Cálculo Diferencial de Funções de Várias Variáveis

Textuniversitários 38

César Rogério de Oliveira

Cálculo Diferencial de Funções de Várias Variáveis

LF Editorial
São Paulo — 2025

1a. Edição

Editor: Victor Pereira Marinho / José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, César Rogério de
Cálculo diferencial de funções de várias variáveis / César Rogério de Oliveira. –– São Paulo : LF Editorial, 2025. –– (Textuniversitários ; 38)

ISBN 978-65-5563-685-7

1. Cálculo diferencial 2. Funções de várias variáveis 3. Matemática I. Título. II. Série.

25-322961.0 CDD–510

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática 510

Eliane de Freitas Leite – Bibliotecária – CRB 8/8415

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

www.lfeditorial.com.br
Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP
www.livrariadafisica.com.br
Telefones:
(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Para nossos felinos (miau)!

The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's Lemma?

JERRY L. BONA [17]

Prefácio

Estas notas foram escritas para servir de base de estudos para estudantes em um primeiro contato com diferenciação de funções reais de mais de uma variável (mas em número finito; não custa mencionar); elas nasceram de uma disciplina sobre o tema ministrada pelo autor (chamada Cálculo 2), em três oportunidades, através do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos. Foi oferecida para estudantes do primeiro ano de graduação, segundo período, e as turmas não incluíam alunos dos cursos de matemática.

Ao se escrever um pequeno livro deste tipo, com um tema bastante específico e introdutório, é necessário resistir à tentação de incluir muito mais material do que foi discutido em sala de aula e/ou "caprichar" nas noções teóricas. Como um dos objetivos foi procurar manter os limites estritos do que normalmente se aborda em sala de aula, para se tentar ter um texto enxuto e diretamente voltado para os estudantes, as inclusões extras foram, basicamente, mais exemplos e exercícios, além de detalhes em tópicos opcionais (devidamente indicados; veja abaixo sobre isso).

Supõe-se que os estudantes já cursaram uma disciplina de cálculo diferencial de funções de uma variável e também geometria analítica (incluindo dependência linear de vetores, produto escalar, equações de retas e planos).

Vários textos foram consultados na preparação destas notas, e também foram adicionados pequenos argumentos e exemplos pensados pelo próprio autor. Algumas vezes, motivações além da matemática foram inclusas ao se tratar diferentes tópicos e exemplos. Em alguns pontos, referências históricas e/ou trabalhos originais foram mencionados; além de situar cronologicamente certos fatos aos estudantes, pretendeu-se (mas longe de grandes ambições) destacar alguns nomes que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial de várias variáveis, apresentando o tema de forma um pouquinho mais contextualizado.

Há excelentes livros publicados sobre o tema e, como é comum, o presente autor também imagina que seu texto tem algo de diferente, uma didática particular com uma exposição que, além de seguir de perto o que se discutiu em sala de aula, insiste na intuição quando possível, e mais pensada em aplicações do que na própria teoria, mas não se esquecendo dessa última. Por exemplo, discussões detalhadas de continuidade de funções padrões, como polinomial e exponencial, foram evitadas (seria quase uma repetição de parte da disciplina de funções de apenas uma variável real), mas insistiu-se bastante no conceito de diferenciabilidade e suas necessidades e consequências, quando se trata de mais de uma variável.

Tentou-se deixar claro que o conceito de limite é fundamental, já que algumas grandezas só ganham sentido a partir de limites, e que a seção sobre esse tópico, no Capítulo 1, é para ganhar familiaridade, o qual será usado nas diferentes facetas em que o conceito de derivada aparece em funções de várias variáveis.

Evitar algumas repetições (como sobre continuidade de certas funções) foi uma tentativa prática de poder dedicar mais tempo aos tópicos de maior interesse em aplicações, geralmente mais avançados, como derivadas direcionais, mínimos e máximos de funções, multiplicadores de Lagrange, o método dos mínimos quadrados, para citar os mais relevantes.

Incluiu-se grande quantidade de exemplos nos tópicos mais avançados. Alguns exercícios menos imediatos são apresentados como *Desafios*, que juntamente com algumas *Questões* mais teóricas são indicados para os estudantes com essas aptidões. São apresentadas respostas da grande maioria dos exercícios propostos. Fica aqui uma dica aos estudantes: pelo menos leiam os enunciados de todos os exercícios de cada capítulo, pois alguns trazem exemplos de propriedades que não são imediatas, tampouco óbvias!

Os resultados são formulados em duas ou três variáveis, e geralmente comenta-se sobre a validade, ou não, para qualquer número de variáveis. Salientamos que duas variáveis significa que se trabalha em subconjuntos do *plano* $\mathbb{R}^2$, e três variáveis em subconjuntos do *espaço* tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Alguns tópicos menos frequentes em textos desse tipo foram inclusos, como um exemplo detalhado em que não vale o Teorema de Schwarz (veja Subseção 2.6.1), duas maneiras de se pensar sobre derivadas direcionais (veja a Seção 3.4), um exemplo de função que localmente cresce em todas as retas partindo de um ponto crítico, mas esse ponto é de sela (Subseção 7.3.1), apresentação de uma função de duas variáveis com apenas dois pontos críticos e ambos sendo pontos de mínimo global (Questão 7.2.21) (outra com um único ponto crítico, que é mínimo local mas não é global), uma discussão mais detalhada do método dos mínimos quadrados (Capítulo 8; isso se justifica pois frequentemente os alunos dizem que usam esse método nos laboratórios mas não conhecem seus fundamentos), uma interpretação do multiplicador de Lagrange em termos das variáveis dos problemas (Seção 9.2) e uma discussão do teste das segundas derivadas para alguns problemas de otimização com vínculos (Seção 9.5).

Seções indicadas com o símbolo $\star$ são consideradas opcionais; contudo, suas leituras propiciarão um complemento adequado ao texto, com formulações e/ou demonstrações um pouco mais gerais.

Passemos a uma breve descrição dos conteúdos dos capítulos deste texto. O primeiro traz uma apresentação de limites e continuidade de funções, com ênfase para duas e três variáveis; há uma série de exemplos para ilustrar as diferenças e novidades em relação ao caso de uma variável. Continuidade é tratada como uma extensão natural do caso de uma variável. O Capítulo 2 apresenta as derivadas parciais e discute em detalhe a noção de diferenciabilidade de funções, enfatizando suas consequências na teoria, com aplicações (como diferencial e propagação de erros). Derivada direcional e sua interpretação são os destaques do Capítulo 3, incluindo o Teorema do Valor Médio. Curvas suaves e superfícies de nível são os tópicos dos Capítulos 4 e 5, respectivamente. No Capítulo 6, são derivados os polinômios de Taylor em duas variáveis (de ordens 2 e 3) de uma maneira que é bastante natural para os estudantes; como estimar os restos é discutido para polinômios de graus 1 e 2, embora em uma seção opcional é enunciada a forma geral desses polinômios, usando multi-índices. O Capítulo 7 aborda mínimos e máximos de funções, com ênfase para duas variáveis e vários exemplos. Um exemplo *inesperado* de Peano é apresentado numa subseção e, numa seção opcional, enuncia-se a forma geral do teste das segundas derivadas para mais de duas variáveis. Uma discussão mais detalhada do método dos mínimos quadrados é feita no Capítulo 8; esse é um tema que os alunos de ciências e engenharias usam ao tratar dados de laboratórios, e temos uma oportunidade de explicar suas bases matemáticas (destaca-se que a condição para existência da única solução, no caso de ajuste por uma reta, implica na condição de mínimo). Extremos condicionados e multiplicadores de Lagrange são os temas do Capítulo 9; além de várias aplicações, são discutidas três maneiras de se justificar o papel dos multiplicadores, bem como uma interpretação deles (com exemplos explícitos). Foi feito um esforço para motivar e explicar a importância do Teorema das Funções Implícitas (que muitas vezes não atrai a atenção desse tipo de estudante); a ênfase foi para duas variáveis e a demonstração ficou para uma seção opcional.

Observo que este texto, por naturalmente exigir mais cuidado com a formulação da teoria ao se escrever, acabou saindo um pouco menos espontâneo do que as exposições e discussões em salas de aula; cabe ao docente, que arriscar segui-lo em alguma turma, tentar auxiliar os estudantes nos argumentos mais áridos.

Se alguns estudantes considerarem o texto “fácil de ler” e com alguma utilidade, grande parte do objetivo original, ao escrever estas notas, terá sido alcançado.

Agradeço ao Prof. Luiz R. Hartmann pela leitura atenta do texto e pelas várias sugestões de correção.

Erratas deste texto podem ser acessadas em

`https://www.dm.ufscar.br/profs/oliveira/Errata_CDFVV_crono.pdf`

(em ordem cronológica) e

`https://www.dm.ufscar.br/profs/oliveira/Errata_CDFVV_pag.pdf`

(ordenada pelas páginas do livro).

César R. de Oliveira
São Carlos – SP, dezembro de 2025

Sumário

Prefácio **VII**

1 Limites e Continuidade **1**
1.1 Funções reais de várias variáveis 1
1.2 Limites 6

2 Derivadas **23**
2.1 Derivadas parciais 23
2.2 Diferencial 28
2.3 Propagação de erros 34
2.4 Digressão teórica: diferenciabilidade 39
2.5 Regra da cadeia 48
2.6 Teorema de Schwarz 55
2.6.1 Contraexemplo 59
2.6.2 ⋆ Demonstração do Teorema de Schwarz 61

3 Derivada direcional **65**
3.1 Taxa de variação em qualquer direção 65
3.2 Gradiente 70
3.3 Teorema do Valor Médio 84
3.3.1 TVM em uma variável 84
3.3.2 TVM em várias variáveis 87
3.4 Derivada direcional: alternativa 90

4 Curvas parametrizadas **93**
4.1 Fatos básicos 93
4.2 Comprimento de curvas 99
4.2.1 Reparametrização 102

5 Superfícies de nível **107**
5.1 Superfícies e curvas de nível 107
5.2 Gráficos como superfícies de nível 116

6 Polinômios de Taylor **119**
6.1 Polinômios de Taylor de grau 3 119
6.2 Estimativas dos restos 128
6.3 ⋆ Teorema de Taylor geral 133

7 Mínimos e máximos **135**
7.1 Extremos 135
7.2 Teste das segundas derivadas: duas variáveis 138
7.3 Demonstração do Teorema 7.2.1 149
7.3.1 Exemplo de Peano 149
7.3.2 Demonstração 151
7.4 ⋆ Teste das segundas derivadas: mais variáveis 155

8 Método dos mínimos quadrados **159**
8.1 O método 159
8.1.1 Ajuste de uma reta 162
8.1.2 Ajuste da função exponencial 167
8.1.3 Ajuste da função potência 168
8.1.4 Observações 169
8.2 ⋆ MMQ para funções 173

9 Extremos condicionados **177**
9.1 Multiplicador de Lagrange 177
9.2 Interpretação do multiplicador 188
9.3 Mais de um vínculo 192
9.4 Demonstração do Teorema 9.1.1 195

9.4.1 Argumento intuitivo 196
9.4.2 Argumento analítico 196
9.4.3 Argumento geométrico 198
9.5 ⋆ Teste das segundas derivadas: vínculo 199
9.5.1 Duas variáveis 199
9.5.2 Três variáveis 203

10 Funções implícitas **207**
10.1 Visão implícita 207
10.1.1 Motivação 207
10.1.2 Abordagem geral 208
10.2 Funções inversas 217
10.3 Mais variáveis 219
10.4 ⋆ Demonstração do Teorema 10.1.2 219
10.4.1 Existência de $y(x)$ 220
10.4.2 $y(x)$ é derivável 220
10.4.3 $y'(x)$ é contínua 221

1

Limites e Continuidade

Pedimos licença, mas precisamos iniciar o texto com várias definições, nomenclaturas e notações. Um elemento do plano $\mathbb{R}^2$ *será denotado de maneiras diferentes: como vetor* $\vec{x}$ *diretamente, como um par ordenado* (x, y) *(ou* (x_1, x_2)*), ou ainda usando a base canônica* $(\vec{i}, \vec{j})$*, escrevendo* $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$*. Essa notação se estende para qualquer número de variáveis em* $\mathbb{R}^n$*: um elemento* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *também será denotado por* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ou* $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$*, em que foi usada uma base ortonormal* $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*, a qual generaliza* $(\vec{i}, \vec{j})$ *no plano (o produto escalar é* $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$*, como esperado). No espaço tridimensional* $\mathbb{R}^3$*, será mais comum o uso de* (x, y, z) *e* $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *(vale a pena mencionar que essa notação surgiu no século XIX).*

1.1 Funções reais de várias variáveis

Inicia-se com exemplos de funções de duas variáveis $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ilustrando um pouco seus *domínios* D e *imagens*, ou seja, os valores em que as funções "atingem"; em símbolos, a *imagem* de f é o conjunto

$$\{z \in \mathbb{R} \mid \text{existe } (x, y) \in D \text{ com } z = f(x, y)\}. \tag{1.1.1}$$

São importantes também os gráficos; o *gráfico* dessa função f é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\{(x, y, f(x, y) \mid (x, y) \in D\}. \tag{1.1.2}$$

Lembremos que f é dita *injetora* se $f(x) \neq f(y)$ sempre que $x \neq y$. Noções de bola aberta e ponto interior, que serão introduzidos mais adiante, são necessárias para que certos enunciados tornem-se precisos. Note que essas noções fazem sentido para qualquer número de variáveis, com adaptações naturais, e isso não será destacado a todo momento.

Exemplo 1.1.1

1. A área de um retângulo de lados $x > 0$ e $y > 0$ é a função $S(x,y) = xy$, tendo como imagem o intervalo $(0,\infty)$. Outra forma de descrever o domínio dessa função é pelo produto cartesiano $(0,\infty) \times (0,\infty)$.

2. $z = f(x,y) = \big(1 - (x^2 + y^2)\big)^{1/2}$, com domínio $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ e imagem sendo o intervalo fechado $[0,1]$; seu gráfico é a calota superior de uma esfera, ilustrada na Figura 1.1. Compare com o Exercício 1.1.2, item (4).

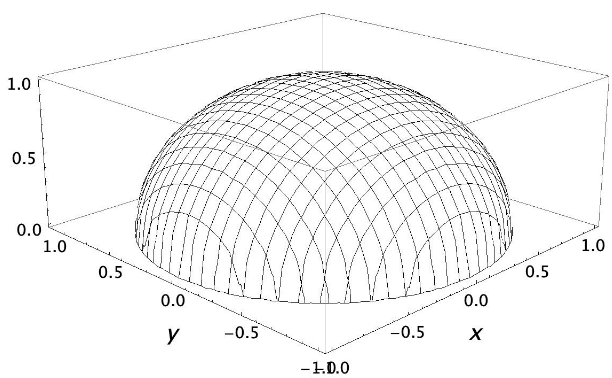

Figura 1.1. Gráfico de $z = f(x,y) = (1 - (x^2 + y^2))^{1/2}$.

3. Segundo a Lei dos Gases Ideais, a pressão P é dada por

$$P(T,V) = k\frac{T}{V},$$

sendo V, T o volume e a temperatura do sistema, respectivamente, e $k > 0$ uma constante. O domínio dessa função de duas variáveis é dado por $(0,\infty) \times (0,\infty)$ e sua imagem por $(0,\infty)$.

4. $f(x, y) = x^2 + y^2$, com domínio todo o plano $\mathbb{R}^2$ e imagem o conjunto $[0, \infty)$, cujo gráfico é um *parabolóide*, representado na Figura 1.2.

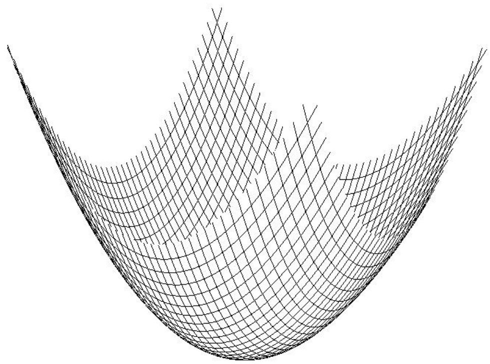

Figura 1.2. Parabolóide; gráfico de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

5. $f(x, y) = x^2 - y^2$, com domínio todo o plano $\mathbb{R}^2$ e imagem o conjunto dos números reais; para essa função restrita ao eixo das abscissas (ou seja, $y = 0$), a origem é um ponto de mínimo, enquanto que restrita ao eixo das ordenadas (ou seja, $x = 0$), de máximo; nesta situação, a origem é um exemplo do que é chamado de *ponto de sela* (veja a Definição 7.1.1), e o gráfico da função está representado na Figura 1.3.

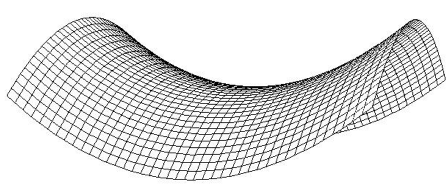

Figura 1.3. Sela; gráfico de $z = f(x, y) = x^2 - y^2$.

Exercício 1.1.2 Esboce os gráficos de:

1. $f(x,y) = 1 - x - \frac{y}{4}$.
2. $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$.
3. $f(x,y) = \cos y$.
4. $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^{1/2}$.

Questão 1.1.3 Suponha conhecido o gráfico de $f(x,y)$. Explique o que ocorre com esse gráfico se forem considerados os gráficos das funções

1. $f(x,y) + a$, para $a \in \mathbb{R}$;
2. $a\,f(x,y)$, para $0 \neq a \in \mathbb{R}$;
3. $f(ax, ay)$, para $a \in \mathbb{R}$;
4. $f(x-a, y-b)$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

(*Resposta*: deslocado de a ao longo do eixo z; esticado ao longo de z se $|a| > 1$ e comprimido se $0 < |a| < 1$, combinado com reflexão em relação ao plano xy se $a < 0$; valores negativos de a correspondem a reflexões do gráfico em relação aos planos yz e xz; deslocamento do gráfico ao longo do vetor $(a, b, 0)$.)

Questão 1.1.4 Use algum aplicativo de computador ou diretamente a internet para desenhar alguns gráficos mais complexos, como $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, $g(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$, $h(x,y) = (x+y)e^{1-x^2-y^2}$ e $u(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)$, sempre em torno da origem.

Mais alguma nomenclatura, que não deve trazer grandes dificuldades. Em uma variável, no $\lim_{x \to x_0} f(x)$ estudam-se os limites laterias pela esquerda e direita, então supõe-se que se se afasta um pouco de x_0, tanto para a direita quanto para a esquerda, continua-se no domínio de f, o que pode ser formalizado dizendo que existe $r > 0$ de forma que o intervalo aberto $(x_0 - r, x_0 + r)$ esteja contido nesse domínio.