Álgebra Linear

Volume II

Textuniversitários 31

Vandenberg Lopes Vieira

Álgebra Linear

Volume II

LF Editorial
São Paulo — 2025

1a. Edição

Editor: Victor Pereira Marinho / José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Vieira, Vandenberg Lopes
Álgebra linear : volume II / Vandenberg Lopes Vieira. −− São Paulo : LF Editorial, 2025. −− (Textuniversitários ; 31)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-615-4

1. Álgebra linear - Estudo e ensino 2. Álgebra linear - Problemas, exercícios etc. I. Título. II. Série.

25-280341 CDD–512.507

Índices para catálogo sistemático:

1. Álgebra linear : Matemática : Estudo e ensino 512.507

Eliete Marques da Silva – Bibliotecária – CRB-8/9380

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

www.lfeditorial.com.br
Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP
www.livrariadafisica.com.br
Telefones:
(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

À minha filha Heloísa, que amo de verdade!

DEDICO

O Senhor com sabedoria fundou a terra, com inteligência estabeleceu os céus.

Provérbios 3:19

Prefácio

Não muito tempo atrás, a Álgebra Linear era um componente curricular obrigatório apenas nos cursos de Matemática e, em alguns casos, também nos de Física. No entanto, devido à sua importância, estando no cerne da ciência aplicada e por abordar assuntos de extrema relevância para o conhecimento científico, ela tornou-se assunto obrigatório em outras áreas, tais como Estatística, Engenharia, Ciência da Computação, Economia e Ciências Sociais.

A Álgebra Linear é um ramo importante da Matemática, e nela se estuda espaços vetoriais e as funções lineares entre eles, focalizando em sua parte inicial o estudo de propriedades e operações de vetores, matrizes e sistemas de equações lineares. Tais objetos são indispensáveis em muitas aplicações matemáticas e, por isso, eles ocupam uma posição de destaque daquilo que chamamos de tronco básico das áreas supracitadas.

Não há dúvidas de que existem excelentes livros de Álgebra Linear, tanto em língua portuguesa quanto em outras línguas. Apenas para citar alguns deles, destacamos aqui as referências [2], [10] e [14], todas em língua portuguesa, e [9], [16] e [18], estas na língua inglesa. Sendo assim, é de se esperar por parte do leitor uma justificativa plausível do autor ao propor um novo livro que versa sobre o mesmo assunto. Neste prefácio, tentaremos justificar nossa proposta.

Em primeiro lugar, acreditamos que cada autor, ao escrever um livro, especialmente um de Matemática, deseja apresentar um texto claro, agradável, útil para o fim que lhe foi designado. Por esta razão, cercamo-nos de alguns cuidados minuciosos de modo a oferecer uma linha de análise que todo bom livro deve apresentar.

Este livro foi elaborado para ensinar ao estudante universitário, não apenas de Matemática, mas também de outras áreas (as supracitadas). Temos ciência de que nele existem tópicos avançados, específicos aos estudantes que desejam se aprofundar em temas, digamos mais desafiadores. No entanto, o livro não exige um conhecimento especializado de tópicos prévios, porque os conceitos básicos necessários ao seu desenvolvimento são apresentados em seus capítulos iniciais. Importante ressaltar que um curso básico em Álgebra Linear sempre vem depois de outro em Geometria Analítica, no qual o estudante inicia o estudo de vetores em duas e três dimensões, e isto é importante para as generalizações que são feitas em espaços arbitrários. Fora isto, queremos dizer que tudo (ou quase tudo) do que é necessário para estudar cada seção deste livro é previamente definido e exemplificado, de modo que o estudante não tenha dificuldades em assimilar o mínimo necessário de cada conteúdo; ao menos é isto que esperamos!

Embora os assuntos da Álgebra Linear possuam um vasto campo de aplicações, é importante deixarmos claro ao estudante que este livro não tem foco nisso; apenas nos dedicamos a parte teórica. Para não dizer que consideramos algo nesta direção, abordamos, superficialmente, aplicações em alguns capítulos. O estudante por si mesmo se convencerá de que, para aplicações no sentido pleno da palavra, deverá estudar outros textos. Aqui, indicamos as boas referências [11], [15], [16], [18], [3] e [6].

Objetivos do livro

O objetivo central deste livro é oferecer um estudo básico em Álgebra Linear para estudantes de Matemática, Engenharia e Ciências Aplicadas, concentrando essencialmente apenas nas questões teóricas. Ele contém os principais temas básicos necessários para uma formação sólida em Álgebra Linear. No entanto, o livro também aborda temas que vão além de um curso básico, como, por exemplo, os que são apresentados nos Capítulos 8 e 9, os quais são precisamente estudados em curso de bacharelado em Matemática. Em linhas gerais, acreditamos que o presente texto seja útil aos estudantes que almejam obter conhecimentos básicos em Álgebra Linear, bem como para aqueles que desejam aprofundar-se em tópicos específicos.

Sinceramente, esforçamo-nos para apresentar um texto acessível e claro o suficiente para que o estudante prossiga gradativamente no estudo. Nesta perspectiva, faz-se necessário destacar ao menos dois critérios essenciais: o primeiro é que os exemplos sejam considerados com detalhes e com grau de dificuldade crescente; e o segundo é que expressões como "fácil ver" e "é imediato", tão comuns em texto matemáticos, não sejam usadas com desprezo para com o estudante, mas que tenham a finalidade de sinalizá-lo de que alguns detalhes superficiais de um determinado resultado foram compactados. Especialmente, tivemos cuidado no que concerne a demonstrações de alguns resultados. E por quê? Porque é comum um professor que ensina um curso básico de Álgebra Linear (falamos por experiência própria) dar uma justificativa plausível aos seus alunos sobre a necessidade real de provar a maioria dos resultados do curso. Provar um resultado considerado difícil pode trazer certo temor para alguns estudantes, momentos desagradáveis em certa parte do curso. Muitas definições, teoremas escritos de modo extremamente formal e, após isso, demonstrações cuidadosas cercadas de símbolos lógicos podem ser um convite à desistência do curso. Ocorrem vezes que conseguimos nos distanciar um pouco disso tudo, mas em outras, não. Por isso, espera-se um pouco de paciência e perseverança de tais estudantes. Lembre-se: a Matemática tem seu formalismo e rigor peculiares.

O conteúdo e a divisão do livro

O livro é constituído de onze capítulos, acrescidos de dois apêndices. Visto que ele contém mais de 900 páginas, preferimos dividi-lo em dois volumes. O Volume I é dividido em duas partes. A Parte I (Preliminares) compreende os Capítulos 1 e 2; e a Parte II (Espaços Abstratos) vai do Capítulo 3 ao Capítulo 6. Já o Volume II, com a Parte III (Representações Especiais e Formas Quadráticas), vai do Capítulo 7 ao Capítulo 11, com os dois apêndices. No que segue, daremos uma síntese de cada um destes capítulos.

O Capítulo 1 faz uma abordagem relativamente detalhada sobre matrizes e sistemas de equações lineares. O estudo de matrizes ocupa um lugar singular na Matemática, porque elas são usadas por matemáticos e por muitos cientistas em diversas especialidades. Isto também se aplica a sistemas de equações lineares. Por esta razão, em vez de iniciar nosso estudo já com o conceito de espaço vetorial (algo comum em outros textos), optamos por dedicar uma parte do livro a estes temas, elaborando uma série de definições e exemplos que foram citados em capítulos subsequentes.

No Capítulo 2, abordamos o conceito de determinante de uma matriz. Uma questão importante que pode ser levantada pelo estudante é a seguinte: como justificar o estudo de determinante no livro de Álgebra Linear? Bem, embora o papel dos determinantes tenha sido relegado a uma posição secundária, dando lugar à Álgebra Matricial de Cayley (aqui falamos em nível elementar), ainda é importante estudá-los, até porque, no estudo mais avançado, eles são postos em um contexto bem mais amplo e têm sua importância do ponto de vista teórico (mais do que prático).

No Capítulo 3, iniciamos o estudo sobre espaços vetoriais, um dos assuntos centrais da Álgebra Linear. É um capítulo bastante curto, pois decidimos abordar nele o mínimo necessário de definições e exemplos, exemplos estes que foram apresentados com detalhes. Após considerarmos algumas propriedades básicas de um espaço vetorial, finalizamos o capítulo com o conceito de subespaço.

O Capítulo 4 introduz as ideias centrais de base e dimensão de um espaço vetorial arbitrário, não necessariamente de dimensão finita, muito embora espaços de dimensão infinita não sejam estudados ao logo do texto. Mas, consideramos exemplos clássicos de tais espaços para que os estudantes tenham familiaridade com eles e estejam cientes de sua importância, não apenas para a Matemática, mas também para a Física, por exemplo. O capítulo se encerra com espaços quocientes, exemplos importantes de espaços vetoriais, sobretudo quando se estuda algumas formas canônicas.

Transformações lineares são estudadas no Capítulo 5, que são funções especiais entre dois espaços sobre um mesmo corpo, e mais especiais ainda quando esses espaços são de dimensão finita porque, sendo assim, essas transformações podem ser representadas por matrizes. Por isso, neste caso, o estudo de transformações lineares pode ser feito por meio de matrizes, e isto se traduz em algumas vantagens computacionais.

O Capítulo 6 aborda com detalhes o conceito de produto interno. É um tema interessante que nos possibilita considerar em espaços arbitrários noções geométricas como ortogonalidade, comprimento e distância. O desenvolvimento deste capítulo se dá por meios clássicos, como bases ortonormais e o processo de Gram-Schmidt para construção de tais bases. Destacam-se em sua parte inicial questões relacionadas à projeção ortogonal e ao famoso problema denominado de *melhor aproximação*. Os resultados deste capítulo mostram como as projeções ortogonais podem ser usadas para resolver certos problemas de minimização. Aproveitamos esta parte para estudar, introdutoriamente, alguns tipos de operadores lineares, como operadores normais e autoadjuntos.

No Capítulo 7, tratamos dos elementos da Teoria Espectral. É um dos assuntos mais importantes da Álgebra Linear, porque seus resultados têm aplicações significativas. Os tópicos são desenvolvidos em detalhes e focalizam o estudo de operadores diagonalizáveis. A partir disto, consideramos no Capítulo 8 três importantes formas canônicas, representações matriciais especiais de operadores lineares: forma triangular, forma de Jordan e a forma canônica racional.

O Capítulo 9 é uma continuação do Capítulo 7, no qual retornamos ao estudo sobre diagonalização de operadores lineares, mas em espaços com produto interno. Destacamos resultados clássicos do assunto, como o Teorema Espectral, a Decomposição Polar e a Decomposição em Valores Singulares. O capítulo se encerra mostrando que operadores ortogonais possuem representações matriciais bastante simples.

Formas bilineares são introduzidas no Capítulo 10, que destaca especialmente as formas bilineares simétricas. Isto foi feito porque essas formas estão diretamente relacionadas com formas quadráticas, que são objeto de estudo do Capítulo 11. Formas quadráticas é um assunto indispensável, porque elas frequentemente surgem em aplicações da Álgebra Linear em outras ciências. Mas, para estudá-la, faz-se necessários resultados sobre matrizes simétricas, que são consideradas logo no início do capítulo.

Finalmente, no final do livro inserimos dois apêndices, um de polinômios sobre corpos e outro de relação de equivalência. Resultados sobre polinômios irredutíveis foram usados em tópicos mais avançados do livro, especificamente os do Capítulo 8. Concomitantemente, neste mesmo capítulo, fizemos uso de espaços quocientes. Isto justifica o acréscimo destes dois apêndices.

Cabe ainda uma palavra adicional sobre a citação de cada resultado ao longo dos dois volumes. A fim de que o leitor possa localizar com mais agilidade os resultados citados por referência cruzada, decidimos incluir também a página na qual o resultado está localizado, a menos que ele se encontre no mesmo capítulo no qual foi referenciado. Por exemplo, ao mencionar, no Capítulo 5, o Exemplo 4.2.1, escrevemos: pelo Exemplo 4.2.1 (pág. 200). Por outro lado, ao citar este mesmo exemplo no Capítulo 4, escrevemos simplesmente: pelo Exemplo 4.2.1.

Os exercícios propostos e soluções

Acreditamos que o meio mais eficiente para os estudantes aprenderem as ideias principais de cada assunto de Álgebra Linear (ou qualquer disciplina de teor abstrato) é resolvendo os exercícios propostos. Neste livro, há quase 600 deles, e sua maioria tem a finalidade de fixar a aprendizagem, enquanto uma pequena parte objetiva acrescentar algo à teoria.

Quando se estuda por um determinado livro – e este não é exceção –, o leitor é praticamente levado a seguir o caminho estabelecido pelo autor. As divisões dos capítulos, as ordens com que as seções foram dispostas, a demonstração ou não de um dado teorema são a forma de conduzir o leitor ao longo do livro. No entanto, isto não ocorre com as seções dos exercícios propostos. Uma de suas características é fazer com que o estudante possa caminhar com relativa independência.

Os exercícios são, essencialmente, apresentados em três níveis: fácil, médio e difícil. A variedade deles tem como objetivo preponderante fazer o leitor assimilar, gradativamente, os resultados abordados. Ao iniciar a resolução dos problemas propostos, o leitor terá condições de perceber até que ponto está sabendo usar os conceitos e resultados. A distribuição dos exercícios foi feita buscando dispô-los em uma ordem crescente com respeito ao nível de dificuldade. Isto está anuência com os exemplos apresentados ao longo do texto, no sentido de que, no texto, o nível aumenta gradativamente, exigindo do leitor um pouco mais de atenção à medida que ele avança na leitura. Pela boa didática, é natural que se inicie uma sequência de exemplos simplificados de modo a motivar propostas mais complexas. Entendemos que um exercício de fácil solução seja uma boa forma de estimular o leitor a prosseguir. Foi nessa linha de raciocínio que elaboramos e dispomos os exercícios. Alguns contêm mais de seis itens, o que pode tornar algo repetitivo e enfadonho, todavia, resolver todos ou não é uma decisão que só cabe ao estudante. Se ele já se sente seguro sobre os conceitos exigidos em um dado exercício, então, não vemos motivos para que todos os itens sejam resolvidos.

Vez por outra, marcamos alguns exercícios com asterisco ($*$); eles são os que exigirão um pouco mais de empenho do estudante, forçando-o a obter mais familiaridade no trato dos conceitos relacionados. Isto foi feito apenas para lembrá-lo que tais exercícios estão em outro nível. O fato é que alguns poderiam (mas não foram) até ser destacados com dois asteriscos, (∗∗), para dar uma conotação de mais difícil. Contudo, acreditamos que alguns estudantes acharão que determinados problemas sem a estrelinha deveriam ser destacados com ela e vice-versa. Em linhas gerais, há exercícios desafiadores (em pouca quantidade) e sabemos que eles podem levar o leitor a certo pânico, mas, francamente, eles não têm esse objetivo. Pelo contrário, ao selecioná-los, pensamos naqueles leitores que desejam gastar um pouco mais de energia.

Muitas vezes nos dedicamos exaustivamente na solução de um problema considerado difícil, e ainda assim podemos não resolvê-lo. É claro que isso pode trazer desânimo, mas quando se dedica um tempo extra na solução de um exercício dessa natureza, mesmo que não se tenha "sucesso", é inegável que algo da teoria é assimilada, e isso será útil em ocasião oportuna. Desse modo, o estudante não deve se sentir desencorajado a encarar os exercícios marcados com a famosa estrelinha. Após analisar o grau de dificuldade de todos, estamos convictos de que a maioria pode ser resolvida pelo estudante habituado a estudar algo a mais, que não se acostumou a estudar apenas para fazer provas e garantir aprovação.

No final do livro estão as soluções e/ou respostas dos exercícios ímpares. Isto significa que há mais de 290 exercícios resolvidos. Entretanto, cabe-nos chamar a atenção daquele que muito se apressa em conferir respostas. É aconselhável que uma consulta a essa parte seja considerada como último recurso e que seja feita após algumas tentativas de solução. Não é conveniente que o estudante, ao menor sinal de dificuldade, recorra automaticamente às soluções dadas. Isso pode trazer prejuízo ao seu aprendizado, podendo torná-lo um simples espectador.

Uma palavra aos estudantes

A partir da nossa experiência como estudante e principalmente agora como professor, queremos aqui chamar a atenção de todo aquele que porventura venha a estudar por este livro. Como já mencionamos, as seções dos exercícios propostos de um livro-texto são a parte que desperta maior interesse nos alunos, sendo um atrativo à parte; elas são um ambiente adequado de autoavaliação no que se refere à assimilação dos conteúdos estudados. É perfeitamente compreensível que os mais afoitos busquem o mais rápido possível solucionar os exercícios.

Por mais delineados que sejam ministrados os conteúdos, é quase que impossível para o professor apresentar todos os detalhes de um dado tópico em sala de aula. Não que se tenha algo de negativo a respeito, pelo contrário, isso pode ser uma excelente forma de o professor conduzir o aluno à leitura dos livros-texto. Após cada aula sobre um determinado conteúdo, é razoável que o estudante estabeleça o hábito de se fazer um estudo do que foi visto, analisando com bastante atenção os exemplos trabalhados, uma vez que, em geral, eles são uma fonte de informações que pode auxiliar nas resoluções dos problemas e ajudar a fixar se não todas, mas as principais ideias. Em seguida, ele deve procurar resolver os exercícios propostos, começando com os mais fáceis, e quem sabe, indo até aos mais difíceis. Na medida do possível, é apropriado estabelecer um procedimento de estudo, tornando-o o mais agradável e interessante possível. Isso pode ser útil e decisivo em seu aprendizado.

Leia cada seção do texto pausadamente, reescrevendo cada definição e resultado sempre que houver necessidade. Às vezes, você terá que ler uma parte do texto mais de uma vez, revendo os exemplos, teoremas, demonstrações, etc. Se isto for necessário, faça-o com dedicação.

Agradecimentos

Algumas pessoas contribuíram para a apresentação final do livro e queremos aqui agradecê-las. Expressamos nossos sinceros agradecimentos aos colegas Renan Isneri e Israel Buriti pela elaboração das figuras, como, também, a todos os autores dos livros que foram

base para a elaboração deste texto. Finalmente, nossa gratidão aos alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

Críticas e sugestões

Desde já agradecemos ao leitor que se dispuser em nos comunicar sobre os erros contidos no texto que porventura venham a ser detectados; os remeta via e-mail: vandenberglv@yahoo.com.br. O leitor poderá também enviar suas críticas e sugestões. Todas serão bem-vindas e analisadas com bastante atenção.

Vandenberg Lopes Vieira
Campina Grande, julho de 2025

Sumário