidades de Bianchi	192
3. Tensor de Ricci e curvatura escalar	193
4. Identidade de Bianchi contraída	193
5. Variedade plana (flat)	194
6. Aplicação: Curvaturas de superfícies bidimensionais	196
7. Superfície esférica	196
8. Curvatura de uma superfície em um ponto de sela	198
Capítulo 23. Desvio geodésico	201
1. Distância entre geodésicas	201
2. Derivadas absolutas primeira e segunda em coordenadas geodésicas	201
3. Desvio Geodésico	202
4. Distância máxima entre duas geodésicas tipo longitude em $S^2$	204
<b>Parte 3. Relatividade Geral</b>	<b>207</b>

Capítulo 24. Princípios da Relatividade Geral	209
1. Os princípios da Relatividade Geral	209
2. Princípio de Mach	209
3. Princípio da Equivalência	211
4. Princípio da covariância geral	213
5. Princípio do acoplamento gravitacional mínimo	214
6. Princípio da correspondência	214
Capítulo 25. A equação de Einstein	215
1. O princípio da equivalência e os referenciais inerciais locais	215
2. Comprimentos e intervalos de tempo em um sistema de referência em rotação	215
3. O deslocamento gravitacional para o vermelho	216
4. Movimento de uma partícula em queda livre em um campo gravitacional	219
5. Condição suficiente	219
6. Condição necessária	222
Capítulo 26. A solução de Schwarzschild	227
1. Karl Schwarzschild	227
2. A métrica de Schwarzschild	227
Capítulo 27. Primeiros testes experimentais da Relatividade Geral	233
1. Validade da Relatividade Geral	233
2. Precessão da órbita de Mercúrio	233
3. Deflexão gravitacional da luz	240
4. Propagação da luz na ausência de gravidade	241
5. Propagação da luz com gravidade: Tratamento perturbativo	242
Capítulo 28. Buracos Negros	245
1. A imagem de um buraco negro e o Prêmio Nobel de 2020	245
2. Singularidades na métrica de Schwarzschild	246
3. Geodésicas nulas na métrica de Schwarzschild	247
4. Queda radial de uma partícula	250
5. Diagrama de Kruskal	254
6. Interpretação de $r$ como coordenada tipo tempo	259
7. Seriam a Terra ou o Sol buracos negros?	259
Capítulo 29. A equação linearizada de Einstein	261
1. Campos gravitacionais fracos	261
2. A métrica para campos gravitacionais fracos	261
3. Transformação de Calibre	261
4. Tensor de traço revertido $\bar{h}_{ab}$	263
5. Tensor de Ricci	263
6. O tensor de Einstein e a equação linearizada	264
Capítulo 30. Ondas Gravitacionais	267
1. Ondas gravitacionais na aproximação de campos fracos	267
2. Número de componentes independentes de $A_{ij}$ .	269
3. Calibre transversal de traço nulo	269

4. Efeito da onda gravitacional sobre as partículas	270
5. Montagem experimental e o Nobel de Física de 2017	274
Bibliografia	277
Índice remissivo	279

## Dedicatória

*A  
Malu, Van, Mau e Mar,  
minha companheira e meus filhos.*



## Citação

*"A maioria das ideias fundamentais da ciência são essencialmente sensíveis e, regra geral, podem ser expressas em linguagem compreensível a todos."*

*Albert Einstein*



## Prefácio

Escrever sobre um tema tão importante e complexo envolve escolhas e toda escolha apresenta uma renúncia.

Este livro foi baseado em uma disciplina, Relatividade, por mim ministrada para alunos do terceiro e quarto anos dos cursos de Física e Engenharia Física, da Universidade Federal de São Carlos desde 2006, ano após outro sem praticamente interrupção. É para alunos que já tenham bons conhecimentos de Física e Matemática e que provavelmente já tenham tido alguma experiência com a Relatividade Especial.

O livro é dividido em três partes: Relatividade Especial, Tensores e Relatividade Geral. Como os alunos de Física não aprendem, geralmente, os conceitos de espaços curvos que são imprescindíveis para o estudo da Relatividade Geral, apresento de forma sucinta e sem grande rigor matemático conceitos destes espaços, bem como o tratamento tensorial para que eles consigam entender, como uma primeira visão, a teoria da Relatividade Geral. Sugiro aos professores e alunos interessados que resolvam os exercícios propostos ao longo do livro.

A disciplina de Relatividade é semestral e sua carga didática é de três aulas semanais. Dessa forma sempre apresentei a Relatividade Especial juntamente com Tensores nos dois primeiros meses de curso, uma aula de cada tópico e outra de exercícios onde é possível a discussão dos conceitos, sempre muito proveitosa. Nos dois últimos meses entramos na parte de Relatividade Geral mantendo o ritmo dos exercícios semanais.

A parte de Relatividade Especial apresenta várias formas de se chegar às Transformações de Lorentz, desde a apresentada por Einstein em um livro de divulgação científica, ao método de Bondi, do fator  $k$ , bem como a obtida com o uso da trigonometria hiperbólica. Dessa forma há muitas possibilidades de escolhas dos mestres em conduzir o curso. Optei também por usar as ilustrações para melhor apresentar os resultados, em particular a representação geométrica das Transformações de Lorentz. O estudo avança até a Lagrangeana Relativística e Eletrodinâmica Covariante passando pela Dinâmica Relativística e discutindo assuntos como o Paradoxo dos Gêmeos e Horizonte de Eventos do ponto de vista da Relatividade Especial. Por último foi introduzido o tópico de Tensor Energia-Momentum como um novo capítulo, uma vez que ele é importantíssimo para a obtenção da equação de Einstein

A segunda parte, Tensores, apresenta as Variedades com os Tensores na forma covariante e contravariante, suas transformações de coordenadas e operações elementares entre eles. Segue uma parte importantíssima que é a Métrica, onde é apresentado o Elemento de Linha. Segue a definição de Conexões, fundamental para o estudo de espaços curvos, Derivada Covariante, Transporte Paralelo, Geodésicas, o Tensor de Riemann e o Desvio Geodésico. Faz parte também, para completeza do assunto, o capítulo sobre Densidades Tensoriais ou Pseudotensores, uma vez que são entidades matemáticas tão importantes como os tensores. Nele vemos propriedades do determinante da métrica, um pseudoescalar e o pseudotensor de Levi Civita.

Por fim na parte de Relatividade Geral são mostrados os Princípios seguidos por Einstein na confecção da teoria. É apresentada a Equação de Einstein embora só sejam apresentados resultados em regiões do espaçotempo livre de matéria. Esta equação é resolvida para casos de simples resolução como a solução de Schwarzschild, a precessão da órbita de Mercúrio e a deflexão da luz ao passar nas proximidades do Sol, primeiras provas da teoria da Relatividade Geral. Finalmente é estudado o sistema conhecido como Buraco Negro, é mostrada a Equação Linearizada de Einstein e estudadas as ondas gravitacionais. São ressaltados os Prêmios Nobel relacionados a estes dois assuntos em 2017 pela comprovação de ondas gravitacionais e em 2020 pela observação do Buraco Negro supermassivo no centro da Via Láctea.

Espero que este livro possa ser de grande utilidade a todos que se interessam pelo genial trabalho de Einstein.

São Carlos, 14 de abril de 2025.

Parte 1

# Relatividade Especial

