

*Matemática para Institutos Federais, Universidades
e Concursos: Questões de Concursos, Vol. 2*

Geometria Plana e Geometria Espacial

Conselho Editorial da LF Editorial

Amílcar Pinto Martins — Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell — Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva — Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes — UNED, Madri

Iran Abreu Mendes — Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford — Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida — Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo — Universidade Estadual Paulista — UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida — Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa — Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras — Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira — Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia — Universidade de Lisboa

Teresa Vergani — Universidade Aberta de Portugal

*Antônio Nunes de Oliveira
Marcos Cirineu Aguiar Siqueira
Luiz Maggi
José Wally Mendonça Menezes*

*Matemática para Institutos Federais, Universidades
e Concursos: Questões de Concursos, Vol. 2*

Geometria Plana e Geometria Espacial



Editora Livraria da Física
São Paulo — 2024

Copyright © 2025 Editora Livraria da Física

1a. Edição

Editor: VÍCTOR PEREIRA MARINHO & JOSÉ ROBERTO MARINHO

Projeto gráfico e diagramação: THIAGO AUGUSTO SILVA DOURADO

Capa: FABRÍCIO RIBEIRO

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática para Institutos Federais, Universidades e concursos : questões de concursos : vol. 2 : geometria plana e geometria espacial / Antônio Nunes de Oliveira...[et al.]. -- São Paulo : LF Editorial, 2025.

Outros autores: Marcos Cirineu Aguiar Siqueira, Luiz Maggi, José Wally Mendonça Menezes.

Bibliografia.

ISBN 978-65-5563-592-8

1. Concursos públicos - Guias de estudo 2. Geometria - Estudo e ensino 3. Matemática (Atividades e exercícios) 4. Matemática - Concursos públicos 5. Vestibulares I. Oliveira, Antônio Nunes de. II. Siqueira, Marcos Cirineu Aguiar. III. Maggi, Luiz. IV. Menezes, José Wally Mendonça.

25-274503
510.76

CDD-

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Concursos 510.76

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil

Printed in Brazil



www.lfeditorial.com.br

Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP

www.livrariadafisica.com.br

Telefones:

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

Os Autores



Antônio Nunes de Oliveira

Docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Cedro
Graduado em Física, mestre em Ensino de Ciências e Matemática e Doutor em Engenharia de
Processos

Docente colaborador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do
Instituto Federal do Ceará (PGECM-IFCE)

Docente do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, polo 23 (MNPEFSBF)
Doutorando em Ensino pelo programa de Pós-Graduação em ENSINO da Rede Nordeste de
Ensino (RENOEN-IFCE)



Marcos Cirineu Aguiar Siqueira

Docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Maracanaú
Especialista em Pesquisa Científica pela Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Luiz Maggi

Licenciado em Matemática, mestre em Educação Matemática e mestre em Educação. Professor aposentado na Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais



José Wally Mendonça Menezes

Doutor em Física pela Universidade Federal do Ceará
Docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará,
Campus Fortaleza
Docente Permanente no programa de Pós-Graduação em ENSINO da Rede
Nordeste de Ensino (RENOEN-IFCE)

REVISÃO ORTOGRÁFICA E GRAMATICAL

Prof. Dr. Everton Alencar. Professor Adjunto de Latim da Universidade Estadual do Ceará.

A Coleção

VOLUME 1

Capítulo 1 – Análise Combinatória

Capítulo 2 - Probabilidade

VOLUME 2

Capítulo 3 – Geometria Plana

Capítulo 4 – Geometria Espacial

VOLUME 3

Capítulo 5 – Conjuntos e Lógica Formal

Capítulo 6 – Funções Reais de Uma Variável Real

VOLUME 4

Capítulo 7 – Álgebra

Capítulo 8 – Trigonometria

VOLUME 5

Capítulo 9 – Vetores

Capítulo 10 – Geometria Analítica

VOLUME 6

Capítulo 11 – Progressões e Matemática Financeira

Capítulo 12 – Estatística

VOLUME 7

Capítulo 13 – Limites e Derivadas

Capítulo 14 – Integrais

A todos os estudantes e professores que buscam na educação uma maneira de transformar a sociedade, colaborando para torná-la mais justa e igualitária.

Prefácio

O conteúdo deste livro deverá embasar os leitores estudantes em diversas áreas afins, explanando, de forma objetiva, os principais conceitos de geometria, além de muitos exercícios. Fórmulas, definições, conceitos, propriedades e teoremas, que serão utilizados nas sugestões de soluções dos exercícios, são previamente postos, de modo que o leitor seja suficientemente abastecido com o conteúdo teórico a ser utilizado na resolução e compreensão das questões. Dessa forma, o leitor ficará muito bem amparado para pensar com profundidade e resolver os exercícios propostos.

Todas as questões vêm com sugestões de solução muito bem ilustradas, o que torna mais cômodo o estudo, já que boa parte dos textos matemáticos tradicionalmente preferem omitir as respostas, além disso, as figuras tornam a leitura mais compreensiva. Vale ressaltar que o recomendado é que o leitor tente resolver todas as questões sozinho, antes de consultar as sugestões das soluções.

As inúmeras questões resolvidas, oriundas das mais diversas instituições de ensino, tem o intuito de preparar o leitor para a maior diversidade de problemas abordados em concursos, sejam eles preparatórios para ingressar nas universidades e institutos federais, como também para admissão nos demais concursos públicos, em áreas correlatas. Nesse sentido, para o leitor que visa se preparar para concursos, a continuidade na leitura dos livros da coleção deve ser parada obrigatória.

PROF. FRANCISCO EDSON GAMA COUTINHO
Instituto Federal do Ceará

Apresentação

Este livro é a ferramenta definitiva para que você aprimore seus conhecimentos em Matemática, teste suas habilidades e experiências diante de situações-problema e avalie constantemente o seu progresso. Acreditamos firmemente que a resolução de questões é a melhor forma de fixar conteúdos e aprimorar o aprendizado.

Dedicamos este trabalho aos estudantes que buscam se preparar para concursos em Institutos Federais e Universidades, fornecendo uma coletânea criteriosa de problemas de Geometria Plana e Geometria Espacial que estiveram presentes em provas anteriores dessas instituições e similares. Para todos os problemas dessa coleção são apresentadas soluções detalhadas, tornando a leitura do texto mais acessível e enriquecedora.

Nossa expectativa é que este livro o guie em sua trajetória rumo à aprovação e à conquista de um emprego público, permitindo que você se sinta confiante ao enfrentar os desafios das provas.

Caso você deseje um material que aborde os conteúdos de forma mais ampla e detalhada, incluindo demonstrações de teoremas, diversos exemplos e exercícios resolvidos, recomendamos o livro “Geometria Plana e Geometria Espacial”, da coleção “Matemática Para Universidades e Concursos”. Essa coleção abrange textos explicativos e exercícios desafiadores que o ajudarão a aprimorar ainda mais o conhecimento na área.

A principal diferença entre essas duas coleções é que a segunda traz uma abordagem mais completa, sendo recomendada tanto para iniciantes no assunto quanto para aqueles que desejam revisar os conteúdos de maneira mais aprofundada. Por outro lado, se você concluiu recentemente a graduação ou já possui experiência no tema e busca focar nos aspectos específicos das

provas de concursos, a coleção “Matemática Para Institutos Federais...” deve ser suficiente para otimizar seu estudo de forma objetiva.

Seja qual for o seu perfil de estudante, temos certeza de que este livro proporcionará uma preparação sólida e eficiente, apresentando os problemas mais relevantes e recorrentes em provas. Assim, você estará preparado para enfrentar qualquer desafio que lhe seja proposto.

Desejamos a você uma excelente jornada de aprendizado e sucesso em sua trajetória acadêmica e profissional!

OS AUTORES

Suas sugestões para o aprimoramento desta obra serão muito bem-vindas e podem ser enviadas para o e-mail prof.nunesviera@gmail.com.

Visite o nosso canal no YouTube: MATEMÁTICA PARA UNIVERSIDADES E CONCURSOS, lá você encontrará soluções de questões do ENADE, concursos públicos e exames de pós-graduação.

Ingresse em nosso grupo de WhatsApp (<https://chat.whatsapp.com/KPn2d8zwQph3zfbqvrCFkx>) e tenha contato exclusivo com os autores da obra, além de poder ficar atualizado sobre novas publicações e condições especiais de aquisição:



Abreviaturas e Siglas

INSTITUTO AOCP	Associação civil sem fins econômicos, de caráter organizacional, filantrópico, assistencial, promocional, recreativo e educacional, sem cunho político ou partidário.
COMPERVE UFRN	Comissão Permanente do Vestibular da Universidade Federal do Rio Grande do Norte
COPEMA IFAL	Comissão Permanente de Magistério do Instituto Federal de Alagoas
CSEP IFPI	Comissão de Seleção de Pessoal do Instituto Federal do Piauí
FADESP	Fundação de Amparo e Desenvolvimento da Pesquisa
FCM	Fundação de Apoio à Educação e Desenvolvimento Tecnológico de Minas Gerais – Fundação CEFETMINAS
FUNRIO	Fundação de Apoio a Pesquisa, Ensino e Assistência à Escola de Medicina e Cirurgia do Rio de Janeiro e ao Hospital Universitário Gaffrée e Guinle, da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
IFAC	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Acre
IFAL	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas
IFB	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília
IF SUDESTE MG	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais
IFMT	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso

IFNMG	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais
IFPA	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
IFPI	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
IFRN	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
IFRS	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
IFSul	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense
UFMT	Universidade Federal do Mato Grosso

Sumário

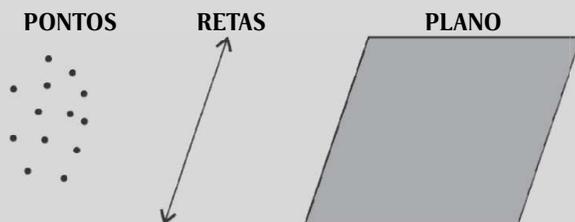
Os autores	VII
A coleção	IX
Prefácio	XI
Apresentação	XIII
Abreviaturas e Siglas	XV
3 Geometria Plana	1
4 Geometria Espacial	153
Bibliografia	221

3. Geometria Plana

A GEOMETRIA SINTÉTICA

Geometria Sintética ou Geometria Pura, é a parte da Geometria que se ocupa em construir e descrever as formas geométricas e os lugares geométricos sem utilizar coordenadas, mas através de relações diretas entre linhas e ângulos. Usamos esse termo em oposição à *Geometria Analítica*, que utiliza fundamentalmente coordenadas de pontos para obter seus resultados.

Seus três *entes primitivos* são os pontos, as retas e os planos, que são aceitos intuitivamente sem uma definição especificadora.



Geralmente nomeamos os pontos com letras maiúsculas, as retas com letras minúsculas e os planos com letras gregas minúsculas.

A GEOMETRIA MÉTRICA

Trata-se do ramo da Geometria que estuda as propriedades métricas das figuras geométricas como distâncias e ângulos (propriedades fundamentais), bem como todas as propriedades delas derivadas como áreas, volumes etc. Usamos esse termo em oposição à chamada

Geometria de Posição, que se ocupa (apenas) com as posições relativas dos entes primitivos e suas intersecções.

A GEOMETRIA PLANA

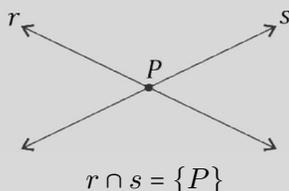
► **Definição:** Constitui o ramo da Geometria de caráter sintético e métrico-posicional que estuda as figuras geométricas contidas em um plano euclidiano.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS NO PLANO

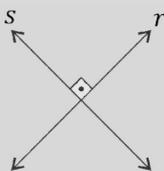
Existem três posições relativas possíveis para um par de retas no plano:

(i) *Retas Concorrentes*

Sempre que elas possuem intersecção unitária, ou seja, se cruzam em um único ponto.



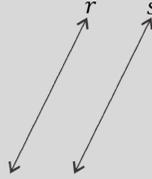
Sempre que o ângulo formado entre as retas r e s no plano vale exatamente 90° (ângulo reto), elas são ditas retas *perpendiculares*:



(ii) *Retas Paralelas*

Duas retas são ditas paralelas se possuem intersecção vazia. De um modo geral, as figuras que incluem retas paralelas possuem propriedades geométricas especiais, ou seja, relações particulares entre ângulos e entre segmentos. Nos concursos públicos, costuma-se explorar bastante esses casos particulares.

RETAS PARALELAS



$$r \cap s = \emptyset$$

(iii) Retas Coincidentes

São retas sobrepostas, de modo que todos os infinitos pontos de uma delas necessariamente pertencem à outra.

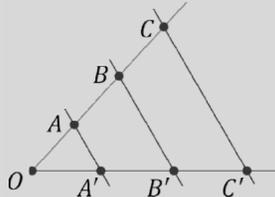


$$r \cap s = r = s$$

TEOREMA DE TALES

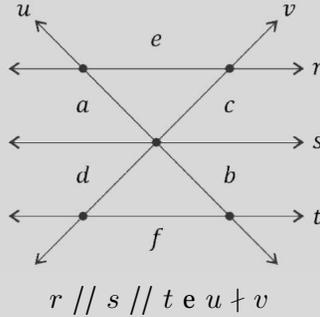
Uma situação particular de extrema relevância é o caso de duas retas concorrentes cortadas por três retas paralelas. No caso específico, essas retas concorrentes serão chamadas de transversais. Em tal situação vale, entre os segmentos formados, o Teorema de Tales, que acaba por fundamentar os casos de semelhança de triângulos.

TEOREMA DE TALES



$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$	$\frac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CC'}}$
---	---

Um caso particular do teorema que vale a pena mencionar é o que consta logo abaixo:



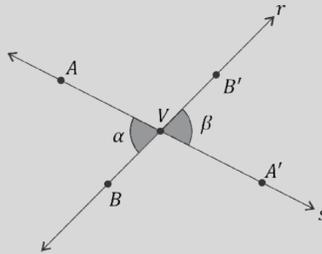
Nesse caso, valerá a razão entre segmentos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

ÂNGULOS FORMADOS POR RETAS PARALELAS E UMA TRANSVERSAL

Antes de tipificar tais ângulos, definamos ângulos opostos pelo vértice (*o.p.v.s*). Sejam, primeiramente, um par de retas concorrentes r e s e as semirretas opostas \overrightarrow{VA} , $\overrightarrow{VA'}$ e \overrightarrow{VB} , $\overrightarrow{VB'}$:

► **Definição:** Ângulos opostos pelo vértice são aqueles que se apoiam em semirretas opostas e compartilham um vértice em comum:



No caso, tais ângulos são sempre congruentes de modo que $\widehat{A'VB} = \widehat{A'VB'}$, ou seja, $\alpha = \beta$.