

Fundamentos da Matemática

COMISSÃO EDITORIAL:

Thiago Augusto Silva Dourado

César Polcino Milies

Carlos Gustavo Moreira

Willian Diego Oliveira

Ana Luiza da Conceição Tenório

Gerardo Barrera Vargas

Rafael A. de Carvalho
Felipe Vieira

FUNDAMENTOS DA *Matemática*



LF Editorial
São Paulo — 2025

Copyright © 2025 Editora Livraria da Física

1a. Edição

Editor: VÍCTOR PEREIRA MARINHO / JOSÉ ROBERTO MARINHO

Projeto gráfico e diagramação: THIAGO AUGUSTO SILVA DOURADO

Capa: FABRÍCIO RIBEIRO

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Carvalho, Rafael A. de

Fundamentos da matemática / Rafael A. de Carvalho, Felipe Vieira. -- 1. ed. --
São Paulo : LF Editorial, 2025. -- (Textuniversitários ; 27)

ISBN 978-65-5563-605-5

1. Matemática - Estudo e ensino I. Vieira, Felipe. II. Título. III. Série.

25-279169

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Aline Grazielle Benitez – Bibliotecária – CRB-1/3129

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil

Printed in Brazil



www.lfeditorial.com.br

Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP

www.livrariadafisica.com.br

Telefones:

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

Prefácio

Este livro surgiu das notas de aula dos professores Rafael Aleixo de Carvalho e Felipe Vieira, que ministram a disciplina de Fundamentos de Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática do campus Blumenau da UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina. Ao longo dos anos, os rascunhos desse livro foram disponibilizados para nossos estudantes, e agradecemos a elas e eles pelas sugestões e correções.

Nos inspiramos nas obras presentes na bibliografia, tanto para apresentar uma sequência o mais lógica possível de apresentação para os conteúdos, quanto para montar as listas de exercícios. Nelas, aliás, há algumas questões do tipo “Pesquise sobre”, que são sugestões de leitura adicionais que você pode fazer para ampliar seu conhecimento, tanto histórico da teoria, quanto sobre temas que não couberam neste material.

Diferente das ciências experimentais, onde a “verdade” é estabelecida por observação e testes empíricos, a Matemática se baseia em dedução lógica. Portanto, ao se adentrar na Matemática universitária, não demora muito para que seja necessário entender o que são demonstrações matemáticas, o alicerce do conhecimento matemático. E, à primeira vista, parece simples afinal uma demonstração é uma sequência de argumentos rigorosos que, partindo de axiomas ou teoremas previamente aceitos, estabelece a validade de uma nova afirmação. O problema é que resumir esse conceito crucial

da Matemática em uma frase tão curta parece demasiadamente pretensioso, afinal existem demonstrações de resultados modernos na Matemática que ultrapassam a barreira das centenas de páginas!

Mas aqui, o que queremos é focar nesse encadeamento lógico (sequência de argumentos), ou seja, como funciona a criação de uma conexão entre uma hipótese com uma tese. Como explicar matematicamente que um conjunto de ideias implica em outro. Como provar que *isso* implica *aquilo*. E é por isso que focaremos nos métodos, nas ideias que estão presentes em como demonstrar, e não nos resultados em si.

E é por isso que o nosso objetivo com este livro é introduzir não somente as demonstrações em Matemática, mas também o pensamento matemático. De uma forma simples, o pensamento matemático é a habilidade de raciocinar abstratamente, identificar padrões, formular conjecturas e desenvolver argumentos lógicos rigorosos. Ele envolve não apenas a resolução de problemas específicos, mas também a compreensão estrutural das ideias matemáticas, permitindo conexões entre diferentes áreas do conhecimento. Esse tipo de raciocínio é fundamental tanto para a Matemática quanto para suas aplicações em Ciências, Engenharia e Tecnologia.

Com isso em mente, começamos com a base para toda a teoria, no Capítulo 2. Nele, conversaremos sobre os primeiros passos necessários para que você consiga compreender o que virá adiante. Falaremos sobre conectivos, tautologias, quantificadores e esboçaremos as nossas primeiras demonstrações.

Esse conteúdo não é simples, visto que usa uma notação estranha que envolve os conectivos e suas tabelas verdade. Mas, com os exemplos e exercícios fornecidos, temos certeza de que a leitura não será difícil. Ademais, nesse momento, abordaremos problemas bem simples, com o único intuito de apresentar como funciona o encadeamento lógico de uma demonstração matemática. Essa parte inicial da teoria é importante para uma concisa introdução ao mundo da Lógica Matemática, mas você não deve se apegar a ela, visto que

poucas seções depois veremos modos mais atrativos de se abordar tais aspectos.

No Capítulo 3 apresentamos o conceito de conjunto. Apesar de todos sabermos do que se trata – uma coleção de objetos – há muitos resultados que podem ser obtidos sobre eles, principalmente se utilizarmos o conhecimento adquirido no capítulo anterior. Veremos como relacioná-los, compará-los e como medir seu tamanho. Ao fim do capítulo, aprenderemos sobre os conjuntos verdade, um conceito importantíssimo para os conteúdos que virão a seguir.

Apesar de termos abordado alguns métodos de demonstração anteriormente, talvez o mais desafiador deles para aqueles que estão iniciando sua jornada em livros de Matemática merece uma atenção especial: o Princípio da Indução Matemática (PIM). Ele será abordado no Capítulo 4 e, por ser uma ferramenta crucial para o entendimento de conjuntos básicos na Matemática, trataremos dele através de muitos exemplos. Ademais, veremos alguns outros princípios que são equivalentes a esse importante axioma de Peano.

Agora que temos mais essa ferramenta de demonstração, caminhamos na direção de definir o que são relações dentro da Matemática. No Capítulo 5 detalhamos muitas delas, que resultam em importantes ferramentas quando queremos estudar conjuntos. Em particular, veremos o que são relações de ordem, que generalizam o conceito da ordenação dos números inteiros, e relações de equivalência que, dentre muitos usos, é crucial para a construção de conjuntos quociente.

Por fim, no Capítulo 6, estudamos em detalhes o importante conceito de função, a base de praticamente toda a Matemática. Veremos que, no fundo, uma função é apenas um caso particular de relação, que já teremos estudado no capítulo anterior.

Assim, ler, compreender e estudar este livro não vai apenas apresentar conteúdos importantíssimos para um entendimento pleno da Matemática, mas vai fornecer uma sólida base para aqueles que pretendem seguir estudando, por exemplo, em cursos universitários de Matemática ou mesmo de áreas correlatas. E esse é o principal

objetivo desse livro, que ele represente o início de uma sólida e incrível caminhada dentro da Matemática.

RAFAEL ALEIXO DE CARVALHO

FELIPE VIEIRA

Blumenau, junho de 2025

Sumário

Prefácio	V
1 Introdução	1
2 Lógica Matemática	3
2.1 Conectivos	4
2.2 Tautologias	22
2.3 Argumentos e o princípio da demonstração	29
2.4 Quantificadores	41
2.5 Métodos de demonstração	51
3 Conjuntos	63
3.1 Conceitos preliminares	64
3.2 Operações entre conjuntos	74
3.3 Cardinalidade	86
3.4 Conjunto verdade	91
4 Indução Matemática	99
4.1 Princípio da Indução Matemática	100
4.2 Formas equivalentes	118
5 Relações	135
5.1 Conceitos preliminares	136

5.2	Operações com relações	150
5.3	Relação de ordem	163
5.4	Relação de equivalência	172
6	Funções	183
6.1	Definições iniciais	184
6.2	Propriedades	191
6.3	Operações entre funções	204
6.4	Operações binárias	214
	Referências Bibliográficas	227
	Índice Remissivo	231

1

Introdução

Os primeiros vestígios do pensamento matemático remontam a mais de 35 mil anos, como sugere o Osso de Lebombo. Ainda assim, a evolução dessa ciência foi lenta até que se percebeu a necessidade de uma escrita matemática sistemática. Há cerca de 5 mil anos, os egípcios já utilizavam símbolos para representar quantidades, e muitos de nós conhecemos os algarismos romanos (I, V, X, L, C, D, M).

Embora esses sistemas tenham possibilitado avanços na aritmética, sua estrutura era pouco prática. Representações numéricas exigiam notações extensas e complexas, tornando cálculos longos e suscetíveis a erros. Mesmo assim, essas civilizações já aplicavam conceitos matemáticos sofisticados. A construção da Pirâmide de Quéops, por exemplo, com seus impressionantes 150 metros de altura, não teria sido possível sem conhecimentos matemáticos bem estabelecidos.

Apesar desse progresso, a notação matemática permaneceu rudimentar por séculos, e muitas noções essenciais careciam de uma formulação precisa. Por exemplo, o conjunto dos números naturais conhecidos a muito tempo teve sua axiomatização – isto é, sua descrição formal baseada em princípios fundamentais (axiomas) – sistematizada em 1881 por Charles Sanders Peirce. Em 1888, Julius Wilhelm Richard Dedekind propôs uma abordagem alternativa, e, finalmente, em 1889, Giuseppe Peano apresentou sua famosa definição no *Arithmetices Principia. Nova Methodo Exposita*, que ainda hoje é referência.

Assim, mais de 35 mil anos foram necessários para que um conceito simples como contar se tornasse um conceito perfeitamente definido. Isso só mostra como a Matemática, muitas vezes, funciona: utilizamos amplamente um conceito, desenvolvemos suas consequências, mas talvez não temos uma maneira concisa de escrevê-lo.

O mesmo ocorreu com a Lógica Matemática. Há milênios, matemáticos já demonstravam teoremas – um exemplo clássico é o Teorema de Pitágoras, provado há milhares de anos. No entanto, o estudo formal da lógica dentro da Matemática só teve início nos últimos dois séculos, com os trabalhos de George Boole e Augustus De Morgan. Foi apenas no início do século XX que Ernst Schröder consolidou esses estudos ao publicar sua obra *Vorlesungen über die Algebra der Logik*.

Com essa fundamentação, a Matemática experimentou avanços significativos, mas também enfrentou desafios. O surgimento de paradoxos e inconsistências desencadeou uma crise nos fundamentos da Matemática. Na década de 1920, David Hilbert propôs um programa ambicioso (Programa de Hilbert) para estabelecer bases sólidas e isentas de contradições. No entanto, cerca de dez anos depois, Kurt Gödel demonstrou, por meio de seus Teoremas da Incompletude, que essa empreitada era inalcançável.

Apesar de tantas idas e vindas, todos esses trabalhos foram importantíssimos para o desenvolvimento da Matemática, afinal muitas vezes erros também levam a importantes e futuros acertos. E aqui, nesse livro, apresentamos um pouco dos resultados de toda essa história.

2

Lógica Matemática

A Lógica Matemática é a área que estuda o raciocínio dentro do contexto desse mundo maravilhoso da matemática. De forma geral, ela pode ser vista como a análise dos métodos que usamos para argumentar, com foco principal nas regras que tornam tal raciocínio válido, sem se preocupar tanto com o tema específico que está sendo discutido. Ela é essencial para entender o que faz um argumento ser correto ou não, sendo uma ferramenta importante não só na Matemática, mas também na filosofia e na ciência da computação.

Parece confuso, mas a lógica se preocupa com a forma da escrita, em vez do conteúdo de argumentos. Por exemplo:

- Todos homens são mortais. Sócrates é um homem. Portanto, Sócrates é mortal.
- Todos cachorros são brincalhões. Pepe é um cachorro. Portanto, Pepe é brincalhão.

Perceba que os argumentos acima têm conteúdos completamente distintos e não falam sobre a Matemática, porém, se analisarmos a forma como eles estão escritos, ambas sentenças são do tipo:

A são B . C é um A . Portanto, C é B .

Ou seja, para cada A , B e C dados, o argumento tem um conteúdo diferente, mas não muda sua essência, a forma, isto é, a ideia que

se quer passar. Assim, a lógica se preocupa com a formalização e validação de raciocínios.

Dentro da Matemática, o principal uso da lógica é no entendimento da forma precisa e adequada de como funciona uma demonstração. As demonstrações são o que fazem a Matemática evoluir e, portanto, precisamos saber como elas funcionam sem se preocupar, inicialmente, com seu conteúdo.

E é que queremos neste primeiro capítulo: entender, de verdade, o que é uma demonstração matemática. Para isso, iniciaremos adentrando no mundo da lógica, que é o fundamento teórico que precisamos para, posteriormente, trabalhar com argumentos e o princípio da demonstração.

2.1 Conectivos

Os elementos fundamentais da lógica são as proposições, que são frases ou sentenças declarativas que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, mas nunca ambas ao mesmo tempo.

Exemplo 2.1.1 Vejamos alguns exemplos de proposições.

- “1 é maior que 2”.
- “o quadrado azul é vermelho”.
- “a soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado da hipotenusa”.
- “todo quadrado tem os quatro lados iguais”.

Observe que as sentenças declarativas acima são proposições, pois podemos determinar se elas são verdadeiras ou falsas. Aliás, as duas primeiras proposições são falsas, enquanto as duas últimas são verdadeiras.

Para esclarecer, uma proposição não é meramente uma frase, ela precisa declarar algo que é verdadeiro ou falso. Isso nos indica que nem toda sentença é uma proposição, como vemos a seguir.

Exemplo 2.1.2 Vejamos certas sentenças que não podemos decidir sobre sua veracidade.

- “ $x - 3 = 14$ ”.
- “qual o seu nome?”.
- “esta sentença é falsa”.

A primeira sentença é declarativa, porém não há como decidir se ela é verdadeira ou falsa até sabermos o valor de x . A segunda sentença é interrogativa e, portanto, não é uma proposição. Lembre-se, para uma sentença ser uma proposição, ela precisa antes de tudo ser declarativa. Assim, sentenças interrogativas, exclamativas, imperativas ou optativas não são proposições.

Já a terceira sentença é declarativa, mas não podemos determinar se ela é verdadeira ou falsa. Na verdade, essa última sentença é um exemplo do que chamamos um paradoxo pois, se tentarmos determinar se a sentença é verdadeira, temos:

- Se ela fosse verdadeira, então seria falsa.
- Se ela fosse falsa, então “esta sentença é falsa” deveria ser verdadeira.

Neste material, denotaremos as proposições por letras minúsculas, $p, q, r, \dots$, e chamaremos de valor verdade de uma proposição o valor que indica se ela é verdadeira ou falsa. A uma proposição verdadeira será atribuído um valor verdade V (de verdadeiro) e à uma proposição falsa, um valor verdade F (de falso). Por exemplo, “ $1 + 1 < 3$ ” tem valor verdade V , enquanto “ $1 + 1 = 3$ ” tem valor verdade F . Tal nomenclatura é muito importante para que possamos, ao longo dos nossos estudos, simplificar a notação matemática.

Nas demonstrações matemáticas usamos a todo tempo a combinação de proposições. Tais combinações serão chamadas de proposições compostas. Elas são construídas através dos conectivos, como “e”, “ou”, “implica”. E quando temos uma proposição composta,

chamamos de subproposição cada proposição que foi conectada. Sempre que os conceitos estiverem claros e sem ambiguidade, denominaremos as proposições compostas apenas por proposições.

Vejamos um exemplo, sem ainda nos aprofundarmos nas definições dos conectivos:

“2 é um número par e 3 é um número ímpar”.

Veja que tal proposição composta tem valor verdade V, e ela tem duas subproposições também verdadeiras, a saber, “2 é um número par” e “3 é um número ímpar”. Nesse caso, o conectivo é “e”.

Uma maneira visual interessante para o estudo dos conectivos é a tabela verdade. O que fazemos é colocar cada proposição em uma coluna e a junção delas com o respectivo conectivo na terceira e última coluna. A partir disso, com base na veracidade de cada uma delas, determinamos se sua junção também é verdadeira. Assim, quando estivermos falando de duas proposições p e q relacionadas através de um conectivo, sua tabela verdade possuirá quatro linhas além do cabeçalho.

Começemos a estudar os conectivos com mais detalhes, combinando duas ou mais proposições com o conectivo “e”.

Intuitivamente, esse conectivo funciona como na Língua Portuguesa: “isso e aquilo são verdadeiras” significa que ambas, ao mesmo tempo, devem valer.

Definição 2.1.3 A conjunção das proposições p e q , denotada por

$$p \wedge q$$

é verdadeira quando ambas as proposições p, q são verdadeiras. Sua tabela verdade é, portanto

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Assim, inferimos que o valor verdade de $p \wedge q$ é V quando ambas as proposições p e q são verdadeiras, caso contrário $p \wedge q$ é falsa, e note que esse é o significado usual de “e” que utilizamos na Língua Portuguesa. Da mesma forma, os conectivos “mas”, “ademais” e “também”, têm o mesmo sentido lógico que “e”.

Exemplo 2.1.4 Considere

$$\begin{aligned}p &: 1 < 2, \\q &: 3 \neq 4, \\r &: 1 = 2.\end{aligned}$$

Assim, a proposição $p \wedge q$: “ $1 < 2$ e $3 \neq 4$ ” é verdadeira, pois ambas as proposições p e q são verdadeiras. Porém, a conjunção $p \wedge r$: “ $1 < 2$ e $1 = 2$ ” é falsa, pois r é falsa.

Outro conectivo que precisamos entender é o conectivo “ou”, que também é chamado de disjunção.

O “ou” na Língua Portuguesa é frequentemente usado em um sentido exclusivo, ou seja, é considerado verdadeiro somente quando exatamente uma das subproposições é verdadeira, e não ambas. Por exemplo, quando dizemos “esse livro é de geografia ou de física”, não esperamos que o livro pertença simultaneamente a ambas as disciplinas. Nesse contexto, o “ou” que usamos é um “ou” exclusivo, indicando que o livro é de uma dessas matérias, mas não de ambas ao mesmo tempo.

Porém, na definição lógica utilizamos o “ou” inclusivo, que considera a proposição verdadeira se pelo menos uma das subproposições for verdadeira, incluindo o caso em que ambas sejam verdadeiras. Assim, esse “ou” inclusivo corresponde ao “e/ou” frequentemente encontrado em documentos e linguagem formal.

Essa diferença entre o “ou” inclusivo e o “ou” exclusivo é fundamental para a interpretação correta das proposições em lógica matemática.

Definição 2.1.5 A disjunção das proposições p e q , denotada por

$$p \vee q$$

é verdade quando pelo menos uma das proposições p, q é verdadeira. Sua tabela verdade tem a seguinte forma:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Para exemplificar o contexto do “ou” empregado em lógica matemática (inclusivo) temos a seguinte piada:

- A Sra. Fulana já teve o bebê? — perguntou a esposa.
- Sim — respondeu o marido, que além de obstetra é matemático.
- É um menino ou uma menina?
- Sim, certamente!

Exemplo 2.1.6 Sejam as proposições

- p : A Terra é plana,
- q : A zebra é um animal,
- r : O homem já pisou na lua,
- s : Vacinas não funcionam.

Veja que $q \vee r$ é verdadeira, pois ambas valem. Também, $p \vee q$ é verdadeira, apesar de apenas q ser verdade. Porém, a disjunção $p \vee s$ é falsa, pois claramente ambas as subproposições são falsas.

Outro importante conectivo é a negação, conhecido pelo uso da palavra “não” ou das expressões “é falso que”, “não é verdade que”, “não é o caso que”, entre outras. Perceba que ele não conecta duas ou mais proposições, mas apenas altera o significado lógico de uma única proposição.

Definição 2.1.7 A proposição formada pelos opostos dos valores verdade da proposição p é chamada de negação de p e denotada por

$$\sim p.$$

Lemos $\sim p$ como “não p ”. Sua tabela verdade é

p	$\sim p$
V	F
F	V

Exemplo 2.1.8 Vejamos alguns exemplos de negação de uma proposição.

- Considere a proposição p : “ $x + 2 = 4$ é uma equação de primeiro grau”.
A negação $\sim p$ é “ $x + 2 = 4$ não é uma equação de primeiro grau”.
- p : “todo queijo azul é quadrado”. Já, $\sim p$: “não é verdade que todo queijo azul seja quadrado” ou “todo queijo azul não é quadrado”.
- p : “ $1 + 2 = 4$ ”. Portanto, $\sim p$: “ $1 + 2$ não é igual a 4” ou “ $1 + 2 \neq 4$ ”.
- p : “ $1 < 2$ ”. E, assim, $\sim p$: “ $1 \geq 2$ ”.

Para evitar ambiguidades, usamos o $\sim$ somente para negar o símbolo que vem imediatamente a seguir, o qual representará uma proposição. Então, por exemplo, $\sim p \vee q$ significa $(\sim p) \vee q$ em vez de $\sim (p \vee q)$. Veja que é assim que funciona a negação na Aritmética, visto que $-1 + 2$ representa $(-1) + 2 = 1$ e não $-(1 + 2) = -3$.

Uma discussão importante é sobre como falar as negações de composições de proposições na Língua Portuguesa (e aqui seguiremos Kurtz [9]). A questão é: como distinguimos entre $\sim p \vee q$ e $\sim (p \vee q)$ em nossa fala?

Suponha que p representa “ $2 + 2 = 4$ ” e q representa “ $3 + 2 < 4$ ”. A proposição “Não é o caso que $2 + 2 = 4$ ou $3 + 2 < 4$ ”, na fala, vai significar $\neg(p \vee q)$. Ou seja, vamos adotar a convenção que “não é o caso que” (ou uma negação similar) aplica-se a tudo que segue até algum tipo de grupamento claramente estabelecido.

Para expressar a outra possibilidade, onde negamos apenas a primeira proposição, devemos utilizar uma pausa na fala: “Não é o caso que $2 + 2 = 4$, ou $3 + 2 < 4$ ”. Assim, isso significaria $\sim p \vee q$.

Determinar os valores verdade de uma proposição composta analisando os valores verdade de suas subproposições, pode ser uma tarefa complicada. Exemplificamos a seguir um método para seu entendimento.

Exemplo 2.1.9 Vamos construir a tabela verdade para a proposição $\neg(p \vee \neg q)$. O primeiro passo é determinar todas as possibilidades de valores verdade para as subproposições e colocar cada possibilidade em uma linha da tabela verdade que queremos construir. Para esse caso, existem 4 quatro possibilidades de combinação de valores verdade de p e q , ou seja, a tabela verdade tem 4 linhas:

p	q	$\neg (p \vee \neg q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

O segundo passo é transportar os valores verdade das subproposições para suas respectivas colunas na tabela verdade.

p	q	$\neg (p \vee \neg q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F