Teoria dos Conjuntos: Uma Introdução Maliciosa

Textuniversitários 26

Renan Maneli Mezabarba

Teoria dos Conjuntos: *Uma Introdução Maliciosa*

LF Editorial
São Paulo — 2025

1a. Edição

Editor: Victor Pereira Marinho / José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mezabarba, Renan Maneli
Teoria dos conjuntos : uma introdução maliciosa / Renan Maneli Mezabarba. –– 1. ed. –– São Paulo : LF Editorial, 2025. –– (Textuniversitários ; 26)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-604-8

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Teoria dos conjuntos I. Título II. Série.

25-279167 CDD–510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Aline Graziele Benitez – Bibliotecária – CRB-1/3129

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

LF EDITORIAL

www.lfeditorial.com.br
Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP
www.livrariadafisica.com.br
Telefones:
(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Look how they massacred my boy.

Don Corleone (*The Godfather*, 1972).

Prefácio

O presente material surgiu, originalmente, como o preâmbulo de outro trabalho, o *Fundamentos de Topologia Geral* [26]: seu objetivo era apenas fornecer os (muitos) pré-requisitos teóricos para um bom aproveitamento dos capítulos topológicos. Porém, a extensão da redação levou à sua inevitável cisão: o preâmbulo original se tornou o presente texto, enquanto [26] passou a conter uma versão muito resumida do *mesmo*. Tal separação teve um preço: reestruturar a apresentação dos conteúdos, de modo a amalgamá-los em torno de um fio condutor, algo desnecessário em sua concepção original, mas imprescindível num volume individual. No caso, o fio condutor adotado foi a *axiomática* conhecida como "Zermelo-Fraenkel e o axioma da escolha (ZFC)*" para a Teoria dos Conjuntos†. Nesse processo, alguns tópicos interessantes precisaram ser *omitidos*, como categorias, mas a coesão resultante justificou a dor.

* ZFC é a sigla da expressão em inglês "Zermelo-Fraenkel-Choice", que indica a axiomática para Teoria dos Conjuntos desenvolvida por Ernst **Z**ermelo, Abraham **F**raenkel e acrescida do Axioma da Escolha (*Axiom of **C**hoice*), este também introduzido por Zermelo.

† Cabe destacar que o termo "maliciosa", no subtítulo deste trabalho, faz referência ao clássico *Naive set theory* (Teoria *ingênua* dos conjuntos) de Paul Halmos.

Com isso dito, neste livro o leitor* encontrará um curso básico de Teoria dos Conjuntos sob a axiomática ZFC, com a discussão de algumas aplicações em Álgebra, Análise e *afins*. Exceto por essas eventuais aplicações, cuja leitura é *opcional* ou *adiável*, o único pré-requisito para o texto é ter algum traquejo com o *modus operandi* matemático e seus jargões, o que costuma ser adquirido num bom curso de Cálculo ou Álgebra Linear. Os conteúdos abordados se distribuem da seguinte forma:

- o Capítulo 1 cumpre a tarefa de postular todos os axiomas de ZFC, bem como utilizá-los para *justificar* as definições básicas (produtos cartesianos, funções, relações, etc.) que serão utilizadas nos capítulos seguintes;

- já o Capítulo 2 desenvolve o básico das relações de equivalência e ordem, além de fazer um primeiro contato com as definições recursivas;

- por sua vez, o Capítulo 3 discute as nuances entre as noções de cardinalidade e número cardinal, além de introduzir os importantes números ordinais, utilizados em recursões transfinitas *longas*;

- fica a cargo do Capítulo 4 enunciar e demonstrar as principais encarnações do Axioma da Escolha, além de apresentar algumas aplicações em Álgebra e Análise (nem todas evidentes);

- o Capítulo 5, que encerra a parte "obrigatória" do texto, utiliza todos os ferramentais anteriores para obter resultados de aritmética cardinal, principalmente em contextos infinitários;

* Ao escrever coisas como "o leitor", trato o substantivo "leitor" com gênero neutro. As *novas* alternativas *neutras* ainda não me parecem totalmente estabelecidas na literatura acadêmica nacional.

- por fim, o Capítulo 6, cuja leitura é opcional (mas recomendada) aborda questões *metamatemáticas* inevitáveis a quem se propõe estudar *conjuntos com conjuntos*.

Por ser fruto de [26], os agradecimentos lá feitos ainda se aplicam ao presente material. Apesar disso, algumas redundâncias são convenientes: Gisele T. Paula, pelas sugestões indiretas que levaram à *cisão*; Fabíola Loterio e Pedro Schineider, responsáveis pela mobilização que me permitiu ministrar uma disciplina baseada na versão original deste texto; **M**arcos **M**. **R**odrigues e Pryscilla S. F. Silva, pelas excelentes discussões; Alícia Marques, por motivar as ilustrações de alguns argumentos; os três Santos que serviram de cobaias para a presente versão do texto (Gabriel França, João Mateus e Rodrigo Monteiro). Por último, e não menos importante, agradeço à LF Editorial e a Thiago Dourado por toda a atenção e confiança depositadas neste trabalho.

Renan M. Mezabarba
Ilhéus–BA, 2 de março de 2024

Sumário

Prefácio **VII**

1 ZFC **1**
1.1 Noções elementares 5
1.2 O problema do infinito 25
1.3 Produtos arbitrários e o Axioma da Escolha 31
1.4 Dois axiomas técnicos 36
1.5 Classes (próprias) 38
1.6 Exercícios adicionais 41

2 Relações **47**
2.1 Equivalências e partições 47
2.1.1 Partições e representantes 51
2.1.2 Funções quocientes e projeções 54
2.1.3 Opcional: inteiros e racionais 57
2.2 Um mínimo sobre ordens 68
2.3 Adiável: recursão 75
2.4 Exercícios adicionais 83

3 Cardinalidade **87**
3.1 A ideia de número cardinal 87
3.2 Cardinais enquanto *façon de parler* 93
3.3 Opcional: cardinalidades clássicas 100

3.4 Ordinais 104
3.5 Adiável: algumas recursões longas 114
3.6 Exercícios adicionais 126

4 Escolhas intangíveis **131**
4.1 Partições e representantes 131
4.2 Boa ordenação de Zermelo 136
4.3 Recursões de bolso: o Lema de Zorn 139
4.4 Exercícios adicionais 153

5 Cardinais **157**
5.1 A escadaria dos alephs 158
5.2 Dizia eu que a aritmética 165
5.2.1 Operações cardinais (caso geral) 165
5.2.2 Aritmética transfinita 170
5.2.3 Opcional: aritmética ordinal 178
5.3 Cofinalidade e pombos 182
5.4 Cardinais singulares, regulares e além 191
5.5 Exercícios adicionais 194

6 Metamatemática (Opcional) **201**
6.1 Linguagens e estruturas 202
6.2 Subestruturas, núcleos e quocientes 208
6.3 Interpretação e satisfabilidade 214
6.3.1 Pausa dramática: estruturas livres 218
6.3.2 De volta ao itinerário: fórmulas e modelos 226
6.4 Verdade ou consequência 238
6.5 Dobrando a meta 251
6.6 Exercícios adicionais 265

Referências Bibliográficas **271**

Notações **280**

Índice Remissivo **281**

1

ZFC

Intuitivamente, conjuntos constituem um meio matemático para tratar de ajuntamentos de objetos, o que pode satisfazer a ideia do leitor de "definição". Porém, veja que enquanto uma sala S habitada por pessoas chamadas de P_0, P_1 e P_2 é apenas uma sala, a "lista" $L := \{P_0, P_1, P_2\}$ é um conjunto "abstrato", uma peça de informação que *diz* quais são os nomes das pessoas na sala. Tanto a sala quanto as pessoas são objetos concretos, enquanto a lista L e seus nomes são "abstraídos" desses objetos*.

Assim, num primeiro momento, a noção de "conjunto" é quase trivial, por se tratar de um processo de generalização que antecede a própria ideia de contagem: antes de saber que uma manada M de mamutes tem 5 elementos, primeiro identifica-se o bando e abstrai-se dele um conjunto L', para daí fazer outras considerações sobre *cardinalidades*. Contudo, conjuntos são bem mais flexíveis do que as situações *reais* sugerem: mesmo que a sala S e a manada M de mamutes estejam em continentes distintos, nada impediria que alguém considera-se o conjunto formado pelas listas descritas até aqui, digamos $T := \{L, L'\}$.

Tem-se então um primeiro ponto de confusão: as únicas coisas que pertencem a T são L e L'. Por exemplo, embora a pessoa P_1 *pertença*

---

* E o emprego da expressão "abstrair" é bastante acertado, já que significa "separar": as "propriedades" são "abstraídas" dos objetos que as possuem.

à lista L, ela própria não é uma lista e, portanto, *não pertence* a T, já que o último foi definido como a *coleção* das *listas anteriores*. Isso não fica tão evidente quando se pensa em conjuntos por meio de analogias físicas, o que é bastante razoável, já que conjuntos não são físicos.

De toda forma, a discussão acima sugere uma *relação de pertinência* entre *elementos* e *conjuntos*. Denotaremos tal relação com o símbolo "$\in$", que será usado para indicar que um certo *objeto* x é *elemento* de um *conjunto* A (ou "x pertence a A"), caso em que se escreve "$x \in A$", bem como para indicar que um certo objeto x não é elemento de A (ou "x não pertence a A"), caso em que se escreve "$x \notin A$". E apesar das expressões "elemento" e "conjunto", não haverá uma classe de objetos destinados a serem um ou outro, já que tal distinção é muito tênue num contexto que se propõe a estudar conjuntos quaisquer: veja que na discussão anterior, por exemplo, os *conjuntos* L e L' também se portaram como *elementos* do conjunto T. Dado que os objetos usuais que gostamos de tratar como elementos *puros* são números (naturais, inteiros, reais e complexos) e estes podem ser *implementados* como certos tipos de conjuntos, a preocupação com esse tipo de distinção "elemento vs. conjunto" seria irrelevante para o que faremos. Em resumo: no contexto da teoria dos conjuntos que se desenrola, *tudo é conjunto*.

A fim de tratar matematicamente de objetos que não se definem explicitamente, precisa-se pelo menos descrever *como* tais entidades se comportam. Isso exige o estabelecimento de regras/axiomas que ditem o que pode e o que não pode ser feito com tais objetos. Em particular, por não haver uma definição do que são conjuntos, mesmo a noção de igualdade precisa ser estipulada por algum critério explícito: afinal, como decidir se duas *manifestações* se referem a um mesmo objeto se não sabemos definir o que significa ser o objeto em questão?

Para expressar a resposta de forma mais econômica, para conjuntos A e B:

- Escreveremos $A \subseteq B$ para abreviar a afirmação "para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$", lida como "A é *subconjunto* de B", ou "*A está contido em B*".

- Escreveremos $A \not\subseteq B$ para abreviar a negação de "$A \subseteq B$", i.e., para indicar que "existe x tal que $x \in A$ e $x \notin B$".

- Escreveremos $A \subsetneq B$ para abreviar "$A \subseteq B$ e $A \neq B$" e, em tais situações, diremos que A é *subconjunto próprio* de B.

Axioma da Extensão. *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos. Em notação mais econômica:* $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B)$ *e* $(B \subseteq A)$.

O axioma acima manifesta a ideia de que são os elementos de um conjunto, e apenas eles, que o caracterizam. Este axioma poderia não ser útil se, por exemplo, quiséssemos distinguir conjuntos não apenas por seus elementos, mas também pela fonte em que eles são grafados: se fosse o caso, então os conjuntos $\{L, L'\}$ e $\{\mathsf{L}, \mathsf{L}'\}$ seriam distintos, mesmo com ambos sendo *compostos* pelos *mesmos* elementos. Analogamente, ao pensar em *conjuntos* como *pastas* de arquivos num computador, duas pastas distintas podem ter exatamente os mesmos arquivos (duplicados), revelando um *modelo* que não satisfaz o Axioma da Extensão. É para evitar essas situações que se *postula* tal axioma.

Observação. *Axiomas* não *devem* ser tratados como *verdades absolutas* ou *inquestionáveis*, mas apenas como suposições estabelecidas a fim de embasar deduções posteriores. Eles podem ser debatidos, mas *fora* do panorama discursivo regido por eles. Costuma ser útil pensar em axiomas como regras de um jogo: elas se discutem antes ou depois de uma partida, mas não durante. Inclusive, é lícito buscar por regras que respeitem alguma noção de *verdade*, o que evidentemente exige debate – que ocorre fora do jogo.

Podemos agora nos dedicar a problemas mais emocionantes, como a *formação de conjuntos*. Intuitivamente, sempre que se tem algum tipo de *propriedade matemática*[*], é razoável considerar o conjunto das *coisas*

[*] Aqui, "propriedade matemática" é meramente uma *fórmula* escrita na *linguagem* da Teoria dos Conjuntos, possivelmente com *variáveis livres*. Porém, tais pormenores não serão discutidos... agora.

que possuem tal propriedade. Em vista do Axioma da Extensão, para uma propriedade $\mathscr{P}$ fixada, é único, *caso exista*, o conjunto de *todos* os elementos que possuem a propriedade $\mathscr{P}$: ora, se tanto A quanto B têm como elementos precisamente aqueles com a propriedade $\mathscr{P}$, então "$x \in A \Leftrightarrow x \in B$", acarretando $A = B$. Com isso em mente, para uma propriedade $\mathscr{P}$ dada, ao escrever $\mathscr{P}(y)$ para indicar que y possui a propriedade $\mathscr{P}$ e $\{x : \mathscr{P}(x)\}$ para denotar a coleção dos elementos com a propriedade $\mathscr{P}$, i.e., tal que $y \in \{x : \mathscr{P}(x)\}$ se, e somente se, $\mathscr{P}(y)$, a intuição clássica diz que deveria valer o seguinte:

Princípio da Abstração. *Para toda propriedade $\mathscr{P}$ existe o conjunto* $\{x : \mathscr{P}(x)\}$.

Note que tal princípio *permitiria* reduzir o estudo de conjuntos ao mero *cálculo proposicional*, já que conjuntos $\{x : \mathscr{P}(x)\}$ e $\{x : \mathscr{Q}(x)\}$ apenas *materializam* as propriedades $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$. Por exemplo: uma implicação "$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$" se traduz na inclusão "$\{x : \mathscr{P}(x)\} \subseteq \{x : \mathscr{Q}(x)\}$", enquanto *conjunções* "$\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$" correspondem à interseção entre $\{x : \mathscr{P}(x)\}$ e $\{x : \mathscr{Q}(x)\}$, etc. No entanto, tal princípio é perigoso: ao se considerarem a propriedade $\mathscr{R}(x)$ dada por "$x \notin x$" e o *conjunto* $R := \{x : \mathscr{R}(x)\}$, resulta que $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. Este é o *ilustre paradoxo de Russell**, um sinal de alerta para que se evite o Princípio da Abstração.

Isto deixa um problema: se não podemos formar conjuntos a partir de propriedades quaisquer, então como *formar* novos conjuntos? A lista de axiomas conhecida como *axiomática de Zermelo-Fraenkel e o axioma da escolha*, usualmente abreviada como **ZFC** em referência a Ernst **Z**ermelo, Abraham **F**raenkel e o Axioma da Escolha ("Axiom of **C**hoice"), é um dos modos de resolver o problema revelado pelo último paradoxo: elimina-se o Princípio da Abstração e, em

* Assim nomeado em honra do filósofo e matemático britânico, Bertrand Russell (1872–1970), que o comunicou pela primeira vez em 1902 numa carta enviada a Gottlob Frege, e cuja descoberta se deu em maio ou junho de 1901 quando ele tentava encontrar uma falha na prova de Cantor de que não há maior cardinal.

contrapartida, acrescentam-se axiomas auxiliares. Tais axiomas serão apresentados ao longo do capítulo.

1.1 Noções elementares

A solução paliativa para o excesso de poder garantido pelo *Princípio da Abstração* é restringir seu escopo para conjuntos já conhecidos.

Axioma da Separação*. *Dados um conjunto A e uma propriedade $\mathscr{P}$, existe o conjunto $B := \{x \in A : \mathscr{P}(x)\}$ formado por todos os elementos de A que possuem a propriedade $\mathscr{P}$, i.e., $x \in B \Leftrightarrow x \in A$ e $\mathscr{P}(x)$.*

Observação 1.1.1 Ao escrever expressões do tipo "$A := B$", busca-se destacar que a igualdade $A = B$ é imposta por definição ou, em outras palavras, o símbolo B é *definido* como um *nome* alternativo para o conjunto A.

Exercício 1.1.2 Mostre que a *notação* $\{x \in A : \mathscr{P}(x)\}$ está *bem definida*, no sentido de que ela designa um único conjunto†. *Dica*: Axioma da Extensão.

A diferença entre o Princípio da Abstração e o Axioma da Separação é sutil, mas importante: o primeiro postula a existência irrestrita de conjuntos, enquanto o segundo apenas "separa" subconjuntos a partir de um conjunto previamente conhecido. Uma consequência marcante de tal restrição é a inexistência de universo, no seguinte sentido.

* A rigor, trata-se de um "esquema" de axiomas: um para cada *propriedade* $\mathscr{P}$. No entanto, tal sutileza só importa para leitores interessados em aspectos *metamatemáticos*, discutidos no último capítulo. Em particular, observação semelhante se aplica ao vindouro *axioma da substituição*.

† Em geral, a atribuição de símbolos especiais para designar um *objeto* específico visa abreviar suas eventuais menções/descrições, o que exige a garantia de algum tipo de *unicidade* no contexto considerado – justamente para que o processo de referenciação seja efetivo. Por exemplo: numa sala em que todas as pessoas se chamam "Ariel", seria ineficaz chamar qualquer uma delas pelo nome, dado que todas responderiam.

Proposição 1.1.3 *Não existe um conjunto* $\mathbb{V}$ *tal que* $x \in \mathbb{V}$ *para todo* x.

Demonstração. Se existisse, então $T := \{x \in \mathbb{V} : x \notin x\}$ seria tal que "$T \in T \Leftrightarrow T \notin T$", uma contradição. □

Observação 1.1.4 Quando lidamos com fórmulas e *variáveis*, entende-se que tais variáveis podem assumir *valores* dentro de um *universo*, frequentemente chamado de *domínio do discurso*. Embora quebre a cronologia interna deste texto, convém um exemplo rápido: a existência ou não de solução para a equação $x^2 - 2 = 0$ depende do universo de valores que a variável x pode assumir.

Nesse sentido, a última proposição diz apenas que o *universo dos conjuntos* não é um *valor* que pode ser assumido por uma variável: o *universo dos conjuntos* não é um conjunto. *Ele* existe, mas não como os objetos que existem *nele*: note que isso não é tão diferente de dizer que $\mathbb{Z} \notin \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R} \notin \mathbb{R}$.

Para funcionar, o Axioma da Separação depende de conjuntos previamente conhecidos. Assim, faz sentido supor a existência de *pelo menos* um conjunto*, digamos C, que efetivamente serve para *construir* um conjunto bastante peculiar.

Proposição 1.1.5 *Existe um conjunto* E *tal que para todo* x *ocorre* $x \notin E$.

Demonstração. Para o conjunto C postulado anteriormente, defina $E := \{x \in C : x \neq x\}$, que existe em virtude do Axioma da Separação. Como não existe x satisfazendo $x \neq x$, segue que $x \notin E$ para todo x. □

Definição 1.1.6 O conjunto E definido acima é chamado de *conjunto vazio* e será denotado por $\varnothing$.

Proposição 1.1.7 *Para todo conjunto* A *ocorre* $\varnothing \subseteq A$.

* O leitor afobado pode preferir postular *um* "Axioma da Existência", que garanta a existência de pelo menos um conjunto. Leitores menos afoitos podem esperar pelo *Axioma do Infinito*.

DEMONSTRAÇÃO. Dado x qualquer, a implicação "$x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$" é verdadeira por *vacuidade*, já que "$x \in \varnothing$" é falso. Alternativamente: se a *inclusão* fosse falsa, deveria existir $x \in \varnothing$ com $x \notin A$, mas não existe $x \in \varnothing$. $\square$

Observação 1.1.8 (Contido *vs.* pertence) O leitor deve tomar cuidado para não confundir *pertinência* e *continência*:

- "$x \in y$" significa que "x" é um dos elementos de "y";
- "$x \subseteq y$" significa que "todo elemento de x é também elemento de y".

Embora $\varnothing \subseteq A$ ocorra para qualquer conjunto A, nem sempre ocorre $\varnothing \in A$. Veja que, por exemplo, $\varnothing \notin \varnothing$, já que o contrário seria dizer que $\varnothing$ tem um elemento. Mesmo assim, $\varnothing \subseteq \varnothing$. A raiz dessa confusão é, possivelmente, oriunda do fato de que muitas vezes se diz "y contém x", como abuso de linguagem, a fim de expressar "$x \in y$".

Definição 1.1.9 Se $\mathscr{F}$ é um conjunto com $\mathscr{F} \neq \varnothing$, então existe $A \in \mathscr{F}$, o que permite definir

$$\bigcap \mathscr{F} := \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F := \{x \in A : \forall F(F \in \mathscr{F} \Rightarrow x \in F)\},$$

a *interseção* dos membros do conjunto $\mathscr{F}$, cujos elementos são os x's que pertencem a todos os membros de $\mathscr{F}$.

Observação 1.1.10 A expressão "$\forall F(F \in \mathscr{F} \Rightarrow x \in F)$" abrevia de maneira simbólica a asserção "para todo F, se $F \in \mathscr{F}$, então $x \in F$", que com nossa *semântica usual* diz que "x é membro de todos os elementos de $\mathscr{F}$". Note que para essa afirmação ser falsa, basta que *exista* um $F \in \mathscr{F}$ com $x \notin F$, o que se abreviaria com "$\exists F(F \in \mathscr{F}$ e $x \notin F)$". Assume-se tacitamente que o leitor tenha certa familiaridade com esse tipo de linguagem, pelo menos a nível intuitivo.

Há quem prefira escrever $\mathscr{F} := \{F_i : i \in \mathscr{I}\}$ para algum conjunto $\mathscr{I}$, para daí definir $\bigcap_{i \in \mathscr{I}} F_i$ como acima. Isto é apenas fruto do vício por índices: não está errado, mas não é imprescindível. Dito isso, também é comum criar uma distinção linguística e chamar $\mathscr{F} := \{F_i : i \in \mathscr{I}\}$ de *família*, como se a hipótese de $\mathscr{F}$ ser *parametrizado* por um conjunto $\mathscr{I}$ fosse algo especial e digno de nota, mas não é: qualquer conjunto pode ser escrito dessa forma, como veremos após a introdução de funções. Neste texto, *família*, *coleção* e *conjunto* serão sinônimos.

Observação 1.1.11 Precisa-se supor $\mathscr{F} \neq \varnothing$ a fim de definir $\bigcap \mathscr{F}$ pois, do contrário, para todo x ocorreria $x \in \bigcap \varnothing$, uma violação da Proposição 1.1.3. Note ainda que a definição não depende do elemento $A \in \mathscr{F}$ escolhido, i.e., se $A, A' \in \mathscr{F}$, então

$$\{x \in A : \forall B(B \in \mathscr{F} \Rightarrow x \in B)\} = \{x \in A' : \forall B(B \in \mathscr{F} \Rightarrow x \in B)\},$$

igualdade garantida pelo Axioma da Extensão. Isso mostra que a notação $\bigcap \mathscr{F}$ *funciona*, pois depende apenas de $\mathscr{F}$. Veja também o Exercício 1.6.1 e a Observação 1.6.2

Definição 1.1.12 Dados dois conjuntos A e B, a *diferença* entre A e B é o conjunto $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$, também chamado de *complementar de B com respeito ao conjunto A*. Verbalmente, trata-se da coleção dos elementos de A que não pertencem ao conjunto B.

Até agora, os *poucos* axiomas postulados garantem apenas a existência de subconjuntos de conjuntos conhecidos: a princípio, não há qualquer garantia de que conjuntos não relacionados possam interagir entre si para *gerar* conjuntos novos. Os axiomas a seguir diminuirão essa limitação.

Axioma do Par. *Dados conjuntos A e B, existe um conjunto que tem A e B como elementos. Simbolicamente: existe C tal que $A \in C$ e $B \in C$.*

Pelo Axioma da Separação, o conjunto C acima pode ser usado na definição de $D := \{x \in C : x = A \text{ ou } x = B\}$. Explicitamente, isso diz que os únicos elementos de D são A e B. O leitor certamente já conhece a notação apropriada.