

**O Método Ilustrado de Arquimedes:
Utilizando a Lei da Alavanca para
Calcular Áreas, Volumes e Centros de
Gravidade**



CONSELHO EDITORIAL DA LF EDITORIAL

Amílcar Pinto Martins - Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell - Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva - Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes - UNED, Madri

Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford - Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida - Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Universidade Estadual Paulista - UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa - Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras - Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia - Universidade de Lisboa

Teresa Vergani - Universidade Aberta de Portugal

O Método Ilustrado de Arquimedes: Utilizando a Lei da Alavanca para Calcular Áreas, Volumes e Centros de Gravidade

A. K. T. Assis¹ e C. P. Magnaghi²

Instituto de Física Gleb Wataghin
Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP
Rua Sérgio Buarque de Holanda 777
13083-859 Campinas, SP, Brasil

1 - Homepage: <https://www.ifi.unicamp.br/~assis>

E-mail: assis@ifi.unicamp.br

2 - E-mail: cenopietro@gmail.com

A. K. T. Assis e C. P. Magnaghi



2026

Copyright © 2026 os autores
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Assis, A. K. T.

O método ilustrado de Arquimedes: utilizando a Lei da Alavanca para calcular áreas, volumes e centros de gravidade / A. K. T. Assis, C. P. Magnaghi. – São Paulo: LF Editorial, 2026.

Bibliografia

ISBN 978-65-5563-730-4

1. Arquimedes 2. Cálculo integral 3. Física 4. Geometria 5. Gravidade 6. Matemática
I. Magnaghi, C. P. II. Título.

26-347405.0

CDD-530

Índices para catálogo sistemático:
1. Física 530

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



EDITORIAL

LF Editorial

www.livrariadafisica.com.br

www.lfeditorial.com.br

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora



δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν.

Dê-me um ponto de apoio e moverei a Terra.

Sumário

Nota sobre a Edição Brasileira	5
Agradecimentos	7
1 Introdução	9
2 Os Princípios Físicos do Método de Arquimedes	13
2.1 O Centro de Gravidade	13
2.1.1 Definição do Centro de Gravidade	13
2.1.2 Determinação Experimental do Centro de Gravidade	14
2.1.3 Determinação Teórica do Centro de Gravidade	15
2.2 A Lei da Alavanca	17
3 Arquimedes, o Círculo e a Esfera	19
4 O Método Ilustrado de Arquimedes	29
4.1 Lemas do Trabalho <i>O Método</i>	29
4.2 Demonstração Física do Teorema I: Área de um Segmento de Parábola	30
4.2.1 Importância do Teorema I	36
4.3 Demonstração Física do Teorema II: Volume de uma Esfera	38
4.3.1 Importância do Teorema II	46
4.4 Demonstração Física do Teorema V: Centro de Gravidade de um Segmento de Parabolóide de Revolução	51
4.4.1 Importância do Teorema V	56
5 Conclusão	59
Referências Bibliográficas	65

Nota sobre a Edição Brasileira

Este livro foi publicado originalmente em inglês, português e italiano pela editora canadense Apeiron, estando disponível tanto no formato impresso quanto gratuitamente no formato digital em PDF.¹ Esta nova edição está sendo publicada para facilitar a aquisição deste livro no formato impresso pelos leitores brasileiros. Foram atualizadas e incluídas novas referências bibliográficas. A redação de algumas frases foi melhorada.

As palavras entre colchetes, [], no meio de algumas sentenças foram inseridas para esclarecer o significado dessas frases. Utilizamos o símbolo \equiv para representar uma definição.

A imagem da capa mostra um anjo utilizando uma alavanca para mover a Terra. Ela aparece em uma decoração no teto do Stanzino delle Matematiche da Galleria degli Uffizi (Florença, Itália) pintado por Giulio Parigi (1571-1635) nos anos 1599-1600. Fonte: [Rorsd].

¹[AM12], [AM14] e [AM16].

Agradecimentos

Os autores agradecem a Irineu Bicudo, João Paulo Martins de Castro Chaib, C. Roy Keys, Adolfo Maia Jr., Sandro Guedes de Oliveira, Fernando Jorge da Paixão Filho, Daniel Robson Pinto, Márcio A. A. Pudenzi, Varlei Rodrigues, Chris Rorres e Domingos S. d. L. Soares por comentários, sugestões, referências, figuras, apoio etc. Agradecem também ao Instituto de Física da Unicamp que forneceu as condições necessárias para a realização deste trabalho.

André Koch Torres Assis e Ceno Pietro Magnaghi
Instituto de Física Gleb Watathin
Universidade Estadual de Campinas—UNICAMP
Rua Sérgio Buarque de Holanda 777
13083-859 Campinas - SP, Brasil
E-mails: assis@ifi.unicamp.br e cenopietro@gmail.com
Homepage: <https://www.ifi.unicamp.br/~assis>

Capítulo 1

Introdução

Este livro é uma tradução para a língua portuguesa de uma obra publicada em inglês em 2012, sendo que ela também se encontra disponível em língua italiana.¹

Listamos aqui as obras de Arquimedes (287-212 a.C.) que já foram traduzidas para o português segundo nosso conhecimento atual:

Sobre os Corpos Flutuantes. Livro I.² Livro II.³

Sobre o Equilíbrio dos Planos. Livro I.⁴ Livro II.⁵

O Contador de Areia.⁶

O Método sobre os Teoremas Mecânicos.⁷

A Medida do Círculo.⁸

Stomákhion.⁹

O Problema Bovino.¹⁰

¹[AM12] e [AM16].

²[Ass96] e [Arq24].

³[Arq12] e [Arq24].

⁴[Ass97] e [Arq08].

⁵[Arq04b].

⁶[Arqsd].

⁷[Arq04a], [Mag11], [BF17] e [MA19]. Ver também [AM14].

⁸[GBD21].

⁹[Car21] e [COT23, Anexos A e B].

¹⁰[CO23].

Sobre a Esfera e o Cilindro. Livro I.¹¹

Há ainda um texto pseudo-Arquimediano, ou seja, um texto de um autor anônimo escrevendo sob o nome de Arquimedes como citado por fontes islâmicas:

Sobre os [Corpos] Incidentes em Líquidos.¹²

Uma discussão ampla sobre a vida e a obra de Arquimedes, sobre o conceito do centro de gravidade e sobre a lei da alavanca, contendo muito material histórico, citações de textos originais e reproduções de diversas experiências sobre estes temas realizadas com material de baixo custo pode ser encontrada no livro “*Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*” que está disponível em línguas portuguesa e inglesa.¹³

Em 1906 Johan Ludwig Heiberg (1854-1928), Figura 1.1, filólogo e historiador da ciência, descobriu um texto de Arquimedes cujo conteúdo era até então desconhecido.

O título deste trabalho era conhecido por diferentes nomes: *O Método sobre os Teoremas Mecânicos*,¹⁴ *Soluções Geométricas Obtidas pela Mecânica*,¹⁵ e *O Método para Resolver Problemas Mecânicos*.¹⁶ Vamos denominar esta obra neste livro simplesmente pelo nome de *O Método*.

Esta obra de Arquimedes estava contida em uma carta endereçada ao cientista Eratóstenes (285-194 a.C.). Eratóstenes foi um grande matemático e geógrafo da Grécia Antiga, bibliotecário chefe da grande biblioteca de Alexandria, tendo ficado famoso por sua estimativa precisa do raio terrestre. Nesta carta Arquimedes apresentou um método heurístico para calcular áreas, volumes e centros de gravidade de figuras geométricas utilizando a lei da alavanca.

O objetivo deste livro é apresentar a essência do método de Arquimedes. A análise que apresentamos vai se concentrar nos aspectos físicos destes cálculos. Figuras vão ilustrar todas as alavancas em equilíbrio. Serão enfatizados os postulados utilizados por Arquimedes. Utilizaremos o mínimo de cálculos matemáticos necessários para acompanhar as provas dos teoremas.

¹¹[Gru23].

¹²[Arq14].

¹³[Ass08b], [Ass08a], [Ass11] e [Ass10].

¹⁴[Arc87] e [MA19, pág. 143].

¹⁵[Smi09] e [Arc09].

¹⁶[Arc02a].



Figura 1.1: J. L. Heiberg.

Capítulo 2

Os Princípios Físicos do Método de Arquimedes

2.1 O Centro de Gravidade

2.1.1 Definição do Centro de Gravidade

Arquimedes mencionou o “centro de gravidade” diversas vezes em suas obras que chegaram até nós. Contudo, nos seus trabalhos ainda existentes não há uma definição deste conceito. Esta definição foi provavelmente incluída em um de seus trabalhos que atualmente está perdido. De qualquer forma, a partir da análise de suas obras conhecidas, este conceito poderia ser compreendido da seguinte maneira:¹

O centro de gravidade de um corpo rígido é um ponto tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, tendo liberdade para girar em todos os sentidos ao redor deste ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva sua posição original, qualquer que seja sua orientação inicial em relação à Terra.

¹[Hea21, págs. 24, 301, 350-351 e 430], [Arc87, págs. 17, 47-48, 289-304, 315-316, 321-322 e 435-436], [Arc02b, págs. clxxxi-clxxxii], [Ass08b, Seção 4.9, págs. 90-91] e [Ass10, Capítulo 6, págs. 123-132].

2.1.2 Determinação Experimental do Centro de Gravidade

Pelo que se encontrou nas obras conhecidas de Arquimedes, podemos concluir que ele sabia como determinar experimentalmente o centro de gravidade de qualquer corpo rígido. Na Proposição 6 de seu trabalho sobre a *Quadratura da Parábola*, afirmou o seguinte:²

Todo corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade do corpo estão ao longo de uma mesma linha vertical; pois esta proposição já foi demonstrada.

Infelizmente esta demonstração não chegou até nós em nenhuma das obras conhecidas de Arquimedes.

Esta afirmação sugere um procedimento prático para se encontrar experimentalmente o centro de gravidade de um corpo.³ Suspende-se o corpo por um ponto de suspensão P_1 . Espera-se até que o corpo fique em equilíbrio, em repouso em relação ao solo, traçando-se então, com o auxílio de um fio de prumo, uma reta vertical passando pelo ponto P_1 . Seja E_1 a extremidade do corpo ao longo desta linha vertical, Figura 2.1.

O corpo é então dependurado por um outro ponto de suspensão P_2 que não está ao longo da primeira linha vertical P_1E_1 . Espera-se até que fique em equilíbrio, em repouso em relação ao solo, traçando-se então uma segunda linha vertical através do ponto P_2 com o auxílio do fio de prumo. Seja E_2 uma outra extremidade deste corpo ao longo desta segunda linha vertical. A intersecção das duas linhas verticais, P_1E_1 e P_2E_2 , é o centro de gravidade CG do corpo, Figura 2.2.

Deve ser enfatizado que, de acordo com Arquimedes, este procedimento não era uma definição do centro de gravidade. Em vez de ser uma definição, este resultado de que o centro de gravidade está no cruzamento das verticais passando pelos pontos de suspensão do corpo foi provado teoricamente por Arquimedes utilizando uma definição prévia do centro de gravidade, assim como alguns postulados atualmente desconhecidos.

²[Duh91, pág. 463], [Duh06, pág. 307], [Mug71, pág. 171], [Ass08b, pág. 122] e [Ass10, pág. 124].

³[Ass08b, Capítulo 4] e [Ass10, Capítulo 4].

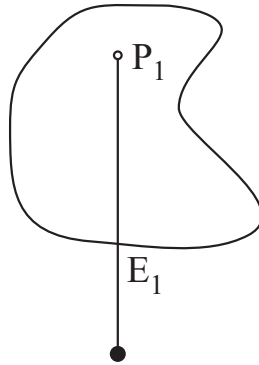


Figura 2.1: Um fio de prumo é utilizado para traçar a linha vertical conectando o ponto de suspensão P_1 até a extremidade E_1 do corpo.

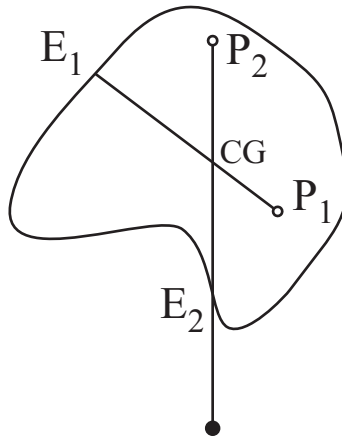


Figura 2.2: A intersecção das duas verticais é o centro de gravidade do corpo.

2.1.3 Determinação Teórica do Centro de Gravidade

Em seus trabalhos Arquimedes calculou o centro de gravidade de figuras filiformes, planas e volumétricas.⁴

⁴[Ass08b, seção 6.2: Resultados Teóricos sobre o Centro de Gravidade Obtidos por Arquimedes] e [Ass10, Seção 6.2: Theoretical Values of Center of Gravity Obtained by

Um de seus postulados mais importantes que utilizou para obter os valores destes centros de gravidade está contido em seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*. É o famoso sexto postulado, a saber:⁵

Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias.

O significado deste sexto postulado tão importante foi esclarecido por Vai-lati, Toeplitz, Stein e Dijkstra.⁶ Por “grandezas a certas distâncias,” Arquimedes se referia às “grandezas cujos centros de gravidade estão às mesmas distâncias do fulcro da alavanca.” Já a expressão “grandezas equivalentes” se referia a “grandezas de mesmo peso.”

Vamos dar um exemplo do que ele quis dizer com este postulado. Suponha que um sistema de corpos mantenha uma alavanca em equilíbrio, parada em relação ao solo. De acordo com este postulado, um certo corpo *A* suspenso pela alavanca pode ser substituído por um outro corpo *B*, sem perturbar o equilíbrio da alavanca, desde que as seguintes condições sejam satisfeitas: (1) O peso do corpo *B* tem de ser igual ao peso do corpo *A*; e (2) a distância do centro de gravidade do corpo *A* até o fulcro da alavanca tem de ser igual à distância do centro de gravidade do corpo *B* até o fulcro da alavanca.

Em seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos* Arquimedes utilizou este sexto postulado para demonstrar a lei da alavanca, assim como para calcular o centro de gravidade de um triângulo e de algumas outras figuras.⁷

Este sexto postulado também será essencial no método de Arquimedes discutido neste livro, Capítulo 4.

Archimedes, págs. 132-136].

⁵[Arc02b, pág. 190], [Dij87, pág. 287], [Ass08b, Seções 6.1, 9.7 e B.2, págs. 122, 201 e 223] e [Ass10, págs. 210-211].

⁶[Ste30], [Dij87, págs. 289-304 e 321-322], [Ass08b, Seção 9.7: A Demonstração da Lei da Alavanca Apresentada por Arquimedes e o Cálculo do Centro de Gravidade de um Triângulo] e [Ass10, Seção 7.1: Archimedes's Proof of the Law of the Lever, págs. 209-215].

⁷Uma discussão detalhada deste trabalho encontra-se em [Ass08b, Seção 9.7: A Demonstração da Lei da Alavanca Apresentada por Arquimedes e o Cálculo do Centro de Gravidade de um Triângulo, págs. 200-208] e [Ass10, Seção 10.7: Archimedes's Proof of the Law of the Lever and Calculation of the Center of Gravity of a Triangle, págs. 209-217].