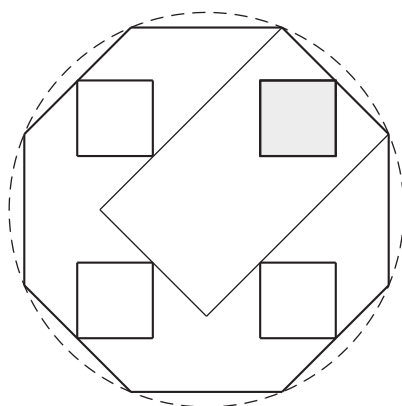


Rudimentos de Geometria Euclidiana



Notas, Exercícios Resolvidos e Propostos
Enem, Vestibulares, Obmep e Olimpíadas



CONSELHO EDITORIAL DA LF EDITORIAL

Amílcar Pinto Martins - Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell - Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva - Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes - UNED, Madri

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford - Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Universidade Estadual Paulista - UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa - Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras - Universidade de Granada, Espanha

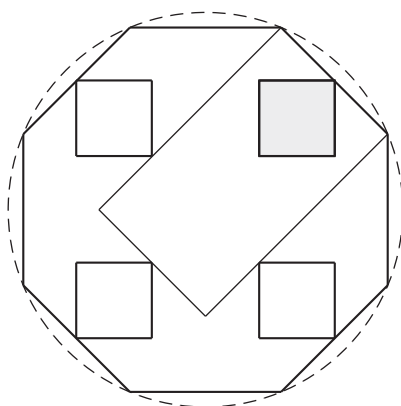
Maria Marly de Oliveira - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia - Universidade de Lisboa

Teresa Vergani - Universidade Aberta de Portugal

E. Capelas de Oliveira
Chico Nery

Rudimentos de Geometria Euclidiana



Notas, Exercícios Resolvidos e Propostos
Enem, Vestibulares, Obmep e Olimpíadas



2026

Copyright © 2026 os autores
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, E. Capelas de
Rudimentos de geometria euclidiana: notas, exercícios resolvidos e propostos: Enem, vestibulares,
Obmep e olimpíadas / E. Capelas de Oliveira, Chico Nery. – São Paulo: LF Editorial, 2026.

ISBN 978-65-5563-701-4

1. Geometria 2. Geometria - Estudo e ensino 3. Geometria euclidiana I. Nery, Chico. II. Título.

26-337316.0

CDD-516

Índices para catálogo sistemático:
1. Geometria 516

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



EDITORIAL

LF Editorial

www.livrariadafisica.com.br

www.lfeditorial.com.br

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

À Ivana, minha mulher, dedico.
Sou grato pela sua infinita paciência e
pelo seu amor para com meu trabalho.
Edmundo

Dedico este meu trabalho à minha companheira,
Gisele, pela sua paciência, seu incentivo e seu
maior carinho em todas as horas do meu trabalho.
Chico Nery

Sumário

Prefácio	v
1 Triângulo	1
1.1 Preliminares	2
1.2 Segmentos e pontos notáveis	16
1.3 Congruência de triângulos	20
1.4 Semelhança de triângulos	23
1.4.1 Triângulo retângulo	26
1.4.2 Acenos à trigonometria	30
1.4.3 Teorema de Tales e o triângulo	35
1.5 Área e a trigonometria	41
1.5.1 Teorema dos cossenos	41
1.5.2 Teorema dos senos	45
1.5.3 Área do triângulo	48
1.6 Bissetrizes interna e externa	50
1.6.1 Teorema da bissetriz interna	50
1.6.2 Teorema da bissetriz externa	54
1.7 Exercícios	71
2 Polígono, quadrilátero e circunferência	91
2.1 Preliminares	92
2.1.1 Polígonos	92
2.1.2 Quadriláteros notáveis	101
2.1.3 Circunferência	118
2.2 Teorema de Menelau	141
2.3 Teorema de Ceva	151
2.4 Teorema de Stewart	157
2.4.1 Teorema de Poncelet	159
2.4.2 Teorema de Burlet	161
2.5 Teorema das cordas	162
2.6 Teorema de Ptolomeu	168

2.6.1	Teorema de Hiparco	171
2.6.2	Teorema de Chadu	173
2.7	Exercícios	197
3	Complementos	227
3.1	Triângulos e quadriláteros	228
3.1.1	Triângulo pedal	228
3.1.2	Triângulo órtico	230
3.2	Circunferência ex-cêntrica	239
3.3	Transformações lineares	247
3.4	Simediana	253
3.4.1	Propriedades	261
3.5	Traços auxiliares	267
3.5.1	Dois triângulos isósceles	268
3.5.2	Dois triângulos semelhantes	270
3.5.3	Triângulo e uma mediana	273
3.5.4	Ângulos inscrito e semi-inscrito	274
3.5.5	Um particular quadrilátero	275
3.5.6	Um quadrado e um triângulo	276
3.6	Exercícios	300
4	Tópicos especiais	331
4.1	Teorema de Pitágoras	331
4.1.1	Prova por meio da trigonometria	332
4.2	Áreas de dois triângulos	336
4.2.1	Propriedades	336
4.2.2	Exemplos com pontos notáveis	339
4.2.3	Teorema de Euler e o triângulo pedal	348
4.3	Teorema de Feuerbach	351
4.3.1	Preliminares	351
4.3.2	Circunferência dos nove pontos	358
4.4	Teorema do círculo de Descartes	360
4.5	Teoremas de Morley e Napoleão	363
4.5.1	Teorema de Morley	363
4.5.2	Teorema de Napoleão	366
4.6	Construções	370
4.6.1	Média e extrema razão	371
4.6.2	Construções com régua e compasso	372
4.7	Exercícios	379

A	Uma breve revisão	385
A.1	Introdução	385
A.2	Preliminares	387
A.2.1	Entes geométricos fundamentais	387
A.2.2	Axiomas/Postulados	388
A.2.3	Teoremas	389
A.2.4	Os cinco postulados de Euclides	394
A.2.5	Polígonos	397
A.2.6	Circunferência e círculo	402
A.3	Exercícios	407
	Índice Remissivo	415

Prefácio

A razão não é nada sem imaginação.

1596 – René Descartes – 1650

A geometria plana, em sua essência, nasce de três elementos simples: o ponto, a reta e o plano. Entre todas as figuras que podemos construir a partir deles, o triângulo ocupa posição singular. Três pontos não colineares determinam um plano e, unidos por segmentos de reta, formam a estrutura mais simples e, ao mesmo tempo, a mais rica em propriedades. A partir do triângulo, a imaginação geométrica desdobra-se em polígonos, e, no limite de seus lados, alcança a perfeição da circunferência.

Este texto parte dessa figura elementar para explorar um amplo conjunto de relações, teoremas e construções, tanto clássicas quanto menos convencionais, valorizando o rigor matemático e a elegância das soluções. O texto admite como conhecidos os fundamentos da geometria euclidiana, concentrando-se no estudo sistemático de propriedades e aplicações, frequentemente ilustradas com vários métodos de resolução, entre eles a geometria sintética.

Organizado em quatro capítulos, Triângulos, Quadriláteros, polígonos e circunferência, Complementos e Tópicos especiais, o livro encerra-se com um apêndice de revisão. No primeiro capítulo, logo após as preliminares que vamos precisar no texto, apresentamos o conceito de triângulo junto à nomenclatura a ser utilizada, uma possível classificação, para de imediato, passar à discussão de exercícios resolvidos. Devido ao grande número de propriedades, vamos apresentá-las, bem como com eventuais lemas e teoremas, na medida do possível, junto à sua prova diretamente, ou por meio de exercícios resolvidos ou propostos, deixados a cargo do leitor.

No segundo capítulo, após as preliminares introduzimos o conceito de polígonos, destacando os quadriláteros notáveis, bem como os conceitos

de circunferência e círculo. A partir deste ponto uma série de teoremas serão apresentados, dentre eles, Menelau, Ceva, Stewart, Poncelet, Burlet, das cordas, Ptolomeu, Hiparco e Chadu. Uma lista de exercícios propostos conclui o capítulo.

No terceiro capítulo, introduzimos os conceitos de triângulos pedal e órtico, circunferência ex-cêntrica, transformações, limitadas as translações, rotações e dilatação, simediana e suas propriedades, bem como com o que denotamos de traços auxiliares, discutindo apenas os casos clássicos, dentre eles, triângulos isósceles, ângulos inscrito e semi-inscrito e quadrilátero. O capítulo é concluído com uma lista de exercícios deixada a cargo do leitor.

No quarto capítulo, abordamos: a demonstração do teorema de Pitágoras por meio da trigonometria; o cálculo da razão de áreas de dois triângulos, um tendo seus vértices nos lados do outro, com destaque para os pontos notáveis do triângulo e o triângulo pedal; discussão do teorema de Feuerbach, relacionando-o com a circunferência dos nove pontos; o teorema do círculo de Descartes e finalizamos com simples construções com régua e compasso.

O texto é concluído com um apêndice, denominado **Uma breve revisão**, onde são apresentados os entes geométricos fundamentais, os axiomas/postulados e os cinco postulados de Euclides, bem como recuperados os conceitos de polígonos regulares e seus casos particulares, e circunferência e círculo.

Por fim, ressaltamos que ao longo dos capítulos, o leitor encontrará demonstrações detalhadas, problemas propostos e caminhos para novas investigações, refletindo a convicção de que compreender a geometria é, antes de tudo, aprender a ver com clareza.

Muitas pessoas merecem sinceros agradecimentos por suas contribuições a este trabalho. Diversos colegas, educadores e estudantes ofereceram comentários ou sugestões sobre exercícios específicos e temas aqui abordados. Em nome de todos que apoiaram este empreendimento, ECO expressa especial gratidão aos seus antigos professores e amigos, cuja orientação, encorajamento e colaboração foram essenciais para a realização deste projeto. Sem sua influência, chegar a este ponto não teria sido possível: Giuseppe Arcidiacono (*in memoriam*), Erasmo Recami (*in memoriam*), José Bellandi Filho (*in memoriam*), José Antônio Tenreiro Machado (*in memoriam*) e Waldyr Alves Rodrigues Júnior (*in memoriam*). Ele deseja igualmente manifestar sua profunda gratidão a vários

colegas que o têm apoiado consistentemente ao longo de sua trajetória acadêmica: os Professores Bruto Max Pimentel Escobar, Carlos Braumann, Hamilton Germano Pavão, Jayme Morandi Vaz, Jorge Rezende (obrigado!), Francesco Mainardi (grazie!), Márcio José Menon e Stefano De Leo. Um agradecimento especial é devido à Dra. Wilma Fagundes Figà-Talamanca e ao Sr. Yuri Trafane, ambos apoiadores inestimáveis deste trabalho.

Ele é particularmente grato aos seus ex-alunos — numerosos demais para serem mencionados individualmente — que sempre foram, e continuam sendo, a força motriz por trás de sua vocação como docente. Entre eles, gostaria de destacar dois, que, apesar de terem sido seus alunos apenas em um curso de verão há muitos anos, permanecem queridos amigos e estimados colaboradores: Dr. Quintino Augusto Gomes de Souza e Dr. José Emílio Maiorino. Seu envolvimento contínuo e suas contribuições têm sido de valor imensurável, tanto pessoal quanto profissionalmente.

Agradecimentos especiais são estendidos aos educadores e matemáticos que contribuíram para este trabalho propondo e/ou resolvendo numerosos exercícios, desempenhando, assim, um papel significativo no aprimoramento da qualidade e da profundidade do texto: Cláudio Arconcher, Cláudio Jorge, Cláudio Vidal, Daniel Figueira Faria, Eloy Machado, Fernando Trotta, Gae Sung Lee, Luis Antonio Mesquiari, Luis Antonio Ponce Alonso, Muriel S. Pinto, Rodrigo do Carmo Silva e Vincenzo Bongiovanni.

CN expressa sua sincera gratidão ao Prof. Luiz Márcio Imenes, cuja abordagem pedagógica excepcional e notável expertise o introduziram ao fascinante mundo da geometria — uma área que se tornaria sua paixão, sua profissão e, em última instância, sua vocação ao longo da vida.

Somos profundamente gratos ao Professor Fernando Trotta por sua orientação e ensinamentos desde os estágios iniciais desta trajetória.

Por fim, em nome do Editor José Roberto Marinho, agradecemos a todos da Editora Livraria da Física, pelo competente trabalho que culminou com a edição do texto.

Os Autores.

A figura da capa é de autoria do Prof. Jorge Rezende (autorizou o seu uso) e encontra-se em *Azulejos: Uma aventura matemática*, Figura 13b28.

DOI:10.13140/RG.2.2.32214.56643.

1

Triângulo

A essência da matemática está na sua liberdade.

1845 – Georg F. L. P. Cantor – 1918

Como já mencionado, os fundamentos da **geometria euclidiana** são considerados pré-requisitos essenciais, sobre os quais construiremos os conceitos e resultados que serão desenvolvidos ao longo deste capítulo. Nosso percurso conduzirá, a partir do **triângulo**, gradualmente ao estudo dos **polígonos** e da **circunferência**. Ressaltamos que, no Apêndice A, encontra-se um breve resumo dos conceitos usualmente apresentados no Ensino Fundamental II, de modo a facilitar a recuperação de conteúdos prévios.

Iniciaremos com o estudo detalhado dos **triângulos**, que constituem o foco central deste capítulo e, de certa forma, o alicerce para a compreensão de figuras mais complexas. A partir deles, avançaremos para os **polígonos**, com ênfase especial nos **quadriláteros**, e, posteriormente, trataremos da **circunferência** e do **círculo**.

Durante essa trajetória, o **cálculo de perímetros**, no caso dos **polígonos**, e de **comprimento**, (ainda que se use, também, o termo **perímetro** da **circunferência**) no caso da **circunferência**, será explorado em conjunto com o estudo das **áreas** de figuras planas, que não requerem o uso de

integral. Tais tópicos não apenas possuem relevância prática, mas também revelam a diversidade de métodos com que podem ser abordados, evidenciando a riqueza e a flexibilidade da geometria na resolução de problemas.

Assim, ao mesmo tempo em que revisitamos conceitos clássicos, buscaremos responder a perguntas instigantes: por que certas propriedades se repetem em figuras distintas? Que relações surpreendentes podem surgir ao comparar áreas e comprimentos? Ao final, o leitor perceberá que, mais do que um conjunto de regras, a geometria é um campo vivo de descobertas e conexões.

1.1 Preliminares

Começamos mencionando e definindo conceitos que são considerados rudimentares, mas que reputamos como necessários para que tenhamos todo o material de modo a avançar com o estudo do triângulo, suas propriedades, consequências e eventuais aplicações.

Definição 1.1. TRIÂNGULO/TRILÁTERO. Sejam três pontos A , B e C não colineares. Chama-se triângulo, à figura obtida pela união dos três segmentos, $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$. Figura geométrica que apresenta três lados e três ângulos.

É conveniente introduzirmos a usual notação para o estudo do triângulo. Vamos denotar $\triangle ABC$ de modo a associar ao triângulo de vértices, A , B e C , letras maiúsculas, em geral, para todos os pontos; e de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$, letras minúsculas. É costume utilizar a mesma letra do vértice oposto, digamos A , para chamar o lado de a . Uma ilustração é como na Figura 1.1.

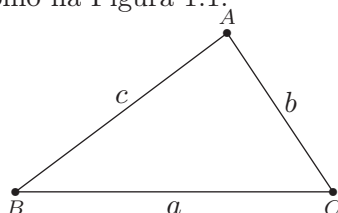


Figura 1.1: Triângulo. Lados, a , b e c e vértices, A , B e C .

Antes de abordarmos as classificações, vamos definir o que se entende por ângulo interno de um triângulo, conceito este que será retomado quando apresentarmos o conceito de bissetriz interna, bem como o respectivo teorema à ela associado.

Definição 1.2. ÂNGULO INTERNO. O menor ângulo formado entre dois lados adjacentes de um triângulo chama-se ângulo interno.

No triângulo temos três ângulos internos, cada um deles relativo ao respectivo vértice, ponto de encontro de dois lados.

Passemos às classificações, associadas aos lados, daí o nome trilátero, e aos ângulos, ligado ao nome triângulo. Primeiro, em relação aos ângulos, pode ser **acutângulo**, os três ângulos internos são agudos; **retângulo**, um dos ângulos internos é reto, ou **obtusângulo**, um dos ângulos internos é obtuso. Agora, em relação aos lados, podemos ter **equilátero**, três lados iguais, apresentam a mesma medida, **isósceles**, dois lados iguais, apresentam a mesma medida, ou **escaleno**, os três lados com medidas diferentes. Algumas possibilidades de conjugar as classificações, são possíveis.

Exemplo 1.1. TRIÂNGULO RETÂNGULO ESCALENO. Um dos ângulos é reto e os três lados apresentam medidas diferentes.

Antes de continuarmos com os triângulos, vamos introduzir mais alguns conceitos envolvendo ângulos para, ao final, apresentarmos o teorema de Tales, associado a um feixe de retas paralelas intersectado por duas retas transversais.

Começamos por introduzir a nomenclatura relativa aos ângulos que se formam quando uma reta é transversal ou secante (corta) a duas retas coplanares. Particular destaque merece o caso em que as duas retas coplanares são paralelas.

Primeiro, para o caso geral, consideremos a Figura 1.2, onde as retas são coplanares, mas não são paralelas. Usamos a notação retas coplanares r e s e por t a reta secante a essas duas retas.

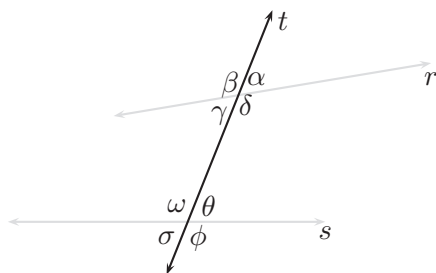


Figura 1.2: Duas retas coplanares cortadas por uma transversal.

Conforme ilustrado na Figura 1.2, são oito ângulos formados, denotados por α , β , γ , δ , θ , ω , σ e ϕ . Vamos introduzir a nomenclatura: ângulos alternos que podem ser tanto internos quanto externos; ângulos

correspondentes; ângulos colaterais, que também podem ser internos e externos, e ângulos opostos pelo vértice.

Alternos	internos – $\gamma, \delta, \theta, \omega$, externos – $\alpha, \beta, \sigma, \phi$,
Correspondentes	α e θ ; β e ω ; γ e σ ; δ e ϕ ,
Colaterais	internos – δ e θ ; ω e γ ; externos – β e σ ; α e ϕ ;
Opostos pelo vértice	$\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$; $\theta = \sigma$; $\omega = \phi$.

No caso em que as duas retas, cortadas pela transversal, são retas paralelas, temos a igualdade de vários dos ângulos. Assim, sejam, então, as retas r e s paralelas. Além da nomenclatura anterior, vale o postulado relativo aos ângulos correspondentes.

Postulado 1.1. ÂNGULOS CORRESPONDENTES. Numa reta secante, t , a duas retas paralelas, r e s , conforme Figura 1.3, ângulos correspondentes são iguais: $\alpha = \theta$; $\beta = \omega$; $\gamma = \sigma$; $\delta = \phi$.

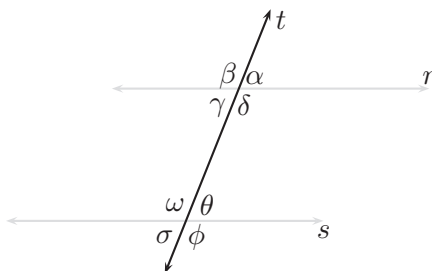


Figura 1.3: Duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Teorema 1.1. ÂNGULOS ALTERNOS. Os ângulos alternos internos ou externos, formados por uma reta secante, t , a duas retas paralelas, r e s , têm a mesma medida. A partir da Figura 1.3 temos: $\gamma = \theta$, $\delta = \omega$, $\alpha = \sigma$ e $\beta = \phi$.

Definição 1.3. Chamam-se ângulos opostos pelo vértice, o.p.v., pares de ângulos, com apenas o vértice em comum, formados pela concorrência de duas retas.

Teorema 1.2. ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE. Ângulos opostos pelo vértice são congruentes, isto é, têm a mesma medida.

Antes de apresentarmos o teorema dos ângulos colaterais, introduzimos as definições relativas aos denominados ângulos complementares e suplementares.

Definição 1.4. ÂNGULOS COMPLEMENTARES. Sejam α e β dois ângulos. Se $\alpha + \beta = 90^\circ$, os ângulos se dizem complementares.

Definição 1.5. ÂNGULOS SUPLEMENTARES. Sejam α e β dois ângulos. Se $\alpha + \beta = 180^\circ$, os ângulos se dizem suplementares.

Teorema 1.3. ÂNGULOS COLATERAIS. Os ângulos colaterais, tanto internos quanto externos, formados por uma reta secante, t , a duas retas paralelas, r e s , são suplementares. A partir da Figura 1.3 valem as seguintes relações: $\delta + \theta = 180^\circ$, $\omega + \gamma = 180^\circ$, $\beta + \sigma = 180^\circ$ e $\alpha + \phi = 180^\circ$.

Por fim, antes de discutirmos um exercício resolvido, vamos apresentar a demonstração de dois teoremas associados aos ângulos alternos internos e aos ângulos correspondentes.

Teorema 1.4. ALTERNOS INTERNOS. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos alternos internos são iguais. Veja a ilustração na Figura 1.4.

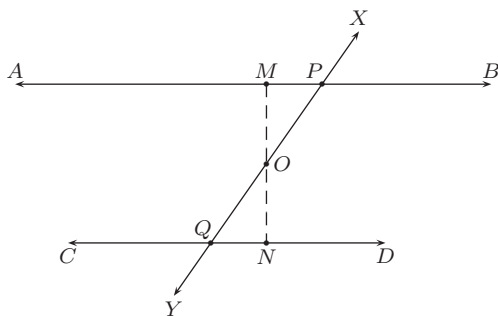


Figura 1.4: Ângulos alternos internos.

Sejam $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ duas retas paralelas cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{XY}$ determinando os pontos P e Q , respectivamente. Demonstrar que vale a igualdade de ângulos $\widehat{APQ} = \widehat{DQP}$.

Prova 1.1. Pelo ponto O , ponto médio do segmento $\overline{PQ}$, traça-se a reta suporte do segmento $\overline{MN}$, perpendicular a $\overline{CD}$,

$$\overline{MN} \perp \overline{CD},$$

pois, se duas ou mais retas são paralelas, toda perpendicular a uma delas é perpendicular às outras.

Agora, os triângulos PMO e QNO são retângulos, pois, por construção, os ângulos $\widehat{OMP}$ e $\widehat{ONQ}$ são retos. Também, temos

$$\widehat{POM} = \widehat{QON}, \quad (\text{o.p.v.})$$

devido ao resultado do **Teorema A.2**. Por hipótese, temos

$$\overline{OP} = \overline{OQ}.$$

Por construção, O é o ponto médio de $\overline{PQ}$, portanto os dois triângulos $PMO = QNO$ são iguais, pois dois triângulos retângulos são iguais se têm iguais, respectivamente, a hipotenusa e um dos ângulos adjacentes a ela, portanto, os ângulos são iguais

$$\widehat{APQ} = \widehat{DQP},$$

o que conclui a prova do teorema. $\square$

Teorema 1.5. ÂNGULOS CORRESPONDENTES. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos correspondentes são iguais, conforme ilustrado na Figura 1.5.

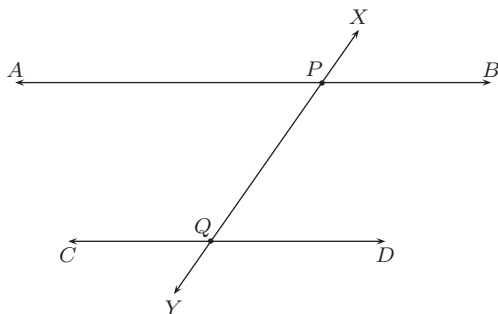


Figura 1.5: Ângulos correspondentes.

Sejam $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ duas retas paralelas cortadas pela transversal, também chamada secante, $\overleftrightarrow{XY}$ nos pontos P e Q , respectivamente. Demonstrar que vale a igualdade de ângulos $\widehat{B\hat{P}X} = \widehat{D\hat{Q}X}$.

Prova 1.2. Pelo resultado do **Teorema A.2** temos $\widehat{B\hat{P}X} = \widehat{A\hat{P}Q}$, bem como $\widehat{A\hat{P}Q} = \widehat{D\hat{Q}X}$, pois, alternos internos são iguais. Portanto $\widehat{B\hat{P}X} = \widehat{D\hat{Q}X}$, pois, duas quantidades iguais a uma terceira também o são entre si, o que conclui a prova. $\square$