

Elementos de Geometria

Plana & Projetiva



CONSELHO EDITORIAL DA LF EDITORIAL

Amílcar Pinto Martins – Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell – Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva – Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes – UNED, Madri

Iran Abreu Mendes – Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford – Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida – Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo – Universidade Estadual Paulista – UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa – Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras – Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia – Universidade de Lisboa

Teresa Vergani – Universidade Aberta de Portugal

Gilson Henrique Junior

Elementos de Geometria

Plana & Projetiva



2026

Copyright © 2026 o autor
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Henrique Junior, Gilson
Elementos de geometria: plana & projetiva / Gilson Henrique Junior. –
São Paulo: LF Editorial, 2026.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-725-0

1. Geometria 2. Geometria plana I. Título.

26-346083.0

CDD-516

Índices para catálogo sistemático:
1. Geometria 516

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



EDITORIAL

LF Editorial

www.livrariadafisica.com.br

www.lfeditorial.com.br

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

Prefácio

A Geometria faz parte da minha vida há muitos anos. Quando pequeno, lembro de meu avô materno me instigando com figuras geométricas e questões de raciocínio e de algumas apostas que fazíamos em troca de pacotes de figurinha. Me lembro de que, em umas férias na cidade de Bebedouro, passei algumas tardes comparando figuras geométricas em busca de alguma diferença. Esse jogo dos sete erros, que me tomou algumas poucas horas de férias, no final da década de 70, nada mais eram senão parte da revisão para alguns de seus últimos livros, volumes de Matemática Elementar para o ensino fundamental. Ele sempre tinha o cuidado de que eu estivesse em contato com a Matemática, através de charadas, brincadeiras e livros e quando já não estava mais presente fisicamente, meu pai assumiu, naturalmente, esse papel. Mais tarde, no fim da adolescência, já de posse de alguns livros de sua vasta biblioteca, me recorde de minha família ir à praia, eu dormia durante o dia, pois havia passado as noites decifrando as demonstrações de novas propriedades geométricas, que eu descobria lendo os *Exercices de Géométrie par F. G. -M.* . Algum tempo depois, na faculdade, descobri que Newton, apesar de ter criado e desenvolvido o *Cálculo*, para que pudesse abordar e resolver algumas das questões mais fundamentais da Física, achou que seria mais convincente, eu digo, mais elegante, justificar suas descobertas com o uso da geometria. *Voilà!* Aí estava todo o respaldo de que eu precisava! Me lembro de importunar professores e colegas com soluções de problemas de Física, através do uso da geometria plana. Como disse, de alguma maneira a geometria sempre esteve presente em boa parte da minha vida. Ela era a minha de linguagem de interpretação da realidade. Me recorde agora de quando descobri a razão harmônica. Percebi que, mesmo onde, aparentemente, não se mantinham relações entre as figuras, ali estava ela, a razão de duas razões que permitia que o cérebro percebesse a diferença e a semelhança entre as várias representações de uma mesma realidade. A forma particular que desenvolvi desde cedo para absorver esse conhecimento, era através do estudo das demonstrações. As estudava em detalhes e depois de um tempo, elas me pertenciam. Era como se tivesse sido minha sua ideia e o raciocínio. Sempre disse aos meus alunos: estudem pelas demonstrações, até que sejam suas. Elas são a resolução do problema original que irá gerar todos os outros. E assim mantenho o dito para os leitores desse livro. Estude-as, em detalhes. É quase como uma engenharia reversa. Entendam, se perguntem e questionem-se se existem outros caminhos possíveis para cada uma delas. Se os encontrarem, sigam por eles e façam novas descobertas!

Esse livro são muitos, uma coleção de ideias e descobertas. A primeira parte, foi escrita no início da década de 90, quando eu procurava uma forma mais formal de introduzir a geometria plana. Em seguida coloquei o que foi uma pequena coleção de teoremas, não tão conhecidos e estudados hoje em dia, que fui colecionando com o tempo. Acrescentei muitos outros, não resisti. Uma coisa vai puxando a outra. Comecei com o bom e velho Pons Asinorum, seguidos pelos Teoremas de Menelau e Ceva, incluindo o Ceva trigonométrico, tão útil na caçada por ângulos ocultos, justificado pelo truque das cotangentes. Vou apresentando e demonstrando sua veracidade, até o Teorema de Morley, uma das joias da geometria recente. Sigo com um breve estudo sobre os quadriláteros, apresentando definições e propriedades muito úteis na arte de resolver problemas. Já a próxima parte, reservei à introdução da divisão harmônica e suas propriedades, seguindo por relações entre pontos e propriedades notáveis necessárias para desenvolver parte da chamada geometria do triângulo, que renasceu nos últimos dois séculos. Abordo boa parte dessas descobertas, terminando com alguns problemas que achei pertinente incluir, como o “Problema das Garrafas Invertidas”, que tem uma ótima conversa com o último teorema de Fermat. Depois, como não poderia faltar, a razão dupla, minha pequena joia e as ideias iniciais da geometria projetiva. Finalmente, o *APÊNDICE*, onde incluí teorias que achei que não seria necessário abordar e estava claramente errado. Assumo assim, desde já, os possíveis erros que possa ter cometido, mesmo tentando verdadeiramente acertar. Para que vocês tenham uma ideia, cada uma das figuras, apesar de serem apenas isso, figuras, procurei construir geometricamente de modo a representarem de modo fiel as propriedades e teoremas que ilustram. É, sem dúvida, uma coleção e tanto para os amantes da geometria, estudantes, pesquisadores e aqueles que se dedicam a olimpíadas de matemática e alguns concorridos vestibulares militares. Desejo a vocês todos uma excelente viagem de estudos e descobertas!

Gilson Henrique Junior (aka Ike Orrico) São Paulo, agosto de 2025

a meu pai,
Gilson Henrique,
minha companheira,
Maria Claudia de Andrade Rosário

a meus avós,
paterno e materno,
Aquilles Henrique e
Carlos Cattony
e a meu irmão, por afinidade,
Odir Alonso Junior

Pela paciência, incentivo e inspiração.

Sumário

1ª Parte: Conceitos Primitivos.....	14
Introdução	15
Conceitos Primitivos	15
Postulados, Axiomas e Teoremas	15
O segmento de reta.....	17
A semirreta.....	17
O semiplano.....	19
O ângulo.....	19
Posição Relativa entre Retas de um mesmo Plano:	23
Triângulos – Definições, Congruência e Desigualdades	25
Definições	25
Congruência	26
Caso Especial.....	32
Desigualdades nos Triângulos	33
O maior ângulo se opõe ao maior lado.....	33
2ª Parte: Teoremas Gerais	36
Pons Asinorum	37
Teorema de Menelau	38
Teorema de Ceva	40
Teorema de Ceva Trigonométrico	43
Truque das Cotangentes	43
Teorema das Cevianas e Transversais nos Triângulos	44
Teorema de Van Aubel (Cevianas)	45
Teorema de Gergonne.....	46
Teorema da Escada	47
a) Proporções	47
b) Teorema de Stengen.....	48
c) Teorema da Escada (Áreas)	49
d) Teorema da Escada \Leftrightarrow Teoremas de Menelau.....	50
Teorema de Routh	51
Teoremas da Borboleta	52
Teorema de Heron ou Herão	54
Correspondência Necessária e Suficiente entre os Teoremas de Herão e Pitágoras.....	55
Teorema de Stewart.....	56
Ceviana de um Triângulo Isósceles.....	57
Ceviana de um Triângulo Isósceles Retângulo	58

Teoremas de Dostor	59
a) Triângulos Retângulos Semelhantes:.....	59
b) Perpendicular pelo ponto médio.....	59
Teorema de Compagnon	60
Teorema da Corda Isogonal.....	61
a) Teorema	61
b) Corolário I.....	61
c) Corolário II	62
Teorema de Steiner-Lehmus.....	63
Teorema de van Schooten	64
Generalização do Teorema de van Schooten	64
Teorema de Pompeiu.....	65
Teorema de Apolônio da Mediana	66
Teorema de Booth	67
Segmentos de Tangente.....	68
Teorema da Bissetriz Interna	69
Divisão da Bissetriz Interna pelo Incentro	70
Teorema da Bissetriz Externa	71
Divisão da Bissetriz Externa pelo Ex-Incentro	72
Teorema de Poncelet.....	73
Teorema de Burlet	74
Triângulo cujos Ângulos estão na razão 1:2	75
Relação de Langley	76
Relações no Quadrilátero Côncavo.....	77
Desigualdade da Hipotenusa do Triângulo Retângulo.....	79
Uma Desigualdade Interessante	80
Teorema dos Pontos Internos ao Triângulo Equilátero	81
a) Ponto interno aos vértices	81
b) Ponto interno perpendicularmente aos lados - “Teorema de Viviani”	83
Teoremas das Flechas.....	84
Teoremas de Carnot	85
Teorema Japonês (Mykami Kayashi).....	88
O Problema de Fermat-Torricelli (séc. XVI).....	89
Teorema de Napoleão.....	92
Teorema de Morley (1899)	95
Pentágono Místico & Os Triângulos de Mustafa Yagci	97
Teorema da Corda Quebrada de Arquimedes	101
Corolário do Teorema da Corda Quebrada	102
Linha de Clivagem em um Triângulo.....	102
Médias nos Trapézios.....	103

Paralelogramo e Teorema de Varignon	105
Teorema de Euler	106
Teorema de Bretschneider	107
Pontos Notáveis nos Quadriláteros	109
Bimediana & Centróide (J)	109
Baricentro	111
Maltitudes ou Alturas Médias de um Quadrilátero	114
Quadriláteros Cíclicos	115
Anticentro (T) – O Ponto de Encontro das Maltitudes no Quadrilátero Inscritível	119
Teoremas de Hiparco ou Ptolomeu	123
Teorema de Viète (Hiparco)	129
Teorema de Packein	130
Teorema de Pappus	131
Teorema dos Pontos Colineares e Inversos	133
Teorema de Brahma-Gupta (Área)	135
Teorema de Parameshvara	136
Quadrilátero de Área Máxima para um Semiperímetro p	137
Quadriláteros Ortodiagonais	138
Teorema de Arquimedes	138
Circunferência de 8 Pontos	139
Teorema de Brahma-Gupta	140
Distância do Centro ao Lado	140
Teorema de Léon Anne	141
Quadriláteros Circunscritíveis	142
Teorema de Pitot	142
Falsa demonstração do recíproco do Teorema de Pitot	143
Teorema de Steiner	144
Teoremas de Newton	146
Quadriláteros Bicêntricos	148
Teoremas de Existência	148
Teorema de Fuss	150
Teorema de Van Aubel (Quadriláteros)	151
Teorema de Thébault	153
Teorema de Bottema	154
Teorema de Marlen	155
a) Teorema	155
b) Outra Demonstração	156
c) Teorema de Marlen no espaço	157
Teorema de Faure	158

3ª Parte: Divisão Harmônica & Geometria do Triângulo	159
Relações entre Pontos e Segmentos Notáveis	160
Fórmulas de Briggs e Outras Relações Importantes.....	160
Relação entre os Cossenos dos Ângulos Internos.....	164
Teorema das Tangentes - Teorema de Viète.....	165
Relações entre Ortocentro & Circuncentro.....	166
Distância entre Ortocentro e Circuncentro.....	167
Distância do Vértice ao Incentro e ao Ex-Incentro.....	168
Distância entre Circuncentro ao Incentro e Ex-Incentro - Teoremas de Euler.....	170
Distância entre Ortocentro & Incentro.....	171
Distância entre Ortocentro & Ex-Incentro.....	173
Distância entre Circuncentro e o Baricentro e Desigualdade de Leibniz.....	174
Desigualdade de Euler.....	175
Teorema de van Aubel aplicado às Cevianas Notáveis.....	176
Segmentos Proporcionais	177
Divisão Harmônica	179
Definição.....	179
Relação de Descartes.....	179
Relação de Newton.....	180
Círculo de Apolônio.....	181
Raio do Círculo de Apolônio.....	182
Divisão Harmônica das Cevianas.....	183
Quadrilátero Completo.....	185
Teorema de Gauss.....	186
Quaterna Harmônica & Feixe Harmônico.....	188
Polo e Raio Polar.....	190
Polo e Raio Polar em relação a uma Circunferência.....	192
Circunferências Ortogonais.....	195
Retas Antiparalelas	197
Circunferência de 9 Pontos	199
Reta de Euler.....	199
Teorema de Feurbach	202
Por Inversão.....	202
Por Pontos Notáveis,.....	203
Triângulos Notáveis	204
Triângulo de Referência.....	204
Mediano, Medial ou Complementar.....	204
Antimediano ou Anticomplementar.....	205
Triângulo Tangencial.....	205
Triângulo de Gergonne & Ponto de Gergonne	206

Triângulo de Ceva e Circunscrito de Ceva.....	206
Triângulo Exincêntrico & Ponto de Nagel	207
Triângulo Pedal ou Podar.....	209
Área do Triângulo Pedal (Euler).....	210
Desigualdade de Erdős-Mordell.....	211
Triângulo Órtico	212
Sobre as Projeções dos Pontos da Altura	214
O Problema de Fagnano (Edmond Brunhes).....	215
Pontos de Miquel	217
Ponto de Miquel no Triângulo	217
Ponto de Miquel no Quadrilátero Completo I (Steiner).....	218
Ponto de Miquel no Quadrilátero Completo II	219
Pentagrama de Miquel	220
Reta de Simson-Wallace.....	221
Reta de Simson-Wallace no Quadrilátero Completo	223
Reta de Simson-Wallace e as Linhas de Clivagem.....	223
Generalização da Reta de Simson-Wallace (Carnot).....	224
Teoremas McKensie	225
Teorema de Aubert.....	228
Cevianas Isogonais	229
Pontos Isotômicos.....	235
Conjugados Isotômicos	235
Pontos de Brocard.....	236
Introdução.....	236
Definição.....	237
Propriedade	238
Conjugados Isogonais	239
A Soma das Cotangentes	240
Cotangente do Ângulo de Brocard	241
Razão dos Quadrados dos Lados	242
Valor Máximo do Ângulo de Brocard	243
Triângulos Circunscritos de Ceva dos Pontos de Brocard	244
Triângulos Pedais pelos Pontos de Brocard.....	245
Circunferência e Triângulos de Brocard.....	246
Construções Geométricas envolvendo os Pontos e Ângulos de Brocard.....	249
Simedianas.....	251
Lugar Geométrico	251
Razões das Distâncias da Simediana aos Lados.....	252
Ponto de Lemoine	253
Encontro das Simedianas Externas.....	255

Divisão da Simediana pelo por K	256
Distâncias e Soma dos Quadrados Mínimos.....	257
Teorema de Grebe (1847)	258
Primeira Circunferência de Lemoine	259
Lados do Hexágono de Lemoine.....	260
Antiparalelas e Simedianas	261
Segunda Circunferência de Lemoine.....	262
Circunferência dos Cossenos	263
Reta de Lemoine	264
Reta de Gergonne	264
Reta de Euler	265
Reta de Steiner.....	265
Reta de Aubert	266
Reta de Nagel	267
Teorema de Nagel.....	267
Teorema de Loriga - Ponto de Bevan.....	267
Reta de Nagel.....	268
Reta de Housel	269
Parte 1: S – G – I	269
Parte 2: I – G – N _a	270
Reta de Housel	270
Reta de Newton-Gauss	271
Circunferência de Taylor (1884)	272
Circunferência de Conway - Teorema de Conway	273
Circunferência de Adams (1843).....	274
Circunferência de Spieker (1862).....	275
Ponto de Spieker e Centro de Clivagem	277
Circunferência de Fuhrmann	278
Triângulo de Fuhrmann	278
Circunferência de Fuhrmann.....	278
Circunferência de Tucker	280
Circunferência de Mannheim	281
Teorema de Terquem	282
Teorema de Blanchet.....	284
O Problema da Construção de um Quadrilátero Inscritível dados seus lados.....	285
O Problema de Regiomontanus.....	286
O Problema das Garrafas invertidas (o autor)	287
O Problema dos Triângulos invertidos (o autor)	288
O Problema dos Dois Globos Oculares	289
O Problema de Pappus.....	290

a) O Problema.....	290
b) Condição de Existência.....	291
c) Variação do Problema de Pappus.....	292
O Problema dos Dois Quadrados (o autor).....	293
4ª Parte: Razão Dupla & Geometria Projetiva.....	294
Razão Dupla, Razão Anharmônica ou Razão Cruzada.....	295
O Círculo Mnemônico e sua Propriedade.....	297
Relação de Euler.....	298
Relação entre os valores da Razão Dupla para um dado Conjunto de Pontos.....	298
Grupo da Razão Dupla ou Cruzada.....	301
Determinação Geométrica de uma dada Razão Dupla (o autor).....	303
Razão Harmônica.....	314
Ponto Impróprio ou Ideal na Divisão Harmônica.....	315
Razão Dupla sobre uma Cônica.....	315
Teorema de Chasles.....	317
Quadrilátero Harmônico.....	318
Perspectividade e Projetividade.....	320
Geometria Projetiva.....	321
Plano Projetivo.....	323
Princípio da Dualidade.....	324
Divisão em Partes Iguais e Ponto Médio Projetivo.....	325
Divisão Perspectiva de um Segmento.....	329
Divisão Perspectiva de uma Caixa Retangular (o autor).....	331
5 Teoremas Importantes de Geometria Projetiva.....	333
1- Teorema de Pappus.....	333
2- Teorema de Desargues.....	334
3- Pequeno Teorema de Desargues.....	335
4- Teorema de Pascal (Hexagrammum Mysticum).....	336
5- Teorema de Brianchon.....	338
APÊNDICE.....	340
Tópicos Adicionais.....	342
Homotetia.....	342
Roto Homotetia ou Semelhança Espiral.....	347
Reta de Apolônio.....	357
Potência de Ponto em relação a uma Circunferência.....	358
Eixo Radical.....	359
Posição Relativa entre duas Circunferências e o Eixo Radical.....	360
Centro Radical.....	361
Inversão (Steiner, 1830).....	362

Polaridade.....	371
Desenvolvimento Alternativo de Chasles	376
BIBLIOGRAFIA	383
ÍNDICE REMISSIVO	387
ANOTAÇÕES.....	391

1ª Parte: Conceitos Primitivos

Elementos de Geometria Plana

Prof. Gilson Henrique Junior (Ike Orrico)

Introdução

Conceitos Primitivos

São conceitos que não podem ser definidos, são idéias intuitivas, primitivas e por essa razão recebem este nome. Os conceitos primitivos relevantes ao nosso trabalho são o ponto, a reta e o plano. Trataremos a seguir de regulamentar a sua representação, tanto algébrica quanto geométrica. Vale ressaltar, que como o próprio nome já diz, estas apenas representam esses entes, o que significa que nunca poderemos realmente desenhar uma reta ou marcar um ponto, pois pela sua própria natureza, estes existem apenas no domínio do abstrato.

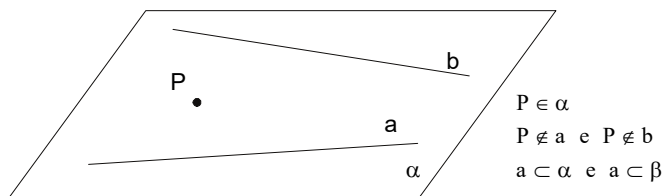
O Ponto – não possui dimensão, é representado algébricamente por uma letra maiúscula do alfabeto latino. Sua representação geométrica é feita ou por uma pequena “bolinha” ou pela intersecção de duas linhas acompanhadas pela letra maiúscula a ele designada.



A reta – possui apenas uma dimensão, o comprimento. É representada algébricamente por uma letra minúscula do alfabeto latino. Sua representação geométrica é feita por um traço, sobre o qual escrevemos a letra a ela designada em uma de suas extremidades.



O Plano – possui duas dimensões, o comprimento e a largura. É representado algébricamente por uma letra do alfabeto grego. Sua representação geométrica é feita pela figura abaixo, escrevendo-se próximo a uma de suas extremidades a letra a ele designada.



Postulados, Axiomas e Teoremas

Na Geometria dedutiva, assim como em qualquer ciência, se faz necessário admitir um conjunto de verdades intuitivas que forma o ponto de partida para a dedução e o desenvolvimento de novas idéias. Esse conjunto de sentenças, por ser primordial, deve ser admitido como verdadeiro sem justificativa, ele deve ter o menor número possível de proposições, para que a partir daí possa se deduzir todo o resto. Cada uma dessas proposições existe independente da outra, isto é, não pode ser deduzida por meio de outra sentença ou por um conjunto delas. Cada uma dessas afirmações recebe o nome de **postulado** ou **axioma**.

Já o **teorema** é uma proposição diferente dos axiomas e postulados, é uma verdade que necessita ser provada. Um teorema é composto pelo sujeito, a **hipótese** ou suposição que se faz sobre o sujeito e a **tese** ou conclusão, que se deduz da hipótese mediante a demonstração. Chamamos ainda de **recíproco ou inverso** de um determinado teorema ao teorema formado trocando-se simultaneamente a hipótese pela tese do primeiro. Além dos teoremas, recebe o nome de **corolário** uma verdade que se apresenta como imediata consequência de um teorema e chamamos ainda **lema** a uma proposição que se estabelece preliminarmente para a demonstração de um determinado teorema.

As formas mais comuns de **demonstração** utilizados na Geometria são:

demonstração direta, consiste de um raciocínio no qual se combinam proposições já estabelecidas, deduzindo seus corolários e partindo diretamente das verdades conhecidas para as que desejamos provar; este método também é conhecido como método sintético ou método dedutivo.

demonstração indireta, consiste em supormos o teorema proposto como falso e combinando isso com proposições já estabelecidas como verdadeiras chegamos a uma contradição com a hipótese,

demonstração por redução ao absurdo¹ (do latim, *reductio ad absurdum*), consiste em provarmos a falsidade de um argumento ao derivarmos dele um absurdo flagrante.

demonstração por superposição consiste em fazer ver que duas figuras sendo convenientemente aplicadas uma sobre a outra, se ajustam perfeitamente em todas as suas partes.

Encontramos nos *Elementos* (por volta de 300a.C.) de Euclides a organização do primeiro conjunto de postulados da Geometria, no entanto esses postulados originais não bastam como fundamento lógico da Geometria dedutiva, assim adotaremos, com algumas modificações, o modelo de Birkhoff². O primeiro grupo de postulados que apresentaremos introduzem a noção de distância e de medida, fundamental para prosseguirmos em nosso desenvolvimento da geometria dedutiva.

1. **Postulado da Distância** – A todo par de pontos corresponde um único número não-negativo.

Sejam A e B dois pontos quaisquer e de acordo com o postulado anterior seja r o número associado a eles, a esse número denominamos distância entre A e B e o denotamos AB, onde, $AB = r$. Dizemos que a distância é nula se e somente se os pontos forem coincidentes.

2. **Postulado da Régua** – Os pontos de uma podem ser colocados em correspondência 1:1 com os números reais de modo que:
 - a. a cada ponto da reta corresponde exatamente um número real;
 - b. a cada número real corresponde exatamente um ponto da reta; e
 - c. a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença dos números correspondentes.

3. **Postulado da Colocação da Régua** – Dados dois pontos A e B de uma reta, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal modo que a coordenada A seja zero e a coordenada de B seja positiva.

Os próximos três postulados são conhecidos como **postulados de incidência**,

4. **Postulado da Reta** – Para cada par de pontos distintos existe uma única reta que os contém.

¹ Diversos textos apresentam a demonstração indireta e a redução ao absurdo como sinônimos, são “procedimentos diferentes porém correlato” (Polya, George. *How to solve it*, Princeton University Press, 1975).

² George David Birkhoff (1884-1944), um dos matemáticos mais produtivos e versáteis do seu tempo, durante a sua vida escreveu cento e noventa trabalhos de pesquisa nos mais diversos ramos da matemática, tanto pura como aplicada. Birkhoff introduziu aos postulados de Euclides a idéia de medida, tanto de segmentos como de ângulos utilizando os números reais. Abaixo transcrevemos os quatro postulados originais criados por Birkhoff:

Postulate I. Postulate of Line Measure. *The points A, B, ..., of any line can be put into 1:1 correspondence with the real numbers x so that $|x_b - x_a| = d(A, B)$ for all points A and B.*

Postulate II. Point-line Postulate. *One and only one line, l, contains any two distinct points P and Q.*

Postulate III. Postulate of Angle Measure. *The half-lines (or rays) l, m, n, ..., through any point O can be put into 1:1 correspondence with the real numbers a (mod 2π) so that if A and B are points (other than O) of l and m, respectively, the difference $a_m - a_l$ (mod 2π) of the numbers associated with lines l and m is $m(AOB)$.*

Postulate IV. Postulate of Similarity. *If in two triangles ABC and A'B'C' and for some constant $k > 0$, $d(A', B') = kd(A, B)$, $d(A', C') = kd(A, C)$, and $m(\widehat{B'A'C'}) = m(\widehat{BAC})$, then also $d(B', C') = kd(B, C)$, $m(\widehat{C'B'A'}) = \pm m(\widehat{CBA})$, and $m(\widehat{A'C'B'}) = \pm m(\widehat{ACB})$.* Fonte: A Set of Postulates for Plane Geometry (Based on Scale and Protractors), G. D. Birkhoff, *Annals of Mathematics*, 33, 1932.

Postulado – Em qualquer reta existem pelo menos dois pontos distintos.

Os pontos que pertencem a uma mesma reta são denominados pontos colineares.

5. **Postulado** – Existem pelo menos três pontos distintos não-colineares.

Um conceito muito importante na geometria é o conceito de **estar entre**, que é definido como segue:

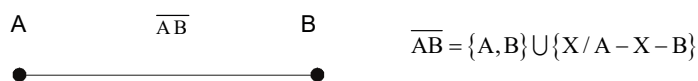
Sejam três pontos, A, B e C, distintos e colineares, se $AB + BC = AC$, dizemos que B **está entre** A e C e notamos por $A - B - C$. Podemos também dizer que quaisquer que sejam os pontos A, B e C são verdadeiras as afirmações:

- I. Se C está entre A e B, então A, B e C são colineares;
- II. Se C está entre A e B, então A, B e C são distintos entre si.
- III. Se C está entre A e B, então A não está entre C e B e nem B está entre A e C.
- IV. Se A é distinto de B, então existe um ponto entre A e B.

Os postulados, as definições e conclusões apresentadas até agora nos permitem definir, o segmento de reta e a medida de seu comprimento.

O segmento de reta

Sejam A e B dois pontos distintos, definimos segmento de reta AB, e o notamos por \overline{AB} , ao conjunto dos pontos formados por A, B e X, de modo que $A - X - B$, onde A e B são chamados de extremidades e X é um ponto interno ao segmento. Definimos ainda a **medida** ou **comprimento** do segmento \overline{AB} como sendo a **distância** entre os pontos A e B, notada por AB. Dois segmentos que tenham a mesma medida são chamados **congruentes**, notaremos a congruência pelo sinal \equiv .



Vale ressaltar que alguns autores denotam o segmento e sua medida de modo contrário ao que foi apresentado, ou seja, notam o segmento de extremidades A e B por AB e a sua medida por \overline{AB} . Ambas as convenções são aceitas, o que se pede é o bom senso de não misturarmos ambas as formas de notar o segmento dentro de um mesmo contexto (exercício, teorema, etc.).

Definimos ainda:

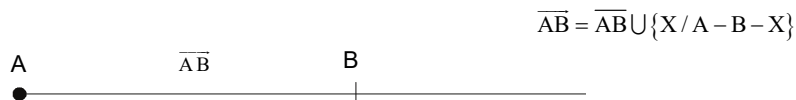
Segmentos consecutivos – são segmentos que possuem uma extremidade comum.

Segmentos colineares – são segmentos contidos em uma mesma reta.

Segmentos adjacentes – são segmentos consecutivos e colineares que possuem apenas uma das extremidades em comum.

A semirreta

Definimos a semirreta de origem no ponto A e que passa por B ao conjunto de pontos formado pela reunião do segmento \overline{AB} com os pontos X de modo que B esteja entre A e X, ou seja $A - B - X$, notamos a semirreta assim definida por \overline{AB} .



Teorema da Localização de Pontos – Seja \overline{AB} uma semirreta e x um número real positivo, então existe um único ponto P em \overline{AB} tal que $AP = x$.

Demonstração:

Pelo **Postulado de Colocação da Régua** existe um sistema de coordenadas para a reta \overline{AB} de modo que a coordenada A seja zero e a coordenada B seja positiva. De acordo com esse sistema de coordenadas, seja ainda P o ponto cuja coordenada no sistema escolhido sobre a reta \overline{AB} seja igual a x . Então pelo **Postulado da Régua**:

$$P \in \overline{AB}, AP = |x - 0| = |x| = x \text{ e } P \text{ é único.}$$

q.e.d.

É usual quando terminamos de justificar ou provar um teorema, encerrarmos a sua prova com a sigla **c.q.d.**, que significa “como queríamos demonstrar”, também pode ser utilizada a sigla **q.e.d.** com o mesmo significado, mas desta vez em latim: *quod erat demonstrandum*, ambas as formas são traduções latinas do grego (Οπερ εδει δειξαι, lê-se: *hoper edei deixai*) e eram encontradas ao final de cada demonstração feita pelos matemáticos da Grécia antiga, como Euclides e Arquimedes entre outros.³

Teorema do Ponto Médio – Dado um segmento \overline{AB} , existe um único ponto M , $A - M - B$ denominado ponto médio do segmento \overline{AB} tal que $AM = MB$.

Demonstração:

Seja o número real positivo r , tal que $r = \frac{1}{2} AB$, pelo teorema anterior sabemos que existe e é único um ponto M

na semirreta \overline{AB} tal que $AM = r$ e como $A - M - B$, temos que $AM + MB = AB$, assim: $MB = AB - AM = AB - \frac{1}{2} AB$

$= \frac{1}{2} AB = AM$. Logo o ponto M existe e satisfaz $AM = MB$. Vamos mostrar agora que M é único:

Seja um ponto N , um outro ponto médio de \overline{AB} e que como tal satisfaça as condições: $AN + NB = AB$ e $AN = NB$.

Dessa forma, teríamos que $2AN = AB$ ou seja $AN = \frac{1}{2} AB$ o que pelo teorema da localização de pontos significaria que os pontos M e N coincidem, concluímos então que o ponto médio do segmento existe e é único.

q.e.d.

Dizemos que um determinado conjunto é convexo, quando para quaisquer dois pontos desse conjunto, o segmento com extremidade nesses pontos está contido no conjunto.

6. **Postulado da Separação do Plano** – Dada uma reta, os pontos que não pertencem a ela formam dois conjuntos disjuntos tais que:
- cada um dos conjuntos é convexo; e
 - se A pertence a um dos conjuntos e B ao outro, então o segmento AB intercepta a reta.

³ É também usual escrevermos, q.e.f. e significa *quod erat faciendum* (o que tinha de ser feito) que vem também do grego (Οπερ εδει ποιησαι, lê-se *hoper edei poiēsai*). É usado não propriamente na conclusão de uma prova, mas de uma ilustração de uma prova. Euclides utilizava essa frase para encerrar proposições que não eram precisamente uma prova, mas uma construção exemplar.