

Estabilidade linear de osciladores paramétricos
via sistemas Hamiltonianos.



Conselho Editorial da LF Editorial

Amílcar Pinto Martins - Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell - Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva - Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes - UNED, Madri

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford - Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Universidade Estadual Paulista - UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa - Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras - Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia - Universidade de Lisboa

Teresa Vergani - Universidade Aberta de Portugal

Gerson Cruz Araujo
Keity Murielly de Jesus Andrade

**Estabilidade linear de osciladores paramétricos
via sistemas Hamiltonianos.**



2025

Copyright © 2025 os autores
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Projeto gráfico e diagramação: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Araujo, Gerson Cruz
Estabilidade linear de osciladores paramétricos via sistemas Hamiltonianos / Gerson Cruz Araujo,
Keity Murielly de Jesus Andrade. – São Paulo: LF Editorial, 2025.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-603-1

1. Cálculos 2. Matemática 3. Matemática - História. Andrade, Keity Murielly de Jesus. II. Título.

25-278236

CDD-510

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática 510

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



EDITORIAL

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

(11) 3815-8688 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Prefácio

O desenvolvimento do cálculo, ramo da matemática que lida com as mudanças de fenômenos, foi um dos avanços mais significativos da história da matemática. O cálculo pode descrever, por exemplo, o movimento de um veículo ao longo do tempo, por meio das equações diferenciais. Além disso, o cálculo pode determinar onde fenômenos variáveis alcançam o valor máximo ou mínimo e a que taxa passam de um para o outro. Assim como a aritmética e a álgebra são ferramentas para trabalhar com generalizações de números ou de quantidades, o cálculo tem suas próprias regras, notações e aplicações, e seu desenvolvimento em 1665–1666 por Isaac Newton (1642–1727) e por volta de 1673 por Gottfried Leibniz (1646–1716), em trabalhos independentes, impulsionaram rapidamente o progresso em todas as áreas das ciências da natureza e da terra.

Com esta base do cálculo infinitesimal, no século XVII, os irmãos Jacob e Johann Bernoulli, a partir dos trabalhos de Newton e Leibniz, aprimoraram mais a teoria do cálculo, desenvolvendo o que chamamos atualmente de cálculo variacional, uma área que busca resolver problemas de máximos e mínimos. Outros matemáticos como Euler em 1744 e Lagrange em 1788 usaram esse cálculo para chegar a uma equação diferencial — a equação de Euler-Lagrange, que descreve matematicamente a dinâmica de fenômenos da mecânica de sólidos e fluidos.

A equação de Euler-Lagrange tem uma ampla aplicabilidade em fenômenos oscilatórios como nos pêndulos simples, nos sistemas massa-mola, nos pêndulos acoplados por molas, nos pêndulos com comprimento variável, nos pêndulos com ponto de suspensão oscilante, dentre outras variantes. Essas aplicações abrangem tanto oscilações harmônicas (os três primeiros sistemas), onde a força restauradora é proporcional ao deslocamento, quanto oscilações paramétricas (os dois últimos), onde um ou mais parâmetros do sistema variam periodicamente no tempo.

Para entender o comportamento desses fenômenos físicos, é útil recorrer aos formalismos da mecânica lagrangeana e hamiltoniana. O pioneirismo da mecânica lagrangeana, notoriamente atribuído ao matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736–1813), baseia-se na função escalar $L = L(q, \dot{q}, t)$, conhecida como *Lagrangeana* que depende das coordenadas generalizadas q , das velocidades generalizadas $\dot{q}$ e possivelmente do tempo t . A partir dessa função, um sistema pode ser descrito pelas equações de Lagrange, as quais são n equações diferenciais de segunda ordem (onde n é o número de graus de liberdade do sistema), que são invariantes sob transformações de coordenadas.

Já a mecânica hamiltoniana, desenvolvida por volta de 1883 pelo matemático irlandês Willian Rowan Hamilton (1805–1865), utiliza uma função escalar $H = H(q, p, t)$ denominada *Hamiltoniana* que depende das coordenadas generalizadas q , dos momentos conjugados p e possivelmente do tempo t . O formalismo Hamiltoniano descreve um sistema pelas equações de Hamilton, as quais são $2n$ equações diferenciais de primeira ordem e quando combinadas, essas equações nos levam às equações de segunda ordem de Lagrange. Dessa forma, com esses dois formalismos é possível determinarmos equações de movimento para

os sistemas oscilatórios citados anteriormente.

Tais sistemas também podem ser estudados sob a ótica da estabilidade, a qual é uma teoria fundamental para entender como pequenas perturbações pode evoluir ao longo tempo. A análise da estabilidade desses sistemas envolve determinar se as soluções dos sistemas retornam ao seu estado de equilíbrio após uma perturbação. Historicamente, uma motivação inicial a teoria da estabilidade foi dada por Isaac Newton (1642–1727), ao questionar sobre o movimento de três corpos massivos (mesmo corpos aparentemente estáveis como Terra, Lua e Sol).

Diversos cientistas ao longo dos séculos XVII, XVIII e XIX, apresentaram contribuições acerca da teoria da estabilidade, como, Euler, Halley, Laplace, Lagrange, entre outros filósofos da natureza. Entretanto, foi o matemático Henri Poincaré (1854–1912) o precursor mais notável a fazer contribuições significativas sobre os fundamentos de estabilidade de sistemas de equações diferenciais. Em colaboração com o astrônomo americano George Hill (1838–1914), investigou a estabilidade das órbitas planetárias e iniciou a teoria qualitativa das equações diferenciais não lineares.

Em 1887, Poincaré ganhou um prêmio do rei Oscar II da Suécia pela solução parcial das muitas variáveis envolvidas em determinar a órbita estável de três planetas descrevendo conjecturas particulares para o problema dos 3 corpos, a saber, soluções para o problema restrito dos 3 corpos (um deles de massa desprezível), com órbitas tanto no formato circular quanto elíptico. Ele expôs possíveis erros na sua análise, onde, por exemplo, abriu caminho para o estudo da teoria caos, um campo que investiga como sistemas complexos podem exibir movimentos muito imprevisíveis, e enfatizou como estudos locais não descrevem o todo.

Outra figura importante na história da teoria da estabilidade é Aleksandr Lyapunov (1857–1917). O trabalho sobre a estabilidade de soluções de equações diferenciais ordinárias começou com a sua tese de doutorado de 1892, se estendeu por um período de dez anos, e, no final do século XIX, ele apresentou métodos para avaliar a estabilidade de sistemas dinâmicos, conhecidos atualmente como teoria da estabilidade de Lyapunov. Sua abordagem envolve a construção de funções escalares (chamadas funções de Lyapunov) e apresenta critérios para avaliar se um sistema permanecerá estável perto de uma solução ou se tenderá a se desestabilizar.

A partir desta contextualização inicial, busca-se com este estudo, realizar uma análise de um tipo especial de estabilidade, denominada *estabilidade linear*, em dois fenômenos físicos de osciladores paramétricos que propomos neste ensaio, o primeiro é o pêndulo carregado (bulbo com uma carga elétrica) com ponto de suspensão oscilante entre duas linhas horizontais eletrizadas e o segundo problema é o pêndulo carregado com ponto de suspensão oscilante entre duas cargas elétricas fixas de mesmo sinal e equidistantes do ponto de suspensão.

Após exibirmos fragmentos históricos de fatos relevantes da teoria qualitativa de EDOs que almejamos abordar, faremos a seguir, uma descrição sucinta deste livro. Esta obra está dividida em cinco capítulos. Como nota prévia, salientamos que grande parte dos resultados foram demonstrados, com exceção de alguns resultados nos capítulos 1, 2 e 3, mas sugerimos textos complementares.

No Capítulo 1, introduzimos, com base nas referências [10], [19], [30], [31], [16], [32], resultados preliminares de Álgebra Linear, Análise no $\mathbb{R}^n$ e Espaços Métricos, os quais fornecem a base necessária para os tópicos discutidos posteriormente.

No Capítulo 2, com base teórica as referências [7], [16], [17], [18], [20], [21], [24], [25], [29], [50], [52], [53], abordamos os princípios elementares do Cálculo Variacional. Veremos

a definição de um funcional e como pode ser determinada a trajetória que torna um funcional estacionário. Prosseguimos com o estudo da Mecânica Lagrangeana apresentando as definições principais. De seguida, exibimos duas aplicações da Teoria Lagrangeana. Ainda neste capítulo, estudamos a teoria Hamiltoniana, apresentando uma breve exposição da Transformação de Legendre, a qual é utilizada para realizar a transição da mecânica Lagrangeana para a Hamiltoniana. Exibimos também as definições principais, incluímos uma rápida discussão sobre a relação entre a função Hamiltoniana e a Energia de um sistema e, por fim, expomos duas aplicações da teoria Hamiltoniana.

No Capítulo 3, baseando-nos teoricamente em [1], [6], [8], [22], [23], [28], [33], [35], [38], [41], [42], [43], [46], [47], [48], [49], [51], introduzimos os conceitos básicos da teoria qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, designadamente no que se refere à existência e unicidade de soluções. Abordamos ainda uma introdução aos sistemas lineares e estudamos suas soluções fundamentais. Em particular, estudamos os sistemas lineares com coeficientes constantes e coeficientes periódicos, e em especial, obtemos os retratos de fase bidimensional dos sistemas lineares com coeficientes constantes. Prosseguiremos com o estudo do princípio da linearização de sistemas não lineares e estabelecemos um resultado acerca do comportamento de soluções em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico. Posteriormente, enfatizaremos um caso especial de sistemas de EDOs, especificamente, os sistemas de EDOs Hamiltonianos, explanando alguns resultados analíticos imprescindíveis para a amálgama deste livro. Para esta finalidade, descrevemos proposições referente a sistemas hamiltonianos lineares e finalizamos, expondo ao leitor, três aplicações da teoria de sistemas Hamiltonianos.

No Capítulo 4, tomamos como base nas referências [1], [6], [9], [15], [24], [40], [48], abordamos as noções de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade, damos ainda uma introdução à teoria das funções de Lyapunov, que por vezes permite obter a estabilidade de soluções, apresentamos, em particular, os critérios de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade de pontos críticos (método direto de Lyapunov), bem como alguns exemplos ilustrativos. E, por fim, exibimos o teorema de Dirichlet, fundamental para a análise que será feita no capítulo seguinte.

Finalmente, no Capítulo 5, tivemos como base os trabalhos desenvolvidos por [2], [3], [13], [14], [24], [48], [34], [21], [37], [44], [45], e utilizamos as teorias desenvolvidas nos capítulos anteriores para a análise da estabilidade linear dos dois osciladores paramétricos citados anteriormente.

Sei que ninguém vai me tirar
A alegria de viver pode tudo acontecer
Nada me fará afastar da esperança
Por tantas provas já passei
Quantas lágrimas chorei
Por um mundo que não sei compreender
Com meus olhos de criança
Mas hoje eu sei, que só através do amor
O homem pode se encontrar
Com a perfeição dos sábios
Uma ambição maior, mais do que pode supor
O império da razão
Toda vã filosofia
Por isso insisto em cultivar
Os meus sonhos, minha fé
Esteja onde eu estiver, creio em você
Eu estou em segurança
Mas hoje eu sei, que só através do amor
O homem pode se encontrar
Com a perfeição dos sábios
Uma ambição maior, mais do que pode supor
O império da razão
Toda vã filosofia
Autor: Guilherme Arantes

De Keity,
Para minha mãe Claudia, minha avó Marizete e meu irmão Arthur.
“Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas.”- Romanos 11:36a.

De Gerson,
Para todos que me acompanharam nesta jornada,
em especial, para a estrela que órbito,
meu ser de luz, meu filho, João.
“A gratidão é a virtude das almas nobres.”- Esopo.

Capítulo 1

Prólogo

“A matemática é um instrumento de conhecimento mais poderoso que qualquer outro legado a nós pela atividade humana.”— René Descartes.

Este capítulo, tem por objetivo principal apresentar definições e resultados considerados elementares na elaboração deste texto acadêmico. Para isso, começamos listando algumas resultados obtidos nos cursos de Álgebra linear, Análise na Reta e Espaços Métricos. Este tópico foi escrito baseando-se nas referências [10], [19], [30], [31], [16], [32].

1.1 Espaços Métricos

Nesta seção, exibiremos resultados gerais provenientes dos cursos elementares, a saber, Análise real, Análise no $\mathbf{R}^n$ e Espaços Métricos.

Definição 1.1.1 (Métrica). Dado um conjunto $M \neq \emptyset$, uma função real $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ diz-se uma métrica em M (ou distância em M) se:

1. $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

para quaisquer $x, y, z \in M$. Dizemos então que o par (M, d) é um *espaço métrico*.

Exemplo 1.1.1 (Distância em $\mathbb{R}^n$). Podemos definir uma distância em $\mathbb{R}^n$ por

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1)$$

ou por

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \dots, n\}, \quad (1.2)$$

entre outras possibilidades.

Definição 1.1.2. Em um espaço métrico (M, d) , dados $a \in M$ e $r > 0$, definimos os seguintes conjuntos:

- Bola aberta de centro a e raio r por:

$$B(a, r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}.$$

(São todos os pontos de M cuja distância ao centro é estritamente menor que o raio.)

- Bola fechada de centro a e raio r por:

$$B[a, r] = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}.$$

(São todos os pontos de M cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio.)

- Esfera de centro a e raio r por:

$$S[a, r] = \{x \in M : d(x, a) = r\}.$$

(São todos os pontos de M cuja distância ao centro é exatamente igual ao raio.)

Uma classe particular de distâncias é obtida a partir da definição de norma.

Definição 1.1.3. Uma norma em um espaço vetorial real E é uma função real $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $|\cdot|$ denota o módulo de um número real. Dizemos então que o par $(E, \|\cdot\|)$ é um *espaço normado*.

Exemplo 1.1.2. Há inúmeras normas que podem ser definidas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Dentre elas, podemos citar:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3)$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_M = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\}, \quad (1.4)$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_S = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (1.5)$$

as normas euclidiana, do máximo e da soma, respectivamente.

Observação 1. É importante enfatizar que a forma geométrica das bolas e esferas dependem da norma que é utilizada.

Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 1.1.3. Em $\mathbb{R}^2$ considere a norma euclidiana (1.3). A bola aberta $B(0, 2)$ é dada na figura a seguir:

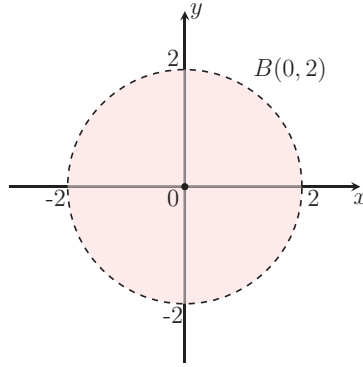


Figura 1.1: Bola aberta na norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$. Fonte: elaborada pela autora.

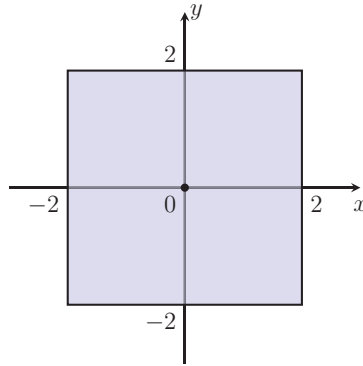


Figura 1.2: Bola fechada na norma do máximo de $\mathbb{R}^2$. Fonte: elaborada pela autora.

Temos, no próximo exemplo, a noção de “bola quadrada”.

Exemplo 1.1.4. Em $\mathbb{R}^2$ considere a norma do máximo (1.4). A bola fechada $B[0, 2]$ é dada na figura abaixo:

Proposição 1.1.1. Se $(M, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, então a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

é uma métrica em M .

Demonstração. Verifiquemos as propriedades 1., 2. e 3. da noção de distância.

1. Note que utilizando a primeira propriedade de norma, temos:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Logo, $x = y$.

2. Temos que

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\|.$$

Pela segunda propriedade de norma, obtemos:

$$d(x, y) = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

3. Por fim, observe que

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\|.$$

Pela terceira propriedade da noção de norma, temos:

$$d(x, y) \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Segue que $d(x, y) = \|x - y\|$ define uma métrica em M . ■

Consideremos agora uma definição e um resultado importante no contexto dos espaços normados.

Definição 1.1.4. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes quando existem $a > 0$ e $b > 0$ tais que

$$\|x\|_1 \leq a\|x\|_2 \quad \text{e} \quad \|x\|_2 \leq b\|x\|_1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

O teorema a seguir estabelece que todas as normas no $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Teorema 1.1.1. Duas normas quaisquer no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Demonstração. O leitor pode consultar a referência [16]. ■

A seguir, apresentamos os conceitos de sequência convergente e sequência de Cauchy em um espaço métrico.

1.1.1 Sequências em um espaço métrico

Definição 1.1.5 (Sequência convergente). Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço métrico (M, d) . Dizemos que (x_n) é uma sequência convergente se existe $x \in M$ tal que:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

O ponto x é chamado de limite da sequência.

Definição 1.1.6 (Sequência de Cauchy). Uma sequência (x_n) em um espaço métrico é dita de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para todo $m, n \geq n_0$ tem-se que

$$d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Dessas duas definições segue o seguinte teorema.

Teorema 1.1.2. Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Considere (x_n) uma sequência que converge para x , ou seja, $x_n \rightarrow x$.

Isso significa que, dado $\epsilon > 0$ qualquer, podemos encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.6)$$

Note que para o $\epsilon > 0$ dado, para todo $m, n \geq n_0$ e pela desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x) + d(x, x_n) \\ &\stackrel{(1.6)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. ■

Observação 2. A recíproca do teorema 1.1.2 não é válida.

Exemplo 1.1.5. Considere a sequência $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, definida da seguinte forma: considere $r_n \in \left(\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}\right)$, o que é possível porque $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2} < r_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}$. Temos $r_n \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Além disso, (r_n) é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0$

$$\begin{cases} m \geq n_0 \implies \frac{1}{n_0} > \frac{1}{m} \implies \sqrt{2} + \frac{1}{n_0} > \sqrt{2} + \frac{1}{m} > r_m, \\ n \geq n_0 \implies \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n} \implies \sqrt{2} + \frac{1}{n_0} > \sqrt{2} + \frac{1}{n} > r_n. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$0 < |r_m - r_n| < \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < \left| \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Logo, (r_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$, porém que não converge para um elemento de $\mathbb{Q}$. ■

A seguir, apresentamos a definição de um espaço métrico completo, seguida de um exemplo ilustrativo.

Definição 1.1.7 (Espaço métrico completo). Um espaço métrico (M, d) é dito completo se toda sequência de Cauchy em M converge.

Exemplo 1.1.6. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido da métrica (1.1) ou da métrica (1.2) é um espaço métrico completo. (Ver [30]).

1.2 Sequências de funções

Para estabelecer a base necessária para a demonstração do Teorema de Existência e Unicidade que consta no Capítulo 3, é essencial entender os conceitos de sequências de funções e suas formas de convergência.

Considere $X \subset \mathbb{R}$ e F como sendo o conjunto de todas as funções reais definidas em X , ou seja, $F = \{f; f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Considerando uma sequência $(f_n) = (f_1, f_2, \dots)$ em F , podemos definir dois tipos de convergência: convergência pontual e convergência uniforme. Vejamos a seguir as definições de cada uma delas.

Definição 1.2.1 (Convergência pontual). Uma sequência de funções $(f_n) \subset F$ converge pontualmente, ou simplesmente, para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dados $\epsilon > 0$, $x \in X$, existe $n_0 = n_0(x, \epsilon)$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definição 1.2.2 (Convergência uniforme). Uma sequência de funções $(f_n) \subset F$ converge uniformemente, para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para todo $x \in X$, tem-se

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Exemplo 1.2.1. Considere a seguinte sequência de funções: $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Note que para todo $x \in (-1, 1)$, $f_n(x) \rightarrow 0$ e $1 = f_n(1) \rightarrow 1$. Além disso, não existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, se $|x| > 1$, ou seja, $x > 1$ ou $x < -1$. Dessa forma, considerando h_n a restrição de f_n ao intervalo $(-1, 1)$, temos que $\{h_n\}_{n \geq 1}$ converge pontualmente para zero.

Exemplo 1.2.2. $f_n(x) = nx$, $x \in \mathbb{R}$. Naturalmente, essa sequência não converge pontualmente em nenhum ponto $x \neq 0$. Apenas no ponto $x = 0$, $0 = f_n(0) \rightarrow 0$.

Definição 1.2.3 (Sequência de Cauchy). Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

para qualquer que seja $x \in X$.

Teorema 1.2.1. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente, se e somente se, é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Suponha que f_n converge uniformemente para f , então, pela definição 1.2.2, para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que para $n > n_0$, tem-se, para todo $x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Desse modo, tomando $m, n > n_0$, temos

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.7)$$

Com isso, para todo $x \in X$ temos:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) + 0 - f_n(x)| \\ &= |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\stackrel{D.T.}{\leq} |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\stackrel{(1.7)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$, e, portanto, (f_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, suponha que $(f_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy. Então, para cada $x \in X$, a sequência de números reais $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy e consequentemente converge, pois $\mathbb{R}$ é completo. Digamos então, que

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}.$$

Desta maneira, podemos definir a função

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Almejamos mostrar que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente. Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \implies -\epsilon < f_m(x) - f_n(x) < \epsilon, \forall x \in X. \quad (1.9)$$

Passando o limite quando $n \rightarrow \infty$ na expressão (1.9), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\epsilon) < \lim_{n \rightarrow \infty} (f_m(x) - f_n(x)) < \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon.$$

Como os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\epsilon) < \lim_{n \rightarrow \infty} (f_m(x) - f_n(x)) < \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon \implies -\epsilon < \lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < \epsilon.$$

Assim, por (1.9):

$$-\epsilon < f_m(x) - f(x) < \epsilon.$$

Logo,

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X,$$

desde que $m > n_0$. ■

Teorema 1.2.2. Se $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência de funções contínuas em X convergindo uniformemente para $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, então f é contínua em X . Dito de outro modo, convergência uniforme preserva continuidade.

Demonstração. Suponha que f_n converge uniformemente para f , então por definição, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (1.10)$$

para todo $x \in X$. Ademais, dado $a \in X$ arbitrário e fixando $m > n_0$, a continuidade de f_m nos garante a existência de um $\delta_m > 0$ tal que para $x \in X$:

$$|x - a| < \delta_m \implies |f_m(x) - f_m(a)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1.11)$$

Dessa forma, recorrendo às desigualdades em (1.10) e (1.11) e da desigualdade triangular (D.T.), teremos que para $x \in X$, $|x - a| < \delta_m$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) + 0 + 0 - f(a)| \\ &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(a) + f_m(a) - f(a)| \\ &\stackrel{D.T.}{\leq} |f_m(x) - f(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon,$$

ou seja, f é contínua. ■

Capítulo 2

Princípios elementares do cálculo variacional

“Nada acontece no mundo cujo sentido não seja o de algum máximo ou mínimo.”—
Leonhard Euler.

A frase do renomado matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) resume o princípio fundamental que guia o cálculo variacional: a busca por extremos (máximos e mínimos) de funcionais. Este conceito não apenas fundamenta a teoria matemática, mas também se manifesta em inúmeros fenômenos naturais e sistemas físicos.

No contexto deste capítulo, apresentaremos uma introdução ao Cálculo Variacional: um ramo da matemática que se dedica a encontrar tais extremos. Especificamente, veremos como as teorias Lagrangeana e Hamiltoniana utilizam esses princípios para descrever sistemas dinâmicos.

Permita-nos informar as referências utilizadas neste capítulo: [7], [16], [17], [18], [20], [21], [24], [25], [29], [50], [52], [53].

2.1 Contexto Histórico

Desde os séculos XVII e XVIII a observação de fenômenos como a trajetória da luz, os movimentos planetários, fluxo de líquidos e gases (De Lima, 2004, p. 2) inspirou matemáticos como Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Louis Lagrange a desenvolverem conhecimentos relacionados à otimização matemática.

Como descrito por De Castro (2014), Pierre de Fermat fez uma contribuição significativa para o Cálculo Variacional ao formular o princípio que levou seu nome, o “Princípio de Fermat”. Este afirma que a trajetória que a luz segue entre dois pontos é aquela que requer o menor tempo de percurso.

Eves (2011, p. 362) destaca que Pascal, em 1658, elaborou uma descrição abrangente da geometria da cicloide (curva gerada pelo movimento de uma circunferência que rola ao longo de uma linha reta). Essa curva (ver figura 2.1) está relacionada ao problema da braquistócrona que envolve encontrar o caminho ao longo do qual uma partícula desce sob a ação da gravidade no menor tempo possível.

Newton também se interessava por problemas envolvendo princípios de otimização. Em 1686, ele propôs o problema da superfície de revolução com resistência mínima. Nesse



Figura 2.1: Cicloide. Fonte: elaborada pelos autores.

problema, a questão era determinar a forma de uma superfície de revolução que se move através de um líquido oferecendo a menor resistência possível.

Por mais que muitos outros matemáticos tenham contribuído para o desenvolvimento dessa área da matemática, de acordo com as informações apresentadas por De Lima (2004), De Castro (2014) e Warsi (2020), o Cálculo Variacional teve seu início efetivo em junho de 1696, quando Johann Bernoulli divulgou, no periódico científico *Acta Eruditorum*, uma nota intitulada “Um novo problema que convido os matemáticos a resolver”. Este problema refere-se à versão que conhecemos como o problema da Braquistócrona¹.

No mesmo ano, Jacob Bernoulli, irmão de Johann, abordou o problema de maneira diferente, resolvendo, em 1701, um problema isoperimétrico chamado problema de Dido. Esses problemas envolvem a minimização ou maximização de uma função sob certas restrições. O método eficiente desenvolvido por Jacob foi estudado e aprimorado por Leonhard Euler, aluno de Johann.

Em 1744, Euler publicou *A method for discovering curved lines having a maximum or minimum property or the solution of the isoperimetric problem taken in its widest sense*, neste trabalho estava incluso a equação diferencial $\frac{d}{dx}f_{y'} - f_y = 0$ conhecida como equação de Euler. Em 1762 e 1770, Lagrange apresentou um método analítico para deduzir equações diferenciais de curvas que minimizam problemas mais gerais.

Dessa forma, o cálculo variacional foi estabelecido, permitindo o desenvolvimento de métodos e teorias que são fundamentais até hoje. Com os avanços feitos por Euler e Lagrange, as bases para a formulação de problemas de otimização em diversos campos da ciência foram solidificadas. A seguir, aprofundaremos nossa compreensão desses conceitos introduzindo a definição de funcionais e a ideia de variação de um funcional.

2.2 Funcional e Variação

Como citado anteriormente, o objetivo do Cálculo Variacional é encontrar a função que minimiza (ou maximiza) um funcional. Introduziremos abaixo a definição de um funcional.

Definição 2.2.1 (Funcional). Seja E o espaço vetorial normado $E = \{y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}, y \in C^1\}$. Um funcional é uma aplicação J que associa a cada elemento de E um número real, ou seja, $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx, \quad (2.1)$$

onde f é uma função de três variáveis reais, $y(x)$ contínua e diferenciável no intervalo $[x_1, x_2]$, $y'(x)$ a derivada de primeira ordem da função y e x a variável independente.

Vejamos a seguir um exemplo clássico.

¹Para o leitor interessado em saber mais sobre a Braquistócrona, pode ser consultada [7].