Funções Zeta e Corpos Quadráticos

Introdução à alta Teoria dos Números

Textuniversitários 29

Don B. Zagier

Funções Zeta e Corpos Quadráticos

Introdução à alta Teoria dos Números

Tradução:
Christian Táfula

Editora Livraria da Física
São Paulo — 2025

1a. Edição

Editor: Victor Pereira Marinho / José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Zagier, Don B.
Funções zeta e corpos quadráticos : introdução à alta teoria dos números / Don B. Zagier ; tradução Christian Táfula. –– 1. ed. – São Paulo : LF Editorial, 2025. –– (Textuniversitários ; 29)

Título original: Zetafunktionen und quadratische Körper: Eine Einführung in die höhere Zahlentheorie
ISBN 978-65-5563-607-9

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Teoria dos números I. Título. II. Série.

25-279192 CDD–512.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Teoria dos números : Matemática 512.7

Aline Graziele Benitez – Bibliotecária – CRB-1/3129

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

www.lfeditorial.com.br
Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP
www.livrariadafisica.com.br
Telefones:
(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Prefácio

O objetivo deste livro é apresentar a teoria das formas quadráticas binárias desenvolvidas no século retrasado em seus aspectos algébricos por Gauss e em seus aspectos analíticos por Dirichlet. Essa teoria, que antes pertencia ao ensino comum em matemática, hoje é frequentemente apresentada aos alunos apenas como um exemplo da teoria algébrica dos números moderna, da teoria analítica dos números ou da teoria de corpos de classe. Contudo, como esta possui uma grande beleza e também é acessível por meios elementares, penso que seria mais apropriado fazer o oposto: usá-la como uma introdução aos territórios mencionados, que surgiram historicamente disso.

Como o livro pretende ser uma introdução, os pré-requisitos são reduzidos ao mínimo, a saber:

- da álgebra: conceitos básicos sobre grupos e anéis e o teorema da estrutura para grupos abelianos finitamente gerados;

- da análise complexa: somente os conceitos de "função holomorfa", "função meromorfa", "resíduo" e "continuação analítica" (o teorema da integral de Cauchy não é usado);

- o conteúdo de um curso elementar de um semestre em teoria dos números; em particular: congruências, símbolo de Legendre e reciprocidade quadrática.

O livro é baseado em aulas dadas pelo autor em Bonn (verão* de 1975) e Harvard (inverno de 1977) e é intencionado como precursor de um livro mais abrangente em inglês. Eu gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a Hanspeter Kraft, David Kramer e Winfried Kohnen, que leram e comentaram extensivamente em partes do manuscrito; acima de tudo, gostaria de agradecer a Silke Suter por seu apoio ao longo deste projeto e por sua ajuda com o idioma alemão e com outros problemas.

Convenções e terminologia

Denotamos por $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o conjunto dos números inteiros, naturais (i.e., inteiros estritamente positivos), racionais, reais e complexos. A cardinalidade de um conjunto C é denotada por $|C|$ ou $\#C$. Para $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro $n \leq x$. Se f e g são funções de uma variável x com $x \to a$ (frequentemente $a = 0$ ou ∞), as notações $f = O(g)$, $f = o(g)$ e $f \sim g$ significam, respectivamente, que a razão $f(x)/g(x)$ permanece limitada, tenda a 0, ou tende a 1 conforme $x \to a$.

* No hemisfério norte!

Sumário

Parte I

Séries de Dirichlet

1

Séries de Dirichlet: Teoria Analítica

Nesta e na próxima seção, descreveremos as propriedades mais elementares de séries de Dirichlet, que exercem um papel fundamental na teoria analítica dos números, assim como séries de potências na teoria de funções.

Na teoria de séries de potência, toma-se as *funções de potência* $z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ como as funções básicas, e tenta-se representar funções arbitrárias como combinações destas. Na teoria de séries de Dirichlet, tomamos por sua vez as *funções exponenciais* $z \mapsto e^{-\lambda z}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ como os elementos básicos; porém, como $\mathbb{R}$ não é enumerável, é necessário limitarmos a uma sequência $\{z \mapsto e^{-\lambda_n z}\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde λ_n são números reais que assumimos satisfazer

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \quad \lambda_n \to \infty. \tag{1.1}$$

Por último, notamos que é padrão na teoria de séries de Dirichlet denotar a variável complexa por s (ao invés de z como na teoria de funções), e sua parte real e imaginária por σ e t, respectivamente (ao invés de x e y). Assim, temos o seguinte:

Definição. 1.1 Uma *série de Dirichlet* é uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1.2}$$

onde λ_n são números reais satisfazendo (1.1), a_n são números complexos arbitrários, e $s = \sigma + it$ é um número complexo.

Exemplo 1.2 ($\lambda_n = n$) Esta certamente é a escolha mais óbvia para a sequência (1.1), mas isto não nos leva a uma nova teoria, pois a substituição $z = e^{-s}$ na série (1.2) é da forma $\sum a_n z^n$, então a teoria de séries de Dirichlet neste caso é idêntica à teoria usual de funções.

Exemplo 1.3 ($\lambda_n = \log n$) Com esta escolha de expoentes, a série (1.2) pode ser reescrita de uma forma melhor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}. \tag{1.3}$$

Este é o caso relevante para a teoria analítica dos números. Uma série da forma (1.3) é chamada de série de Dirichlet *ordinária*.

Quando e onde uma série de Dirichlet converge? Para uma série de potências $\sum a_n z^n$ nós sabemos que existe um número real não negativo R (o raio de convergência) para o qual $\sum a_n z^n$ converge para todo z com $|z| < R$, e para nenhum z com $|z| > R$ (usando $R = 0$ ou $R = \infty$ para séries que convergem para nenhum ou para todo ponto, respectivamente). Para o caso $\lambda_n = n$ do primeiro exemplo, isto pode ser transferido de forma imediata para a variável s usando a substituição $z = e^{-s}$; para $\sigma_0 = \log 1/R$, vemos que a série (1.2) converge para todo s com $\sigma > \sigma_0$, e para nenhum s com $\sigma < \sigma_0$ (com o comportamento na reta $\sigma = \sigma_0$ correspondendo ao comportamento de convergência no $|z| = R$). Veremos agora que este exemplo exibe o comportamento de convergência típico de uma série de Dirichlet.

Teorema 1.4 *Se a série* (1.2) *converge para* $s = s_0$*, então ela converge uniformemente em conjuntos compactos para* s *na região* $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$*. Sendo assim, existe um número real* σ_0 *tal que a série* (1.2) *converge para todo* s *com* $\sigma > \sigma_0$*, e diverge quando* $\sigma < \sigma_0$ (se (1.2) é convergente ou divergente em todo ponto, colocamos $\sigma_0 = -\infty$ ou ∞, respectivamente). *A função de s definida na região $\sigma > \sigma_0$ por*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1.4}$$

é holomorfa; as derivadas de $f(s)$ são dadas por

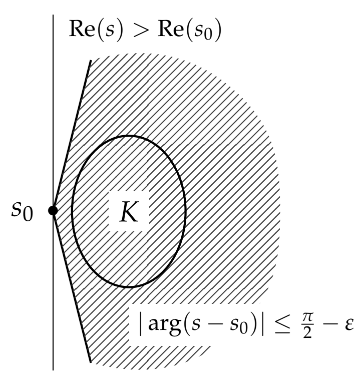
$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1.5}$$

e a série de Dirichlet no lado direito também converge para $\sigma > \sigma_0$.

O número σ_0 é chamado de *abscissa de convergência* da série de Dirichlet (1.2).)

Prova. Só precisamos provar a primeira afirmação, pois a existência de um σ_0 com as propriedades dadas é então clara, e (1.4) ser holomorfa tão quanto a admissibilidade de diferenciar sobre o sinal de soma (assim obtendo (1.5)) seguem do conhecido teorema de Weierstrass sobre convergência uniforme. Provaremos mais ainda: mais especificamente, mostraremos que a série converge uniformemente em regiões do tipo

$$|\arg(s - s_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}; \tag{1.6}$$



isso é mais forte que o enunciado do teorema, pois todo compacto $K \subseteq \{s \mid \sigma > \sigma_0\}$ está contido numa região angular da forma (1.6) (veja figura).

Introduzimos a notação

$$A(N) = \sum_{n=1}^{N} a_n, \quad A(M,N) = \sum_{n=M}^{N} a_n, \quad A(M,M-1) = 0, \tag{1.7}$$

que será usada várias vezes nesta seção. Sem perda de generalidade, podemos assumir $s_0 = 0$ (trocando s por $s + s_0$, e a_n por $a_n e^{-\lambda_n s_0}$); assim, $\sum a_n$ é convergente, e para todo $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que $|A(M,N)| \leq \varepsilon$ para todo $N > M \geq N_0$. Portanto, para $N > M \geq N_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} &= \sum_{n=M}^{N} \big(A(M,n) - A(M,n-1)\big) e^{-\lambda_n s} \\
&= A(M,M)e^{-\lambda_M s} - A(M,M)e^{-\lambda_{M+1} s} + A(M,M+1)e^{-\lambda_{M+1} s} \\
&\quad - \cdots + A(M,N-1)e^{-\lambda_{N-1} s} - A(M,N-1)e^{-\lambda_N s} \\
&\quad + A(M,N)e^{-\lambda_N s} \\
&= \sum_{n=M}^{N-1} A(M,n)\left(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}\right) + A(M,N)e^{-\lambda_N s}
\end{aligned}$$

(este truque é chamado de o método da soma de Abel). Temos

$$\begin{aligned}
\left|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}\right| &= \left|s \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-su}\, \mathrm{d}u\right| \leq |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \left|e^{-su}\right| \mathrm{d}u \\
&= |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\sigma u}\, \mathrm{d}u = \frac{|s|}{\sigma}\left(e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}\right),
\end{aligned}$$

e o valor de $|s|/\sigma$ é cotado por alguma constante C na região (1.6) (com $s_0 = 0$); logo, para $\sigma > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=M}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}\right| &\leq \sum_{n=M}^{N-1} |A(M,n)| \left|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}\right| + |A(M,N)| \left|e^{-\lambda_N s}\right| \\
&\leq C\varepsilon \sum_{n=M}^{N-1} \left(e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}\right) + \varepsilon e^{-\lambda_N \sigma} \\
&\leq C\varepsilon e^{-\lambda_M \sigma} + \varepsilon e^{-\lambda_N \sigma} < (C+1)e^{-\lambda_{N_0}\sigma}\varepsilon,
\end{aligned}$$

o que implica a convergência uniforme de (1.2) neste domínio. $\square$

Como determinar a abscissa de convergência de uma série de Dirichlet? Nós queremos especificar uma fórmula para σ_0 em termos dos coeficientes a_n, de forma análoga à fórmula $R = \liminf |a_n|^{-1/n}$ para o raio de convergência da série de potências $\sum a_n z^n$. Isto é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.5 *Seja $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ uma série de Dirichlet com $\sum a_n$ divergente. Então, a abscissa de convergência σ_0 é dada por*

$$\sigma_0 = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log |A(N)|}{\lambda_N} \tag{1.8}$$

onde $A(N)$ é a soma dos coeficientes definida em (1.7).

Observação. Se $\sum a_n$ converge, então o teorema ainda é válido se considerarmos, ao invés de $A(N)$, a soma $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$. De toda forma, podemos sempre assumir que $\sum a_n$ diverge, deslocando σ_0 (para termos $\sigma_0 > 0$) por alguma quantidade adequada.

Prova. Por fins de simplificar a exposição, lidaremos apenas com o caso de séries de Dirichlet ordinárias: $\lambda_N = \log N$; sendo assim, temos que mostrar que

$$\sigma_0 = \gamma := \limsup_{N\to\infty} \frac{\log |A(N)|}{\log N} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid A(N) = O(N^\alpha)\}. \tag{1.9}$$

(A igualdade $A(N) = O(N^\alpha)$ significa que existe um número $B > 0$ tal que $|A(N)| \leq BN^\alpha$ para todo N.)

Seja $\sigma > \sigma_0$. Então $\sum a_n n^{-\sigma}$ é convergente, e $|\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma}| < C$ para todo N e algum C apropriado. Com o auxílio do método de somas parciais de Abel (como na demonstração do Teorema 1.4) obtemos

$$\begin{aligned}
|A(N)| &= \left| \sum_{n=1}^{N} \left(a_n n^{-\sigma}\right) n^\sigma \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{m=1}^{n} a_m m^{-\sigma} \right) \left(n^\sigma - (n+1)^\sigma\right) + \left(\sum_{n=1} a_n n^{-\sigma} \right) N^\sigma \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \left| \sum_{m=1}^{n} a_m m^{-\sigma} \right| \big((n+1)^\sigma - n^\sigma\big) + \left| \sum_{n=1} a_n n^{-\sigma} \right| N^\sigma \\ &< C \sum_{n=1}^{N-1} \big((n+1)^\sigma - n^\sigma\big) + CN^\sigma < 2CN^\sigma,\end{aligned}$$

logo $\gamma \leq \sigma$, e como isto se aplica para todo σ com $\sigma > \sigma_0$, concluímos que $\gamma \leq \sigma_0$.

Para a volta, tome $\sigma > \gamma$. Assim obtemos, novamente por somas parciais, que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma} = \sum_{n=1}^{N-1} A(n)\big(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\big) + A(N)N^{-\sigma}. \tag{1.10}$$

Tome α tal que $\gamma < \alpha < \sigma$ e C tal que $|A(N)| \leq CN^\alpha$ para todo N. Então, temos que

$$\begin{aligned}\big|A(n)\big(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\big)\big| &\leq Cn^\alpha\big(n^{-\sigma} - (n+1)^{\sigma}\big) \\ &= C\sigma n^\alpha \int_n^{n+1} x^{-\sigma-1}\,\mathrm{d}x < C\sigma n^{\alpha-\sigma-1},\end{aligned}$$

e

$$|A(N)N^{-\sigma}| \leq CN^{\alpha-\sigma} \to 0;$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\sigma-1}$ converge, o lado direito de (1.10) possui um limite finito conforme N vai para ∞, portanto $\sigma \geq \sigma_0$ e (como isso se aplica para todo $\sigma > \gamma$) $\gamma \geq \sigma_0$. $\square$

Exemplo 1.6 a) Seja

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \tag{1.11}$$

(esta é a famosa função zeta de Riemann, que estudaremos em §4). Aqui temos $a_n = 1$, $A(N) = N$, e então $\sigma_0 = \gamma = 1$; a série (1.11) converge para $\sigma > 1$.

b) Seja

$$\psi(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots. \tag{1.12}$$

Aqui $a_n = (-1)^{n-1}$, $A(N) = 1$ ou 0 dependendo se N é ímpar ou par, e $\sigma_0 = \gamma = 0$; portanto, a série (1.12) converge para $\sigma > 0$ e define uma função analítica neste semiplano. Contudo, para $\sigma > 1$ nós claramente temos

$$\psi(s) = \zeta(s) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) = (1 - 2^s)\zeta(s), \tag{1.13}$$

logo obtemos um método de continuar $\zeta(s)$ para o semiplano $\sigma > 0$, com possíveis polos (simples, no máximo) nos pontos $s = 1$, $1 \pm 2\pi i/\log 2$, $1 \pm 4\pi i/\log 2$ etc., onde o fator $(1 - 2^{1-s})$ se anula.

Estes exemplos mostram uma grande diferença entre a teoria de séries de Dirichlet (ordinárias) e a de séries de potências. Da fórmula $R = \liminf |a_n|^{-1/n}$, segue que as séries de potências $\sum a_n z^n$ e $\sum |a_n| z^n$ possuem o mesmo raio de convergência; com a exceção de que, no círculo de convergência $|z| = R$ em si, a série sem valores absolutos pode convergir para certos valores de z e divergir para outros. Em contraste, a série de Dirichlet (1.12) é convergente para $\sigma > 0$, mas série correspondente com sinais positivos (isto é, (1.11)) converge apenas para $\sigma > 1$. Este é um caso extremo em certo sentido, pois podemos obter facilmente o seguinte resultado de (1.9):

Teorema 1.7 *Seja $\sum a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet com abscissa de convergência σ_0 e seja σ_1 ($\geq \sigma_0$) a abscissa de convergência de $\sum |a_n| n^{-s}$. Então, temos:*

$$\sigma_1 \leq \sigma_0 + 1.$$

Observação 1.8 Este teorema é válido apenas para séries de Dirichlet ordinárias: e.g., a série $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\log n)^{-s}/\sqrt{n}$ converge para todo s, mas não converge absolutamente para nenhum s.

Existe uma diferença ainda mais importante entre séries de Dirichlet e as séries de potências. Para séries de potências, o raio de convergência pode ser determinado não somente como uma função dos coeficientes, mas também pelo comportamento da função analítica definida pela série, mais precisamente como o valor absoluto da menor singularidade: se a série $\sum a_n z^n$ representa uma função que pode ser continuada holomorficamente para $|z| < r$, então a série converge nesta região. Para séries de Dirichlet isso não é verdade – a função $\psi(s)$, definida para $\sigma > 0$ em (1.12), pode ser estendida holomorficamente para todo o plano complexo (isto segue de (1.13), pois em estenderemos a função $\zeta(s)$ para $\mathbb{C} \setminus \{1\}$), mas a série (1.12) converge somente para $\sigma > 0$. Apenas em um caso especial podemos concluir a existência de uma singularidade:

Teorema 1.9 (Landau) *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ uma série de Dirichlet com coeficientes reais não negativos e abscissa de convergência σ_0. Então, a função definida por*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \qquad (\sigma > \sigma_0)$$

possui uma singularidade em $s = \sigma_0$.

Prova. Sem perda de generalidade, seja $\sigma_0 = 0$. Suponha que $f(s)$ seja holomorfa em $s = 0$. Assim, f também é holomorfa em um disco $|s| < \varepsilon$, e portanto possui uma expansão de Taylor com raio de convergência > 1 em $s = 1$, implicando que para algum $\delta > 0$ apropriado a série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1-\delta)^k f^{(k)}(1)/k!$ é convergente (e igual a $f(-\delta)$). Mas por (1.5) temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-\delta)^k}{k!} f^{(k)}(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\delta)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\delta)^k (\log n)^k}{k!} \end{aligned}$$

(esta troca é permitida porque a série convergente é também absolutamente convergente, pois $a_n \geq 0$)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{(1+\delta)(\log n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\delta},$$

implicando que $\sum a_n n^{\delta}$ é convergente, assim contradizendo a suposição de que $\sigma_0 = 0$. $\square$

Concluímos esta seção com um teorema simples sobre a unicidade dos coeficientes de uma série de Dirichlet.

Teorema 1.10 *Seja $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ e $\sum b_n e^{-\lambda_n s}$ duas séries de Dirichlet gerais que convergem num domínio aberto em $\mathbb{C}$ e definem a mesma função lá. Então $a_n = b_n$ para todo n.*

PROVA. Suponha que este não seja o caso, e tome m o menor índice tal que $a_m \neq b_m$. Então, para σ suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} 0 &= e^{\lambda_m \sigma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \sigma} \right) \\ &= a_m - b_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} (a_n - b_n) e^{-(\lambda_n - \lambda_m)\sigma}. \end{aligned}$$

Nesta série, cada termo vai a 0 conforme $\sigma \to \infty$ (pois $\lambda_n - \lambda_m > 0$), e convergência uniforme implica que a soma vai 0 conforme σ cresce, contradizendo $a_m \neq b_m$. □

Exercícios

1.1. Em que ponto a hipótese "$\sum a_n$ diverge" foi usada na demonstração do Teorema 1.5?

1.2. Sem usar (1.9), mostre que a série (1.12) possui abscissa de convergência $\sigma_0 = 0$ demonstrando diretamente sua convergência para $s > 0$ real, e então aplicando o Teorema 1.4 (o fato de que $\sigma_0 \geq 0$ é trivial).

1.3. Demonstre o Teorema 1.7.

1.4. Mostre (usando o Teorema 1.5 ou como no Exercício 1.2) que a série

$$1 + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{2}{6^s} + \cdots = (1 - 3^{1-s})\zeta(s)$$

converge para $\sigma > 0$, e conclua que $\zeta(s)$ possui uma continuação meromorfa para $\sigma > 0$ com possíveis polos (simples, no máximo) em $s = 1$, $1 \pm 2\pi i/\log 3$, $1 \pm 4\pi i/\log 3$, etc.. Mostre que a razão $\log 3/\log 2$ é irracional, e deduza disso que $\zeta(s)$ possui no máximo um polo simples, em $s = 1$ (que certamente existe de acordo com o Teorema 1.9).