

LF

EDITORIAL

# ALICE

*no País da*  
DINÂMICA

Sistemas Dinâmicos para o Ensino Médio

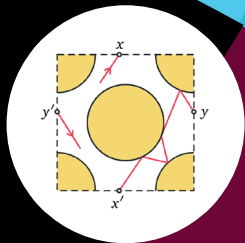
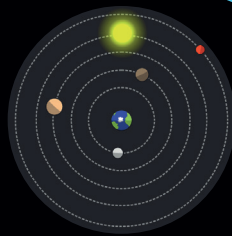
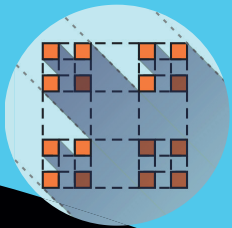
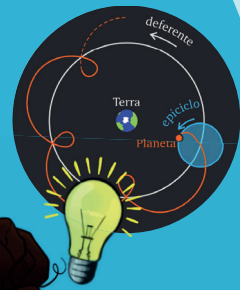
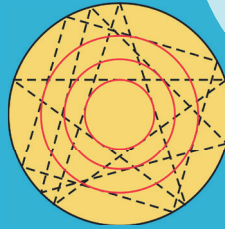
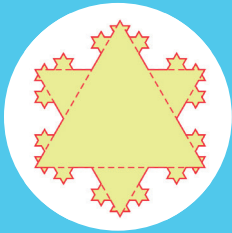
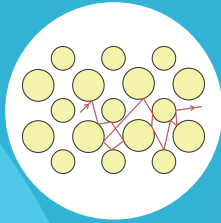
2ª. Edição

SÉRIE

A UNIVERSIDADE  
indo à escola



YURI LIMA





LF

EDITORIAL

# ALICE

*no País da*  
DINÂMICA

Sistemas Dinâmicos para o Ensino Médio

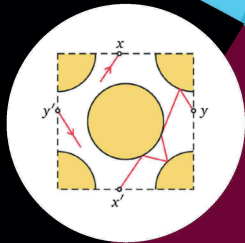
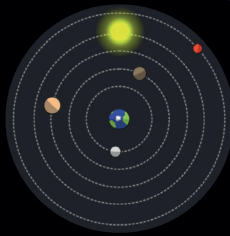
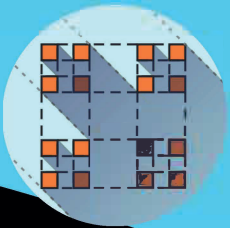
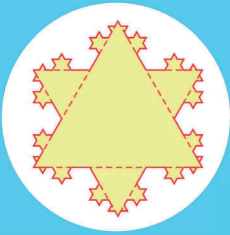
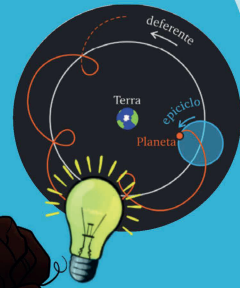
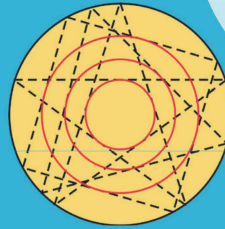
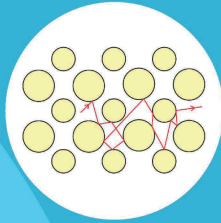
2ª. Edição

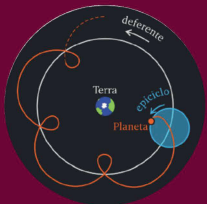
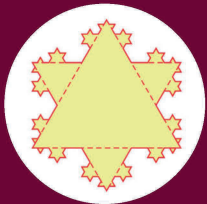
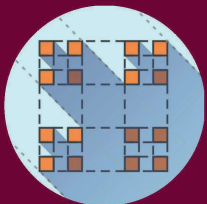
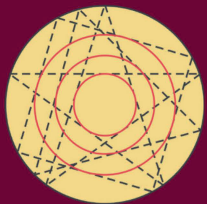
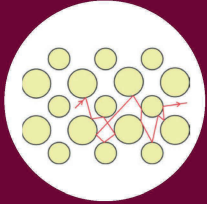
SÉRIE

A UNIVERSIDADE  
indo à escola



YURI LIMA





**Copyright © 2026 Yuri Lima**

**Editores:**

José Roberto Marinho  
Victor Pereira Marinho

**Editoração Eletrônica:**

Horizon Soluções Editoriais

**Projeto Gráfico:**

Ricardo Renan Landim de Carvalho  
Departamento de Física,  
Universidade Federal do Ceará  
Horizon Soluções Editoriais

**Capa:**

Horizon Soluções Editoriais

**Ilustrações:**

Nathália Rebeca de Paiva Pinto

**Figuras Técnicas:**

Raimundo Rodrigues da Silva Filho

**Coordenação:**

Geová Alencar

*Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.*

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Lima, Yuri

Alice no país da dinâmica: sistemas dinâmicos para o ensino médio / Yuri Lima. - 2. ed. - São Paulo: LF Editorial, 2026. - (A universidade indo à escola)

ISBN 978-65-5563-733-5

1. Dinâmica 2. Matemática (Ensino médio) I. Título. II. Série.

26-348165.0

CDD - 510.7

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Matemática: Ensino médio 510.7

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

ISBN: 978-65-5563-733-5

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão do projeto “A Universidade Indo à Escola”, na pessoa do coordenador Geová Alencar. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil • *Printed in Brazil*



**LF Editorial**

Fone: (11) 3815-8688 (Loja do Instituto de Física da USP)

Fone: (11) 3936-3413 (Editora)

[www.livrariadafisica.com.br](http://www.livrariadafisica.com.br) | [www.lfeditorial.com.br](http://www.lfeditorial.com.br)



## CONSELHO EDITORIAL

**Geová Maciel de Alencar Filho**  
Departamento de Física - UFC

**Antonio Gomes de Souza Filho**  
Departamento de Física - UFC

**Adriana Rolim Campos**  
Programa de Pós-Graduação em Ciências Médicas - UNIFOR

**Allana Joyce Soares**  
Departamento de Turismo, Hospitalidade e Lazer - IFCE

**Mairton Cavalcante Romeu**  
Departamento de Física e Matemática- IFCE

**Marcony Silva Cunha**  
Curso de Física - Universidade Estadual do Ceará

**Denise Cavalcante Hissa**  
Departamento de Biologia - UFC

## LIVROS DA COLEÇÃO

**Geová Alencar**  
Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará  
Título: Alice no País da Relatividade  
Subtítulo: Teoria da Relatividade Para o Ensino Médio

**Yuri Brunello**  
Departamento de Letras Estrangeiras, Universidade Federal do Ceará  
Título: Alice no País de Dante e Guimarães Rosa  
Subtítulo: Teorias da Literatura para o Ensino Médio

**Yuri Lima**  
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará  
Título: Alice no País da Dinâmica  
Subtítulo: Sistemas Dinâmicos para o Ensino Médio

## Informações do Projeto



[www.fisica.ufc.br/universidadeindoaescola](http://www.fisica.ufc.br/universidadeindoaescola)



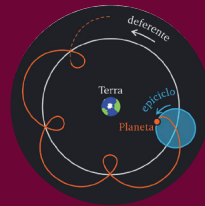
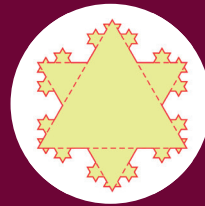
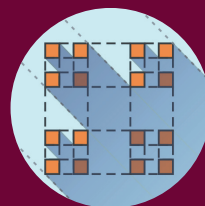
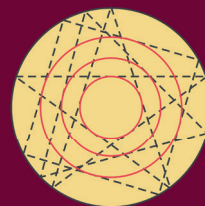
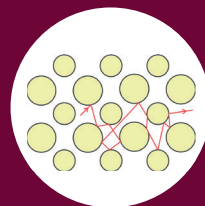
@universidadeindoaescola



[www.youtube.com/@FisicaUFC](https://www.youtube.com/@FisicaUFC)



[indoaescola@fisica.ufc.br](mailto:indoaescola@fisica.ufc.br)



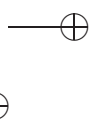
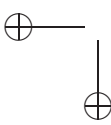
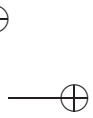
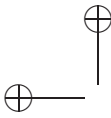




## Agradecimentos

**G**OSTARIA, primeiramente, de agradecer o convite feito pelos organizadores do projeto “A Universidade Indo à Escola” para a elaboração do livro, no nome dos membros Antônio Gomes de Souza Filho, Makarius Oliveira Tahim, Denise Cavalcante Hissa, Adriana Rolim Campos e Geová Alencar, este último o idealizador e grande incentivador do projeto. Agradeço aos financiadores do projeto: a Secretaria da Ciência, Tecnologia e Educação Superior (Secitece), a Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap), o Programa Cientista-Chefe em Educação Básica do Estado do Ceará, o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), a Sociedade Brasileira de Física (SBF) e a Pós-Graduação em Física e a Pró-Reitoria de Extensão, ambos da UFC. Adicionalmente, agradeço à Pós-Graduação em Matemática da UFC, que fornece condições excelentes de trabalho e desenvolvimento de pesquisa. Duas pessoas tiveram um papel fundamental na qualidade gráfica do livro, e assim agradeço a Nathália Rebeca de Paiva Pinto e a Raimundo Rodrigues da Silva Filho. Obrigado por aguentarem as infinitas conversas sobre a melhor maneira de fazer as figuras.

A elaboração deste livro foi feita com muito esmero e cuidado, em uma linguagem não técnica, acessível a alunos de Ensino Médio. Agradeço a meus colegas de profissão que leram o manuscrito e forneceram diversas sugestões e melhorias à organização e escrita, dentre eles Antonio Caminha Muniz Neto, Carlos Gustavo Moreira (Gugu) e Carlos Matheus Silva Santos, e também a meu aluno de iniciação científica, João Guilherme Costa Viana, que forneceu várias melhorias aos primeiros capítulos, na ótica de um aluno.

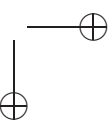
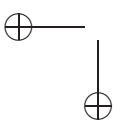
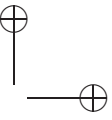
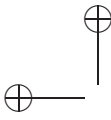




## Prefácio

**A**LICE NO PAÍS DA DINÂMICA é um livro com características muito difíceis de serem encontradas, que expõe ideias científicas sofisticadas de uma forma agradável e acessível a alunos do Ensino Médio. O livro contém informações valiosas e extremamente interessantes sobre a história da Ciência e da Matemática em particular, incluindo problemas clássicos, cuja história percorre vários milênios até os dias de hoje (e ainda está longe de ser concluída), como o estudo dos números primos, dos bilhares e do movimento dos corpos celestes. Mas não fica nisso: ele também discute como funcionam as demonstrações em Matemática, e apresenta alguns assuntos avançados, como fractais e o conjunto de Cantor, de maneira matematicamente precisa, demonstrando alguns resultados surpreendentes (como a caracterização da soma do conjunto de Cantor com ele mesmo). Por essas razões, o livro será uma referência extremamente valiosa para todos os estudantes interessados em Matemática, que desejam ter uma introdução acessível e de muito bom gosto a áreas modernas de pesquisa, com uma história rica e fascinante.

*Carlos Gustavo Moreira (Gugu) | Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Brasil*





# Sumário

<b>1</b>	<b>O que é a Matemática</b>	<b>13</b>
1.1	Padrões	14
1.1.1	A máquina Enigma	16
1.2	Conjecturas	17
1.2.1	Números primos e a Conjectura de Goldbach	19
1.3	Axiomas	20
1.3.1	Os axiomas de Euclides	22
1.3.2	O postulado das paralelas e geometrias não-euclidianas	26
1.4	Provas	29
1.4.1	Prova direta	31
1.4.2	Prova por contraposição	33
1.4.3	Prova por contradição	34
1.4.4	Prova por indução	34
1.4.5	Prova geométrica	38
1.4.6	Um exemplo importante: progressões geométricas infinitas	43
1.4.7	Prova assistida por computador	46
1.4.8	Teorema da Incompletude de Gödel	48
<b>2</b>	<b>Sistemas Dinâmicos: a origem</b>	<b>49</b>
2.1	O Universo e o movimento dos planetas	50
2.1.1	Olhando longe para enxergar perto	50
2.1.2	O modelo de Ptolomeu	52
2.1.3	O modelo de Copérnico	54
2.1.4	Kepler e as elipses	55

2.1.5	Newton e as forças gravitacionais . . . . .	56
<b>2.2</b>	<b>A descoberta de Poincaré . . . . .</b>	<b>58</b>
2.2.1	Estabilidade do Sistema Solar . . . . .	58
2.2.2	Rei Oscar II e Acta Mathematica . . . . .	59
2.2.3	O erro de Poincaré: da estabilidade ao caos . . . . .	61
2.2.4	Efeito borboleta ou sensibilidade às condições iniciais . . . . .	62
<b>2.3</b>	<b>Um exemplo introdutório: família quadrática . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>3</b>	<b>Bilhares . . . . .</b>	<b>69</b>
3.1	A sinuca . . . . .	70
3.2	Bilhares não-caóticos . . . . .	73
3.2.1	Bilhar no círculo . . . . .	73
3.2.2	Bilhar na elipse . . . . .	75
3.2.3	Bilhar no retângulo . . . . .	79
3.2.4	Ótica e indício de caos . . . . .	84
3.3	Bilhares caóticos . . . . .	86
3.3.1	Bilhares de Sinai . . . . .	86
3.3.2	Bilhares de Bunimovich . . . . .	89
3.3.3	Bilhares tridimensionais . . . . .	91
3.4	Modelos físicos de bilhares . . . . .	92
3.4.1	Bilhares em mecânica estatística . . . . .	92
3.4.2	O movimento de um elétron em um metal . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Fractais . . . . .</b>	<b>97</b>
4.1	Fractais na natureza . . . . .	97
4.2	Conjunto de Cantor . . . . .	99
4.2.1	$K + K = [0, 2]$ . . . . .	102
4.2.2	Definição dinâmica de $K$ . . . . .	107
4.3	Outros exemplos de fractais . . . . .	108
4.3.1	Triângulo de Sierpinski . . . . .	108
4.3.2	Floco de neve de Koch . . . . .	110
4.3.3	Conjunto de Mandelbrot . . . . .	112
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>114</b>



## 1. O que é a Matemática

*A Matemática é, sem dúvida, a ciência mais universal que existe. Ela está presente em todos os lugares, independente de idioma, política, religião e até mesmo time de futebol.*

**S**egundo o Google, “Matemática é a ciência do raciocínio lógico e abstrato, que estuda quantidades (teoria dos números), espaço e medidas (geometria), estruturas, variações e estatística”. Essa definição é bem abstrata, e por enquanto não contribui para nosso entendimento além do que já entendemos como matemática.

A verdade é que, desde pequenos, temos uma noção intuitiva que já pode ser considerada matemática. Talvez o primeiro contato de um bebê com a Matemática seja quando seus pais ensinam a contar. Memorizamos a sequência um, dois, três, quatro, cinco e vai por aí, sem mesmo sabermos qual seu significado. Essa introdução de **linguagem** é, posteriormente, utilizada quando fazemos uma contagem real, por exemplo quando enumeramos a quantidade de laranjas dispostas na dispensa: uma laranja, duas laranjas, três laranjas, quatro laranjas, cinco laranjas e vai por aí. Tal contagem, naturalmente, passa a ser utilizada em outros contextos, para contar outras frutas e outros objetos. Desse modo, a noção de contagem é abstraída para diversas situações, e aí é quando a Matemática passa a se universalizar em nossas vidas.

A Matemática tem raízes profundas em várias culturas antigas, incluindo a egípcia, a babilônica e a grega. No Egito, por exemplo, a necessidade de medir terras após as cheias anuais do rio Nilo levou ao desenvolvimento de técnicas matemáticas rudimentares. Nessa direção, o filósofo Heródoto acreditava que a geometria (uma das áreas da matemática) foi criada pela necessidade de redeterminar as fronteiras de terrenos após as cheias do rio Nilo.

Cabe aqui contrastar dois pontos de vista sobre a origem da matemática, de **Platão** e **Aristóteles**. Platão via a Matemática como uma ferramenta gerada por uma natureza divina cujo objetivo era acessar verdades eternas e universais. Aristóteles, por sua vez, via a Matemática como uma criação humana, cujo objetivo era desenvolver uma ciência prática e teórica que desempenhasse um papel importante na compreensão do mundo natural.

Por mais que diversos filósofos, matemáticos e até o Google tentem, não há na verdade uma definição consensual para a matemática, dada sua vasta amplitude. Com o passar dos séculos, a Matemática foi se desenvolvendo e, hoje em dia, ocupa a nossa vida diária de um modo que nem imaginamos. Desde uma simples transação bancária a um cálculo de taxa de serviço em um restaurante (os famosos 10%), a Matemática se torna cada vez mais necessária.

De tão antiga e vasta história, poderíamos dedicar todo esse livro apenas à origem da matemática, mas esse não é nosso objetivo. Neste capítulo, nossa meta é introduzir a linguagem natural da matemática, que envolve alguns conceitos, conforme passaremos a discutir. Levando em conta que, para a maioria dos alunos de Ensino Médio, a Matemática é mais vista como uma disciplina com inúmeras fórmulas complicadas, que devem ser memorizadas para se obter sucesso nas avaliações ao longo do ano, tentaremos fazer uma introdução sobre os conceitos básicos da matemática, fornecendo muitos exemplos. Posteriormente, nos capítulos seguintes, discutiremos sobre uma área da matemática, relativamente recente, chamada **sistemas dinâmicos**.

Do ponto de vista técnico, o trabalho matemático consiste em identificar **padrões**, de modo a formular **conjecturas** e prová-las, utilizando-se dos **axiomas** básicos e de seus desdobramentos.

## 1.1 Padrões

Em matemática, um **padrão** é uma regularidade ou repetição observada em algum contexto, seja em um conjunto de números, sequências numéricas, formas geométricas ou objetos. Pela vastidão de possibilidades, padrões matemáticos podem assumir várias formas.

Os padrões podem ser visualizados, descritos ou representados de várias maneiras. Identificar e compreender padrões é fundamental na resolução de problemas matemáticos e na formulação de conjecturas (as conjecturas serão discutidas na próxima seção). Os matemáticos frequentemente exploram padrões para inferir propriedades, desenvolver teorias e construir modelos. Além disso, padrões matemáticos também têm aplicações em diversas áreas da ciência, engenharia, tecnologia e até mesmo em campos como a economia e a biologia.

Alice, após ler a descrição acima sobre padrões, liga para seu amigo Bob, e busca ajuda para desvendar um padrão de uma sequência de números:

**A:** – Olá Bob, tudo bem? Estou tentando entender essa noção de padrão. Você poderia me ajudar?

**B:** – Olá Alice, estou bem, obrigado. E você? Claro que posso ajudar, pois já estudei essa parte e acho que entendi.

**A:** – Eu também estou bem, obrigada! Se começarmos com o número 2, depois 4, depois 6, depois 8, depois 10, depois 12, podemos afirmar que eles seguem um padrão?

**B:** – Sim, esse representa um exemplo de padrão. Observe que para passar de 2 para 4, somamos duas unidades; para passar de 4 para 6, somamos duas unidades; para

## 1.1 Padrões

15

passar de 6 para 8, somamos duas unidades; para passar de 8 para 10, somamos duas unidades; e, finalmente, para passar de 10 para 12, somamos duas unidades. Assim, há um padrão em que o próximo número é sempre duas unidades a mais do que o número anterior. Entendeu? – Pergunta Bob.

A: – Ah, acho que entendi! Então, se eu seguir o padrão, o próximo número depois de 12 será 14, depois 16, e assim por diante?

B: – Exatamente! O padrão se repete e, ao desvendá-lo, você pode deduzir quais os próximos números.

A: – Nossa Bob, eu sempre escutava sobre esse conceito de “padrão”, e não sabia que ele era tão simples de entender! Obrigada!

B: – Sim, Alice. Muitos conceitos matemáticos são considerados complicados, mas quando explicados nós percebemos que eles não são esse bicho de sete cabeças. E, mais ainda, eles estão aqui para nos ajudar! No seu caso, você conseguiu descobrir os próximos números.

A: – É verdade! Até mais.

B: – Até mais, Alice.

Identificar padrões é o primeiro passo para uma descoberta matemática. No exemplo acima, os números aparecem de dois em dois, formando a sequência dos números pares

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots$$

Poderíamos, a partir de quaisquer números  $a$  e  $r$ , formar uma sequência de números de modo similar ao acima, começando com o número  $a$  e adicionando  $r$  unidades a cada novo número. Essa sequência, de tão especial e útil que é, recebe um nome especial.

**Definição 1.1 — Progressão aritmética.** Dados números  $a, r$ , geramos a **progressão aritmética (PA)** formada pelos números

$$a, a + r, a + 2r, a + 3r, a + 4r, a + 5r, a + 6r, \dots$$

O número  $r$  adicionado a cada passo é chamado de **razão** da PA.

**Exercício 1.1** O conjunto dos números ímpares

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

forma uma PA? [R: Sim] ■

Ao invés de somar um mesmo número a cada passo, uma outra maneira de gerar um padrão entre números consiste em multiplicar um mesmo número. Alice está curiosa com esse tipo de padrão:

A: – Oi Bob, agora tenho um padrão que acredito ser diferente do anterior. Começo com o número 1, depois 2, depois 4, depois 8, depois 16, depois 32. Eu percebi que a diferença entre os números vai ficando cada vez maior, mas eu não consigo identificar qual padrão eles seguem.

**B:** – Verdade, Alice, as diferenças aumentam. Mas note que, para passar de 1 para 2, multiplicamos por 2; para passar de 2 para 4, multiplicamos por 2; para passar de 4 para 8, multiplicamos por 2; para passar de 8 para 16, multiplicamos por 2; e para passar de 16 para 32, também multiplicamos por 2. Então o padrão é que o próximo número sempre é o dobro do anterior.

**A:** – Certo! Então o próximo número seria 64?

**B:** – Acho que você entendeu! E depois 128, 256 e vai por aí.

**A:** – Quer dizer que o padrão pode ser uma mesma soma ou uma mesma multiplicação?

**B:** – E não apenas isso! Pode ser qualquer método que você identifique. O padrão pode ser a combinação de várias operações matemáticas, bem como outros contextos.

**A:** – Se pode ser qualquer coisa, como eu vou saber o que é?

**B:** – Aí é que está a dificuldade de encontrar padrões! Como pode ser qualquer coisa, identificá-lo pode ser uma tarefa bastante complicada.

E de fato pode ser. Antes de passar a exemplos mais complicados, vamos introduzir o último padrão considerado por Alice e Bob, que terá grande importância no decorrer do texto.

**Definição 1.2 — Progressão geométrica.** Dados números  $a, r$ , geramos a **progressão geométrica (PG)** formada pelos números

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, \dots$$

Cada novo número é a multiplicação do anterior por um mesmo número, chamado de **razão**.

**Exercício 1.2** Os números pares 2, 4, 6, ... formam uma PG? [R: Não] ■

**Exercício 1.3** Escreva os seis termos iniciais da PG definida por  $a = \frac{1}{24}$  e  $r = 2$ . [R:  $\frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ ] ■

### 1.1.1 A máquina Enigma

A **máquina Enigma** é um marco notável na história da Segunda Guerra Mundial. Desenvolvida na Alemanha durante os anos 1920, a Enigma foi uma sofisticada máquina projetada para enviar comunicações seguras entre membros das forças armadas alemãs. As mensagens eram enviadas de modo criptografado, utilizando um complexo mecanismo de embaralhar as letras. Para decifrá-las, era necessário saber um código, que definia a posição inicial da máquina. Portanto, mesmo que a mensagem fosse interceptada por inimigos, eles não conseguiam decifrar a mensagem porque não sabiam o código decifrador.

Por vários anos, e em particular nos primeiros anos da Segunda Guerra Mundial, a máquina Enigma foi utilizada para enviar mensagens entre os alemães, permitindo-os que se comunicassem de maneira aparentemente segura.



Figura 1.1 – Máquina Enigma.  
Fonte: <https://bit.ly/3vHdfjH>

Percebendo a dificuldade em desvendar os planos do inimigo, outros países europeus devotaram esforços em tentar entender os padrões das mensagens cifradas, e de que modo esses padrões poderiam ser usados para decifrar as mensagens. Imagine se isso fosse realizado: os inimigos dos alemães poderiam saber onde ocorreriam os próximos ataques, quantos soldados participariam, e quais eram os pontos fracos.

Poloneses e ingleses possuem um papel de destaque nessa história. Ao longo da guerra, os ingleses, liderados por Alan Turing, desenvolveram um trabalho árduo e técnicas inovadoras para identificar padrões e, finalmente, desvendar os segredos enviados nas mensagens alemãs. Essa descoberta contribuiu significativa-

mente para o curso da guerra, e para a derrota dos alemães. Ademais, esse trabalho sedimentou as bases teóricas para a criação dos computadores. Surpreendente, não?!

## 1.2 Conjecturas

Uma **conjectura** é uma suposição ou afirmação baseada em observações iniciais e/ou evidências limitadas, que se acredita ser verdadeira mas ainda não está verificada ou provada formalmente. Baseados nas observações iniciais de uma situação, podemos observar algum padrão e a partir disso conjecturar o que deve ser verdade.

As conjecturas desempenham um papel extremamente importante em Matemática, pois representam o direcionamento do que deve ser verdade e, portanto, investigado. Os matemáticos frequentemente formulam conjecturas com base em padrões observados, exemplos específicos ou intuições, e então trabalham para provar ou refutar essas conjecturas, por meio de métodos lógicos e rigorosos.

O processo de formular conjecturas requer grande perspicácia e observação pois, muitas vezes, mesmo identificando o padrão, é difícil entender o que deve ser verdade e o que não deve. De certo modo, conjecturar é dar o chute em uma bola em um quarto pouco iluminado. Há alguma iluminação, que surge das observações, mas a maioria do quarto é escura pois não sabemos ainda o que é verdade (apenas temos uma vaga ideia do que deve ser verdade). Nessa direção, a intuição e treinamento exercem um papel de suma importância. Não é de se esperar que uma pessoa pouco treinada possa formular conjecturas precisas e profundas, pois isso só se adquire com o tempo e a experiência.

Bem, por enquanto nossa discussão está muito filosófica. Então vamos a um exemplo, no contexto das progressões aritméticas. Como vimos na seção anterior, dados

dois números  $a, r$ , formamos a progressão aritmética  $a, a + r, a + 2r, a + 3r, a + 4r, \dots$ . Nessa ordem, vamos chamar  $a$  de primeiro termo,  $a + r$  de segundo termo e vai por aí.

**B:** – Olá Alice, agora que ambos sabemos o que é uma PA, eu estou curioso. Consigo escrever os primeiros termos da PA, mas gostaria de entender quem é seu  $n$ -ésimo termo, sem ter que escrever todos os elementos anteriores.

**A:** – Hum Bob, essa é uma pergunta interessante. Será que isso é possível?

**B:** – Acho que sim. Agora que sabemos o padrão de formação dos termos, devemos ser capazes. O que você acha?

**A:** – Pensando um pouco, eu tenho uma conjectura! Observe que o primeiro termo é  $a + 0 \cdot r$ , o segundo termo é  $a + 1 \cdot r$ , o terceiro termo é  $a + 2 \cdot r$ . Ou seja, estamos sempre somando um múltiplo anterior de  $r$ . A minha conjectura é que o  $n$ -ésimo termo é  $a + (n - 1) \cdot r$ .

**B:** – Faz sentido, Alice. Como podemos saber se isso é realmente verdade? O que fazemos agora?

**A:** – Bem, agora continuamos a ler o livro, pois nas próximas seções vamos entender o que fazer depois que formulamos a conjectura!

E assim Alice se despede de Bob. Veja que, baseada em observações iniciais e compreensão do padrão, Alice “deduziu” o que deve ser verdade para todos os termos da PA. A conjectura que ela formulou é, até o momento, nada mais do que um chute, sem comprovação formal. Seguindo a mesma linha de ideias, agora é sua vez de formular uma conjectura.

**Exercício 1.4** A PG gerada a partir dos números  $a, r$  tem termos iniciais  $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ . Conjecture qual deve ser a fórmula do  $n$ -ésimo termo dessa PG. [R:  $ar^{n-1}$ ] ■

Vamos a outro exemplo. Alice é muito observadora, e percebeu que em dias de Sol o carro da polícia passa à frente da sua casa uma vez por hora, às 8:15, depois às 9:15 e vai por aí. Por outro lado, em dias de chuva, o carro passa a cada 70 minutos, às 8:15, depois às 9:25 e vai por aí. Baseada na observação desse padrão, Alice tem a seguinte conjectura:

**Conjectura:** Hoje está chovendo, logo o carro da polícia vai passar na frente da minha casa às 16:25.

Baseada no intervalo de tempo que ela observou empiricamente, em dias de Sol e chuvosos, Alice conjecturou que a afirmação acima seja verdade. Essa conjectura faz sentido, pois se nada der errado (continuar chovendo, o pneu não furar, não houver nenhuma ocorrência urgente), o carro da polícia passará na frente da casa de Alice nos horários abaixo:

8 : 15, 9 : 25, 10 : 35, 11 : 45, 12 : 55, 14 : 05, 15 : 15, 16 : 25, ...

### 1.2.1 Números primos e a Conjectura de Goldbach

$$\begin{array}{r|l} n & d \\ (0) & q \end{array}$$

Para explicar o que significa a Conjectura de Goldbach, vamos relembrar rapidamente a noção de múltiplos e divisores. Considere dois números naturais  $d, n$ . Dizemos que  $d$  é um **divisor** de  $n$  ou que  $n$  é um **múltiplo** de  $d$  se, ao realizarmos a divisão de  $n$  por  $d$ , encontramos 0 como resto (ou seja, a divisão não tem sobras).

Sendo assim, 1 divide todo número  $n$ . Ademais,  $n$  divide ele próprio. Essa observação nos leva à definição de números primos, que são aqueles que, de certo modo, possuem o menor número possível de divisores.

**Definição 1.3 — Número primo.** Dizemos que um natural  $n > 1$  é um **número primo** se ele possui apenas 1 e  $n$  como seus divisores.

Note que requeremos que  $n > 1$ . Logo, por convenção, o número 1 **não** é primo. Os primeiros números primos são os seguintes:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \dots$$

Podemos dizer que os números primos são os tijolos básicos para a construção de todos os números naturais. Dessa forma, sua origem está ligada ao desenvolvimento da Matemática. Civilizações antigas, como os egípcios, babilônios, gregos e indianos, tinham conhecimento dos números primos. Por exemplo, no Egito Antigo, os números primos eram utilizados para fins práticos, como a medição de terras e divisões justas de alimentos. Na Grécia Antiga, o filósofo-matemático Euclides, em seu trabalho "Elementos", forneceu uma das primeiras abordagens sistemáticas para o estudo dos números primos. Euclides provou<sup>1</sup> que existem infinitos números primos e desenvolveu várias propriedades básicas relacionadas a eles.

Ao longo dos séculos, os números primos passaram a desempenhar um papel cada vez mais fundamental na Matemática, com aplicações em variadas áreas da ciência, da tecnologia e da vida cotidiana. Isso ocasionou um grande interesse em compreender sua estrutura e propriedades. Hoje em dia, sabemos muitas informações dos números primos.

Embora saibamos, desde Euclides, que existem infinitos números primos, exibi-los é uma tarefa árdua, mesmo para os computadores mais modernos. No momento da escrita desse livro, o maior número primo conhecido é

$$2^{82.589.933} - 1$$

que possui 24.862.048 dígitos. Ele foi descoberto em 2018 por Patrick Laroche, que faz parte de um grande time internacional de busca de primos, chamado “Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)”.

Vamos discutir uma conjectura sobre primos, até hoje não solucionada. Ela se chama **Conjectura de Goldbach**, e é um dos problemas mais famosos e antigos da

<sup>1</sup>Ainda não sabemos o que é uma prova, que será discutida na Seção 1.4.

Matemática. Ela foi formulada pelo matemático prussiano Christian Goldbach em uma carta que ele escreveu ao matemático suíço Leonhard Euler em 1742. A conjectura afirma o seguinte.

**Conjectura de Goldbach:** Todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos.

Em outras palavras, Goldbach conjecturou que cada número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Por exemplo, o número 4 pode ser escrito como  $2 + 2$ , onde ambos os números 2 são primos; o número 10 pode ser escrito como  $3 + 7$ , onde ambos os números 3,7 são primos; o número 32 pode ser escrito como  $13 + 19$ , onde ambos os números 13,19 são primos.

Apesar de sua simplicidade aparente, a Conjectura de Goldbach é um tema extremamente difícil de pesquisa atual. Embora muitos matemáticos brilhantes estudaram-na, ela permanece sem solução.

É óbvio que não podemos checar a veracidade da conjectura primo por primo pois, relembre, existem infinitos números primos! Mas podemos buscar padrões e evidências para ter indícios de sua veracidade. Com o auxílio de computadores, a conjectura foi verificada empiricamente para uma grande quantidade de números pares até valores extremamente altos. Quanto mais números pares são verificados, maior é a confiança na conjectura, mas isso não diz que a conjectura está mais perto de ser verificada. Isso fornece apenas mais indícios de que ela é verdadeira.

A Conjectura de Goldbach é uma das grandes questões em aberto da matemática, e sua resolução teria implicações profundas para a compreensão dos padrões das distribuições de números primos. Várias ideias, técnicas e abordagens têm sido propostas ao longo dos anos, mas até agora, ela permanece como um desafio significativo para matemáticos de todo o mundo.

## 1.3 Axiomas

Para procedermos à verificação das conjecturas, confirmando-as ou refutando-as, devemos antes determinar quais são as regras do jogo: quais as ferramentas de partida que poderemos utilizar para investigar as conjecturas?

Ao longo dos anos de Ensino Fundamental e Médio, somos expostos indiretamente a muitas dessas regras sem mesmo saber. Por exemplo, qualquer criança responde que a soma  $1 + 1$  é igual a 2. Essa informação é, para nós, uma verdade incontestável, mas se pararmos para pensar, podemos questionar de onde essa conclusão surgiu.

A Matemática é, além de uma ciência, uma **linguagem**. Numa linguagem, como no Português, determinamos as letras permitidas e as regras de partida que descrevem de que modo as letras podem se agrupar, e daí passamos a formar as palavras e sentenças. Por exemplo, uma regra é “antes de P e B se usa M”. Essa regra não requer uma justificativa: simplesmente a aplicamos, sem questionar sua veracidade.