A Geometria dos Espaços Vetoriais

Uma Visão Geométrica da Álgebra Linear

Textuniversitários 36

Leonardo Meireles Câmara

A Geometria dos Espaços Vetoriais

Uma Visão Geométrica da Álgebra Linear

LF Editorial
São Paulo — 2025

1a. Edição

Editor: Victor Pereira Marinho / José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Câmara, Leonardo Meireles
A geometria dos espaços vetoriais : uma visão geométrica da álgebra linear / Leonardo Meireles Câmara. –– São Paulo : LF Editorial, 2025. –– (Textuniversitários ; 36)

ISBN 978-65-5563-683-3

1. Álgebra linear 2. Matemática 3. Sistemas lineares 4. Vetores (Matemática) I. Título. II. Série.

25-322947.0 CDD–512.5

Índices para catálogo sistemático:

1. Álgebra linear : Matemática 512.5

Eliane de Freitas Leite – Bibliotecária – CRB 8/8415

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

www.lfeditorial.com.br
Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP
www.livrariadafisica.com.br
Telefones:
(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

À Lena e Camille

Prefácio

Estas notas se dedicam ao estudo da chamada álgebra linear de forma geométrica, tendo como pano de fundo as ideias oriundas de métodos da teoria de grupos de Lie e variedades diferenciáveis. O objetivo principal é fornecer, de maneira elementar, a relação entre as transformações lineares e o espaço de matrizes associadas a um par de bases para o domínio e contradomínio das transformações. Naturalmente, estamos supondo que o leitor possui uma certa familiaridade com matrizes e seus produtos.

O primeiro capítulo se dedica ao estudo dos sistemas lineares através de suas matrizes associadas. A principal estratégia é introduzir o conceito de redução à forma escalonada (devido à Carl F. Gauss, B.-I. Clasen e Wilhelm Jordan, cf. [14], [7], [22], [1], [23]) para obter soluções do sistema. Como subproduto, obtemos um algoritmo que nos permite calcular explicitamente a inversa de uma matriz quadrada, quando essa existir. Convém ressaltar que o estudo das soluções de sistemas homogêneos será de fundamental importância na definição do conceito de dimensão de um espaço vetorial. Aqui é forte a presença da ação do grupo de Lie $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ sobre o espaço $\mathscr{M}(m,n)$ das matrizes com m linhas e n colunas, uma vez que substituímos as operações elementares sobre as linhas dos sistema pela multiplicação à esquerda por matrizes elementares sobre a matriz do sistema linear. Encerramos esse capítulo com a fatoração LU, que é uma aplicação numérica importante para ciência de dados. O estudo detalhado que fizemos das operações elementares será muito profícuo nesse último tópico, pois permite não só uma demonstração concisa como também a obtenção de fórmulas explícitas de recorrência para a matriz L.

No segundo capítulo, introduzimos o conceito de determinante, com o fito de responder quando um sistema linear possui ou não solução única, sem obtê-la explicitamente. Finalmente, introduzimos o conceito de adjunta de uma matriz, como ferramenta auxiliar para obter sua inversa. Nesse capítulo, ressaltamos a demonstração concisa e combinatorial do fato do determinante de uma matriz e de sua transposta coincidirem.

O terceiro capítulo trata dos espaços vetoriais de dimensão finita. Aqui iremos introduzir o conceito de base e explicitar a questão da representação de um vetor numa dada base, comparando representações distintas de forma sistemática. Trata-se do que se costuma chamar em matemática de uma escolha de sistema de coordenadas. A ênfase nesse ponto permite ao leitor que seguirá cursos de pós-graduação compreender melhor a noção de variedades diferenciáveis.

No quarto capítulo, nos dedicamos ao estudo das transformações lineares e de suas relações com o espaço de matrizes associadas, uma vez fixada uma base para o domínio e outra para o contradomínio das transformações. Nesse capítulo, abordamos as transformações lineares de uma forma totalmente distinta dos textos usuais sobre o tema. Se há alguma contribuição original nestas notas, essa certamente encontra-se na abordagem realizada nesse capítulo. Em vez de estudarmos as transformações lineares através de intrincados somatórios, analisamos o tema do ponto de vista diagramático, dando ênfase à multiplicação de matrizes como um objeto geométrico. O leitor treinado no assunto vai perceber de pronto a influência da estrutura de grupos de Lie de matrizes por trás dessa abordagem. O ponto alto é a trivialidade com que demonstramos o teorema de mudança de base. Escolhemos essa abordagem porque acreditamos que a álgebra linear é um excelente laboratório para a introdução de conceitos mais avançados como o de cartas locais de uma variedade diferenciável e mesmo de cociclos de transição.

No quinto capítulo, tratamos do estudo das transformações lineares através dos autovalores e autovetores, buscando condições necessárias para a diagonalização de uma matriz que represente um operador dado. A ideia fundamental é a de buscar um sistema de coordenadas adequado (ou base), de forma a conseguirmos a matriz mais simples possível representado esse operador linear.

Já no sexto capítulo, tratamos dos espaços vetoriais munidos de produto interno. Iremos aqui nos ater às implicações geométricas dessas estruturas em espaços cartesianos com baixa dimensão, relacionando-os ao estudo das posições relativas entre retas e planos. Como em alguns cursos de Engenharia a disciplina de Geometria Analítica tem entrado em ocaso, sendo sua parte afim redistribuída na disciplina Álgebra Linear, tratamos em algumas seções dessa questão, introduzindo o produto vetorial de maneira geometricamente rigorosa com o auxílio do conceito de orientação, dispensando o uso precário da assim chamada "regra da mão direita" na definição de produto vetorial. Trata-se de um excelente laboratório para a aplicação dos operadores lineares.

No sétimo capítulo, tratamos das transformações lineares em espaço munidos de produto interno. O objetivo fundamental aqui é mostrar como essas estruturas adicionais ao espaço permitem classificar as transformações lineares que as preservam. O ponto culminante é certamente o teorema espectral, muito embora seja a decomposição polar um resultado de relevância também tratado nesse capítulo. Encerramos esse capítulo com algumas aplicações numéricas importantes, apresentando métodos de decomposição matricial que derivam da fatoração LU, tais como LDL^t, Cholesky e QR. Na sequência, tratamos do método dos mínimos quadrados e da decomposição em valores singulares. Mais uma vez, trata-se de tópicos importantes para a ciência de dados contemporânea.

O oitavo capítulo trata das principais propriedades dos espaços vetoriais complexos, da complexificação de espaços reais e finalmente da complexificação de operadores reais. Nosso objetivo aqui é desmistificar esses espaços, cujas aplicações são tão prolíficas no estudo dos mais diversos fenômenos naturais. Esse capítulo é essencialmente um preparativo para o seguinte, muito embora tenha interesse próprio como preâmbulo linear ao estudo das variedades analíticas complexas.

No nono capítulo, tratamos de alguns teoremas de decomposição, assunto esse de fundamental importância no estudo das equações diferenciais lineares. Mais especificamente, forneceremos uma demonstração geométrica construtiva e convincente do teorema de decomposição do matemático francês Camille Jordan [21, § II, Cap. 2]. Esse é o principal motivo de nos concentramos num estudo detalhado da "complexificação" de operadores em espaços vetoriais reais no Capítulo 8. Chamamos especial atenção para a demonstração construtiva do teorema da decomposição cíclica (Teorema 9.3.13), que fornecerá ao leitor a possibilidade de construir explicitamente uma base que normaliza um operador nilpotente dado (e.g., Exemplo 9.3.16). Essa talvez seja uma contribuição original ao estudo do tema. Ao final do capítulo temos algumas aplicações. Iniciamos com um estudo sobre o raio espectral de uma matriz quadrada, assunto de vital importância no estudo de métodos iterativos para soluções de sistemas lineares. Na sequência, tratamos brevemente as equações diferenciais lineares.

O décimo e último capítulo trata de alguns tópicos da álgebra multilinear que são de fundamental importância no estudo de objetos geométricos. Essencialmente, isso é uma herança do cálculo absoluto de Levi-Civita e Ricci-Curbastro ([26], [24, Ch. 37 e 48]) e do método do referencial móvel de Élie Cartan ([6]). Seu conteúdo está presente na geometria diferencial moderna, na física, na teoria das singularidades, nos sistemas dinâmicos, no estudo de folheações (cf., e.g., [6], [15], [28], [10], [11], [5]) etc. Iremos nos ater aqui à parte linear da estrutura, i.e., todos os objetos terão coeficientes constantes. Quando esses coeficientes variam, passamos ao reino da análise global, que está fora do escopo destas notas. Note ainda que acrescentamos ao conteúdo usual sobre tensores e formas o conceito de *espaço ortogonal* a um subespaço vetorial, assim como o conceito de *espaço associado* e *sistema associado* a uma p-forma. Toda a teoria de formas diferenciais foi introduzida originalmente por Élie Cartan em [6], incluindo esses conceitos.

Observemos que os sete primeiros capítulos fazem parte de um curso introdutório de álgebra linear e devem constar da formação básica de graduandos em Matemática, Física e Engenharia em qualquer boa escola de ciência ou tecnologia. A partir do oitavo capítulo, a formação se torna mais especializada para alunos que pretendem realizar um curso de mestrado em Matemática ou Física Teórica e possivelmente cursos avançados em tecnologia. Os pré-requisitos básicos para os Capítulos 8 e 9 são, como de costume, uma certa maturidade em Matemática – adquirida em geral com quatro períodos letivos em um curso de Matemática – e um curso introdutório de Álgebra Linear que tenha tratado de questões fundamentais como: o *teorema do núcleo e da imagem, decomposição em somas diretas, invariância, mudanças de base, autovalores, autovetores, polinômio característico* e, por fim, *o teorema de Cayley-Hamilton* (Teorema 8.6.2).

Finalmente, gostaríamos de chamar a atenção para o fato de que, em literatura moderna, costuma-se utilizar demonstrações cada vez mais concisas e "mágicas" seguindo, em geral, uma sequência lógica que não fornece ao leitor o verdadeiro caráter de onde se tiram as ideias para uma primeira demonstração de um teorema. Neste texto, preferimos uma postura construtivista, mostrando, da maneira mais evidente que nos foi possível, de onde saem as ideias. Mesmo que isso custe um pouco mais de tempo para leitura e espaço no texto, certamente é muito motivador aos iniciantes.

LEONARDO CÂMARA
Vitória–ES, setembro de 2025

Sumário

1

Sistemas Lineares

Iremos introduzir o conceito de sistemas lineares e determinar sua relação com o espaço de matrizes. Antes disso, iremos introduzir algumas noções preliminares.

1.1 Matrizes, transpostas e inversas

Comecemos por algumas noções que são fundamentais ao longo do texto.

Notação 1.1.1 Uma matriz A com m linhas e n colunas será por vezes denotada por $A_{m\times n}$. O conjunto de tais matrizes será denotado por $\mathscr{M}(m,n)$. Quando quisermos destacar as entradas da matriz A, iremos denotá-la por $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ou somente por $A = (a_{ij})$, caso não haja dúvidas a respeito do número de linhas e colunas de tal matriz.

Passemos agora à questão da inversibilidade de uma matriz.

Definição 1.1.2 Diremos que uma matriz $A_{n\times n}$ é invertível (ou invertível) se existir $B_{n\times n}$ tal que

$$AB = I_n = BA. \tag{1.1.1}$$

Exemplo 1.1.3 $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{smallmatrix}\right)$ é invertível, pois $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ satisfaz (1.1.1).

O exemplo acima suscita naturalmente a seguinte questão: existe uma outra matriz B' que satisfaça a relação (1.1.1)? Segundo o resultado a seguir, a resposta é negativa.

Lema 1.1.4 *Se $A_{n\times n}$ é invertível, então existe uma única matriz $B_{n\times n}$ satisfazendo* (1.1.1).

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que B_1, B_2 satisfaçam a relação (1.1.1), então

$$B_1 = B_1 I = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = IB_2 = B_2$$

□

O lema acima justifica a introdução do seguinte conceito.

Definição 1.1.5 Se $A_{n\times n}$ é invertível, então a única matriz $B_{n\times n}$ satisfazendo (1.1.1) será chamada de *inversa* de A e será denotada por A^{-1}.

Exemplo 1.1.6 Seja $I_{k\ell}$ a matriz obtida da identidade pela permuta entre a k-ésima e a ℓ-ésima linhas, então $I_{k\ell}$ é invertível e $I_{k\ell}^{-1} = I_{k\ell}$. De fato, temos

$$I_{k\ell} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim sendo, um cálculo imediato mostra que $I_{k\ell} I_{k\ell} = I$.